II

LE SEQUENZE CASUALI

1.– Le sequenze a caso e le medie di insieme

Per evitare di introdurre definizioni e concetti in maniera completamente astratta, partiamo da un caso fisico ben preciso e che in seguito incontreremo ancora, ovvero dalla differenza di potenziale che si presenta ai capi di un resistore anche quando non è percorso da una corrente imposta dall'esterno. Consideriamo quindi un resistore r di resistenza R. Con il valore R intendiamo caratterizzare il conduttore in esame, ma siamo perfettamente consapevoli del fatto che con la indicazione del valore di R non abbiamo univocamente definito il resistore: esistono infatti innumerevoli resistori, tutti apparentemente uguali dal punto di visto macroscopico (in particolare tutti caratterizzati dall'avere la stessa resistenza R), certamente differenti l'uno dall'altro per le diverse aggregazioni microscopiche del materiale di cui sono costituiti. Normalmente tutto questo ha scarso interesse, anche concettuale. Quando però si osserva, ad esempio, che, posto il resistore a temperatura T costante e senza applicare alcuna tensione ad esso, la ddp ai suoi capi misurata con uno strumento sufficientemente sensibile risulta fluttuante e generalmente diversa da zero (vedi Fig.1, dove in realtà è riportata una simulazione numerica), è naturale porsi il problema di quello che accadrebbe cambiando resistore; e allora le innumerevoli maniere con le quali si può –ad esempio– realizzare un resistore di resistenza pari a R diventano non solo interessanti, ma addirittura fondamentali per individuare e definire –se esistono– le proprietà medie di questa ddp osservata sul singolo campione.

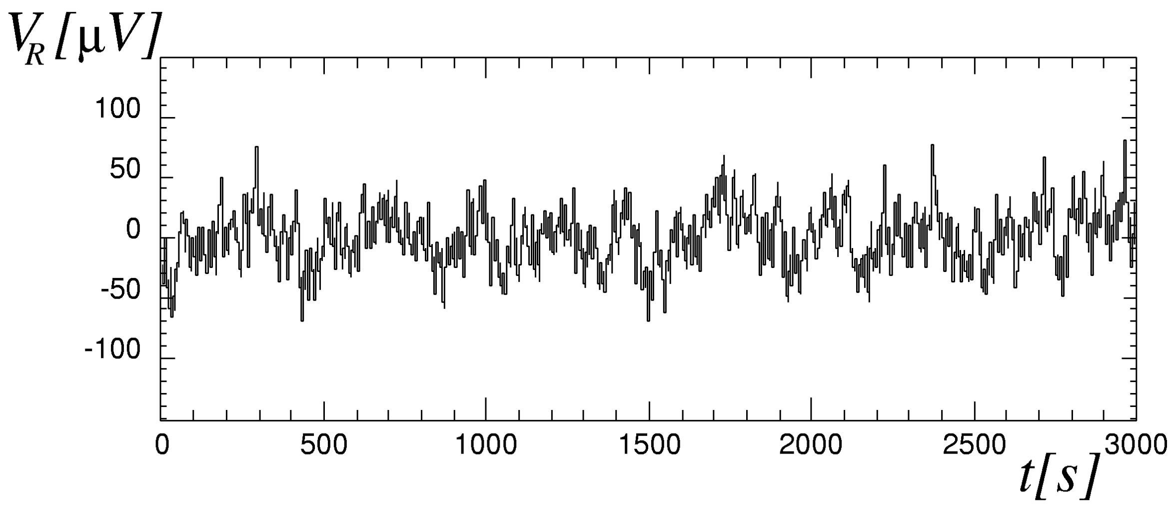

Fig.II.1

Per procedere alla valutazione di queste proprietà medie, si immagina di disporre di un insieme costituito da tutti quei resistori, macroscopicamente identici e compatibili con il nostro resistore originario, posti nelle stesse condizioni fisiche (per esempio fondamentale nel nostro caso: alla stessa temperatura T) e di studiarne le proprietà, fra le quali di particolare nostro interesse c'è sicuramente la ddp ai loro capi, in assenza di applicazione esterna di tensione. In generale le possibili repliche saranno in un numero M molto grande, matematicamente diremmo tendenti all'infinito. Se ammettiamo di compiere le misure di ddp su tutte le M resistenze ad intervalli di tempo regolari e contemporaneamente su tutte quante, avremo per ogni resistenza r_m un insieme di registrazioni (ognuna costituisce quella che si chiama una *sequenza*) che possiamo sinteticamente indicare con:

$$\{\underline{v}_{mi}\}$$

con l'indice m che corre sull'insieme degli M resistori e l'indice i che ordina le misure effettuate sulla resistenza r_m secondo il parametro tempo; qui e nel seguito indicheremo le variabili aleatorie o casuali con una sottolineatura, ove sia necessario per distinguerle dalle variabili usuali.

Poiché gli elementi della sequenza sono, come appena detto, variabili casuali, le sequenze sono anch'esse dette *casuali.*

Le misure effettuate ci permettono di disporre di un insieme di M sequenze e l'i-esimo elemento della m-esima sequenza rappresenta la misura della ddp ai capi di r_m effettuata al tempo $t_i = i \cdot \Delta t$, con $i = 0, ..., I$ e Δt intervallo fra una misura e l'altra. Nel limite per $M \to \infty$, ovvero nella presunzione di aver considerato tutte le repliche fisicamente possibili del resistore di partenza, per ogni valore di i è possibile determinare la densità di probabilità $f_{v_i}(v_i, i)$ che la tensione $\underline{v}_i$ sia compresa in un intervallo infinitesimo di estensione dv_i attorno a v_i:

$$p(v_i \leq \underline{v}_i \leq v_i + dv_i) = f_{v_i}(v_i, i)\ dv_i \tag{II.1}$$

In altri termini, l'aver ammesso di disporre di un numero M illimitato di resistori tutti identici fra loro in quanto a valore di R, ci permette di trarre, usando le leggi della statistica, le informazioni sulle proprietà matematiche delle distribuzioni che auspicabilmente sono in grado di rappresentare il processo.

In questo schema è possibile introdurre le cosidette *medie di insieme* delle grandezze studiate e delle loro funzioni. Per esempio possiamo definire la media di insieme delle ddp misurate $\underline{v}_i$, cioè delle tensioni misurate al tempo $t_i = i \cdot \Delta t$, come:

$$\overline{v_i} = E\{\underline{v}_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} v\ f_{v_i}(v, i)\ dv \tag{II.2}$$

dove nella variabile di integrazione si è omesso per semplicità il pedice i. Nel caso che la variabile v_i sia discreta *, occorre passare dagli integrali alle somme e dalle densità di probabilità alle probabilità associate ai valori discreti.

La notazione tipografica della sopralineatura qui e nel seguito si riferisce alla media di insieme.

In generale (ma non sarà così proprio nel caso che stiamo considerando delle nostre resistenze), la media di insieme, ovvero il valore di aspettazione di $\underline{v}_i$ dipende da i, così come da i dipende in generale $f_{v_i}(v, i)$.

Avendo a che fare con sequenze (nel linguaggio del Calcolo delle probabilità diremmo *vettori*) di

---

* Non è il nostro caso se la misura delle resistenze si suppone effettuata con uno strumento infinitamente sensibile e preciso; ma è il nostro caso se la tensione, più realisticamente, si misura ad esempio con un ADC con un numero finito di bit

variabili aleatorie $\{\underline{v}_i\}$, possiamo anche definire le densità di probabilità congiunta $f_{v_i v_j}(v_i, i; v_j, j)$ per due componenti del vettore v_i, v_j, che ci servirà non appena andremo a considerare funzioni di due variabili aleatorie della nostra sequenza. Per questa probabilità congiunta valgono le solite considerazioni riguardo alla indipendenza o meno delle variabili aleatorie: in particolare vale la condizione necessaria e sufficiente per l'indipendenza, ovvero la fattorizzabilità della densità di probabilità congiunta nelle due densità marginali.
Ovviamente, oltre alla media di insieme $\overline{v_i}$, si può definire la media di insieme del quadrato $\overline{v_i^2}$ e la varianza di insieme $\sigma^2(v_i) = E\{(\underline{v}_i - \overline{v_i})^2\}$:

$$\overline{v_i^2} = E\{\underline{v}_i^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \; f_{v_i}(v, i) \; dv \tag{II.3}$$

$$\sigma_{v_i}^2 = E\{(\underline{v}_i - \overline{v_i})^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (v - \overline{v_i})^2 \; f_{v_i}(v, i) \; dv = \overline{v_i^2} - \overline{v_i}^2 \tag{II.4}$$

Così come la media $\overline{v_i}$, anche $\overline{v_i^2}$ e $\sigma^2(v_i)$ in generale dipendono dall'indice i, cioè dal tempo (al solito, non nel caso della resistenza che stiamo considerando).
Di notevole interesse sono le correlazioni fra le componenti della sequenza, definite in maniera sostanzialmente identica a quanto appreso nel caso dei vettori di variabili aleatorie, dove la matrice di covarianza conglobava in sé tutta l'informazione riguardo alle correlazioni a due a due fra le componenti. Non stupisce che nel caso in esame, essendo la sequenza ordinata secondo il tempo, l'indice delle componenti del vettore $\{\underline{v}_i\}$ giochi un ruolo fondamentale nella definizione e ricerca delle correlazioni. La cosidetta *sequenza di autocorrelazione* è infatti definita come segue:

$$\Phi_{vv}(i, j) = E\{\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du \; v \cdot u^* \; f_{v_i v_j}(v, i; u, j) \tag{II.5}$$

e la *sequenza di autocovarianza* come:

$$\gamma_{vv}(i, j) = E\{(\underline{v}_i - \overline{v_i}) \cdot (\underline{v}_j - \overline{v_j})^*\} \tag{II.6}$$

Il simbolo "*" rappresenta al solito l'operazione di coniugazione. Spesso, nel seguito e anche ora proprio nel caso che stiamo considerando di tensioni misurate ai capi dei resistori, le grandezze sono reali e l'operazione di coniugazione, ovviamente, non ha alcun effetto.
E' immediato dimostrare che:

$$\gamma_{vv}(i, j) = \Phi_{vv}(i, j) - \overline{v_i} \cdot \overline{v_j^*}$$

In generale le sequenze di autocorrelazione e autocovarianza dipendono sia da i che da j. La dipendenza di queste sequenze dai due indici ci dice come le variabili della sequenza siano fra loro correlate al variare di i e di j, ovvero al loro muoversi all'interno della sequenza originaria. Intuitivamente possiamo aspettarci che quando i e j sono vicini di valore (per esempio adiacenti) la autocorrelazione possa essere molto maggiore di quando gli indici sono molti diversi, ovvero le due misure temporalmente assai distanti. Per esempio, si sarà notato che nel caso della sequenza riportata nella Fig.1 i valori della tensione, pur essendo fluttuanti, tendano a mantenersi costanti su intervalli di tempo dell'ordine di 100 s; pertanto se prendiamo due valori i e j tali per cui la differenza di tempo associata è minore di tale intervallo temporale, il prodotto $(\underline{v}_i - \overline{v_i}) \cdot (\underline{v}_j - \overline{v_j})$ risulterà quasi sempre positivo, mentre per differenze fra i e j decisamente superiori il prodotto sarà mediamente nullo. Le sequenze per le quali la autocorrelazione 5) è diversa da zero solo quando $i = j$, cioè la 5) coincide con il calcolo della varianza di insieme definita dalla 4), sono dette "puramente casuali" e, come vedremo, pur essendo di qualche interesse fisico, sono in pratica una pura astrazione matematica.

Per quanto appena detto dovrebbe risultare chiaro che la sequenza mostrata nella Fig.1 non è una sequenza puramente casuale; infatti –come capiremo meglio nel seguito– tale sequenza corrisponde alla misura di tensione ai capi di un resistore r effettuata con un taglio per frequenze superiori al centesimo di Hz (o introdotto dallo strumento di misura o da una capacità posta in parallelo a r).

2.– *Processi a caso stazionari*

Tornando al processo in esame, l'esperienza accumulata fino ad oggi, accompagnata e confortata da argomentazioni di tipo teorico, insegna che, per le sequenze casuali associate a processi del tipo di quelli responsabili della ddp erratica ai capi di un resistore posto a temperatura T finita, si riescono a valutare le densità di probabilità $f_{v_i}(v_i, i)$ e $f_{v_i v_j}(v_i, i; v_j, j)$ e che le medie sopra definite esistono ed inoltre godono di importanti proprietà. In particolare si trova che il processo che stiamo esaminando appartiene alla categoria dei processi a caso *stazionari*, ovverosia quelli per i quali le medie al primo ordine (come son dette quelle che coinvolgono una sola variabile aleatoria per volta) ed in particolare le 2), 3) e 4), non dipendono dal tempo, ovvero dall'indice i, ed inoltre le medie del secondo ordine, quali quelle definite dalle 5) e 6), dipendono solo dalla differenza di tempo fra le due componenti $\underline{v}_i$, $\underline{v}_j$, cioè da $(j - i) \cdot \Delta t$.
Nel caso delle nostre resistenze si trova che –data la costanza della temperatura T del bagno termostatico col quale i resistori sono in equilibrio– effettivamente il processo è stazionario. Ancor più esplicitamente vedremo che:

$$\overline{v_i} = \overline{v} = 0 \tag{II.7}$$

cioè il valore medio (di insieme) della tensione è nullo. Quanto ai valori che in questo caso assume la varianza $\overline{v_i^2} = \sigma^2(v_i)$ e la sequenza di autocorrelazione, rinviamo il lettore al Cap.V.

3.– *Le medie nel tempo e l'ipotesi ergodica*

L'aver introdotto le repliche del nostro sistema in esame (gli M resistori tutti uguali e tutti in equilibrio alla temperatura T) è utile per poter definire le medie come valori di aspettazione ed utilizzare i metodi del Calcolo delle probabilità. Vedremo nel seguito che effettivamente molto spesso dal punto di vista della schematizzazione fisica dei processi, l'approccio delle medie di insieme è assai vantaggioso. Tuttavia, dal punto di vista pratico, in particolare delle misure, normalmente si ha a che fare con un unico sistema fisico (un unico resistore a temperatura T) e si tenta di estrarre le proprietà medie da esso soltanto, magari osservando questo unico sistema per un tempo sufficientemente esteso. Data quindi una *unica* sequenza $\{\underline{v}_i\}$, definiamo la media temporale della sequenza come:

$$\langle \underline{v}_i \rangle = \langle v \rangle = \lim_{I \to \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \underline{v}_i \tag{II.8}$$

e la autocorrelazione temporale:

$$\langle \underline{v}_{i+k}, \underline{v}_i \rangle = \lim_{I\to\infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \underline{v}_{i+k} \cdot \underline{v}_i^* \tag{II.9}$$

Nei casi di interesse che incontreremo nel seguito, la autocorrelazione temporale, così come la sequenza di autocorrelazione definita dalla 5), si manterrà significativamente differente da 0, in funzione di k e quindi della differenza di tempo fra i due istanti considerati, solo entro un certo limite superiore $\tau_{max} = k_{max} \cdot \Delta t$.

Se le M repliche sono effettivamente tali, cioè si tratta di copie conformi dello stesso sistema fisico originario, le medie temporali ipoteticamente effettuate sulle varie sequenze dell'insieme devono essere tutte uguali fra loro. Pertanto per i processi stazionari, per i quali la media di insieme è per definizione indipendente dal tempo, i due metodi adottati per mediare (media temporale e media di insieme) devono coincidere. In altri termini, se esaminiamo una sola sequenza stazionaria e ne facciamo la media temporale, quest'ultima deve coincidere con la media di insieme che otterremmo sulle repliche del sistema fisico in esame:

$$\langle v \rangle = \lim_{I\to\infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \underline{v}_i = E\{\underline{v}_i\} = \overline{v} \tag{II.10}$$

$$\langle v_{i+k}, v_i^* \rangle = \lim_{I\to\infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \underline{v}_{i+k} \cdot \underline{v}_i^* = E\{\underline{v}_i \cdot \underline{v}_{i+k}\} = \Phi_{vv}(i+k, i) \tag{II.11}$$

Poiché questa è la medesima conclusione alla quale in Meccanica Statistica, ovvero in un contesto più generale, si addiviene formulando la cosidetta *ipotesi ergodica*, i processi che noi ci apprestiamo ad esaminare, quali quello della tensione aleatoria ai capi del resistore a temperatura finita, sono anche detti processi stazionari *ergodici*.

In pratica, se vogliamo seguire l'approccio della media temporale su un unico sistema stazionario ergodico, non potremmo estendere le medie temporali fra $-\infty$ e $+\infty$, ma ci dovremmo limitare ad un intervallo di tempo finito (similmente a quello che accadrebbe se volessimo attuare medie di insieme, da poter fare solo su un insieme finito di repliche). E' legittimo chiedersi quale sia il criterio da seguire per definire l'intervallo di tempo su cui effettuare la media senza commettere errori significativi rispetto al caso ideale di media valutata su un intervallo infinito: l'accorgimento è quello di scegliere una durata per l'operazione di media che abbia una estensione decisamente superiore all'intervallo di tempo –caratteristico del processo fisico in studio– che il sistema impiega per cambiare significativamente di stato (nel caso in esame: il tempo che la ddp casuale impiega per cambiare di valore di una quantità apprezzabile). Come impareremo poi, tale tempo è proprio quel τ_{max} visto prima entro il quale la autocorrelazione temporale si mantiene significativamente diversa da zero. Vedremo che nel caso del resistore questo tempo è brevissimo (frazioni di femtosecondi, idealmente zero); scopriremo anche che non appena si tenga conto che ai capi del resistore di resistenza R è comunque sempre presente una capacità C, allora il tempo caratteristico da superare con buon margine per fare medie temporali corrette è, non sorprendentemente, la costante di tempo $\tau = RC$. Notiamo che questo tempo caratteristico, o "memoria" del sistema, può essere anche stimato dalle medie di insieme, precisamente osservando le sequenze di autocorrelazione sopra definite nelle 5) e 6).

Quello appena detto è un criterio che definisce il limite minimo al di sotto del quale l'estensione temporale su cui si effettua la media non deve assolutamente scendere; nel prossimo capitolo vedremo poi quale sia, una volta soddisfatto questo requisito, l'effetto della dimensione finita dell'intervallo sull'informazione estraibile dalla sequenza in esame.

Si sarà notato che le medie temporali definite dalle 8) e 9) sono fatte sulle sequenze di punti, intervallate da un certo Δt. Questo di per sé non è rilevante per la definizione di media temporale, ma corrisponde al fatto che le misure effettive di una sequenza sono sempre in numero finito e distanti di un intervallo finito. Tuttavia, dal punto di vista della trattazione matematica (a meno che non si vogliano affrontare tutti questi argomenti con la matematica discreta, per esempio impiegando la *DFT*, *Discrete Fourier Transform*) risulta spesso preferibile scrivere le medie temporali nel continuo:

$$\langle v \rangle = \langle \underline{v}(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t)\ dt \tag{II.12}$$

$$\langle \underline{v}(t+\tau), \underline{v}(t)^* \rangle = R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t+\tau) \cdot v^*(t)\ dt \tag{II.13}$$

La relazione 13) definisce propriamente la cosidetta *funzione di autocorrelazione* della sequenza $\{\underline{v}(t)\}$. Il valore della funzione di autocorrelazione $R(\tau = 0)$ corrisponde alla varianza della sequenza:

$$R(\tau = 0) = \sigma^2(\underline{v}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |v(t)|^2\ dt \tag{II.14}$$

Notiamo che una qualunque sequenza $\{\underline{v}(t)\}$ si può sempre porre nella forma della somma del valor medio della sequenza più un termine che risulta dalla differenza fra gli elementi della sequenza $\{\underline{v}(t)\}$ e il valor medio:

$$\{\underline{v}(t)\} = \{\underline{di}(t)\} + \langle v \rangle \tag{II.15}$$

con $\langle\{\underline{di}(t)\}\rangle = 0$. E' utile sapere quale relazione intercorre fra la funzione di autocorrelazione $R_v(\tau)$ della $\{\underline{v}(t)\}$ e la funzione di autocorrelazione $R_d(\tau)$ della $\{\underline{di}(t)\}$. Troviamo allora:

$$\begin{aligned} R_v(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t+\tau) \cdot v^*(t)\ dt = \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \Big\{ \int_{-T/2}^{+T/2} di(t+\tau) \cdot di^*(t)\ dt + \int_{-T/2}^{+T/2} di(t) \cdot \langle v \rangle^*\ dt + \\ &+ \int_{-T/2}^{+T/2} \langle v \rangle \cdot di^*(t)\ dt + \int_{-T/2}^{+T/2} |\langle v \rangle|^2\ dt \Big\} = \\ &= R_d(\tau) + |\langle v \rangle|^2 \end{aligned} \tag{II.16}$$

La relazione 16) ci sarà utile nel seguito. La funzione di autocorrelazione di una sequenza a media nulla, più propriamente si dovrebbe chiamare *funzione di autocovarianza*, ma tale notazione di fatto non si usa.

In generale notiamo che nella pratica, avendo a disposizione una sequenza finita di un processo a caso $\{\underline{v}_i\}$, non sarà possibile effettuare il calcolo al limite presente nelle formule 8) e seguenti, ma piuttosto ci si dovrà accontentare di valutare le medie sul campione mediante somme finite; sappiamo che le somme di variabili aleatorie sono ancora variabili aleatorie e quindi le medie sul campione andranno considerate come estimatori delle medie di interesse.