

Oscillatore armonico in più dimensioni

1 Oscillatore in D dimensioni

La teoria dell'oscillatore armonico si può generalizzare facilmente da una a più dimensioni. Infatti la hamiltoniana di un oscillatore isotropo di massa m e pulsazione ω , in D dimensioni e in coordinate cartesiane si scrive

$$(1.1) \quad H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^D \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2 \right)$$

e risulta la somma di D hamiltoniane unidimensionali, indipendenti e commutanti fra loro.

Dall'equazione di Schrödinger stazionaria¹

$$(1.2) \quad H u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = E_n u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

si ricava allora che gli autovalori dell'energia sono la somma delle energie dei singoli oscillatori, cioè

$$(1.3) \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{D}{2} \right), \quad n = \sum_{i=1}^D n_i, \quad n_i \in \mathbb{N}$$

mentre le autofunzioni sono date dal prodotto delle singole autofunzioni:

$$(1.4) \quad u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^D u_{n_i}(x_i),$$

dove le $u_{n_i}(x_i)$ sono le autofunzioni standard dell'oscillatore armonico unidimensionale, riportate nella (2.4).

La (1.3) mostra che gli autovalori E_n dipendono da un solo numero quantico n , che è dato dalla somma di tutti gli n_i . Poiché un dato n si può ottenere in più modi per diverse scelte degli n_i , mentre le autofunzioni corrispondenti alle diverse scelte sono tutte distinte, si vede che i livelli E_n sono degeneri, con una degenerazione d_n che cresce rapidamente al crescere di n . La degenerazione è data dal numero di soluzioni dell'equazione numerica contenuta nella (1.3) e si dimostra² che questo numero è dato dal coefficiente binomiale

$$(1.5) \quad d_n = \binom{n+D-1}{n} = \frac{(n+D-1)!}{n!(D-1)!}.$$

¹Si usano le seguenti notazioni: $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_D)$; $\mathbf{n} \equiv (n_1, \dots, n_D)$.

²Il numero di ripartizioni di un numero n come somma di D interi, cioè tali che $n_1 + n_2 + \dots + n_D = n$, si può calcolare col seguente ragionamento. Consideriamo una fila di $n + D - 1$ caselle e n pedine da disporre nelle caselle. In una data disposizione si hanno sequenze di n_1, n_2, \dots, n_D pedine separate da caselle vuote. Le caselle vuote sono in numero di $D - 1$ e separano le n pedine in D gruppi di n_i pedine contigue. Ad ogni disposizione delle pedine corrisponde quindi una ripartizione del numero n . Di conseguenza il numero di tali ripartizioni è uguale al numero dei modi in cui si possono scegliere n caselle (piene) su un totale di $n + D - 1$ e questo è dato appunto dalla (1.5).

In generale la degenerazione dei livelli è dovuta alle proprietà di simmetria della hamiltoniana, cioè alla sua invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni. Risulta evidente che la (1.1) è invariante per rotazioni nello spazio D -dimensionale, cioè per le trasformazioni $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \alpha \mathbf{x}$ e $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \alpha \mathbf{p}$, dove α è una matrice $D \times D$ reale e ortogonale, trasformazioni che lasciano invariati \mathbf{x}^2 , \mathbf{p}^2 e quindi H . Queste rotazioni formano un gruppo di Lie, che è isomorfo al gruppo delle matrici α , e viene indicato col simbolo $O(D)$.

Quello delle rotazioni non è tuttavia il più grande gruppo d'invarianza di H . Introduciamo gli operatori di Dirac di spostamento dell'energia a_i e a_i^\dagger , definiti da

$$(1.6) \quad \begin{cases} a_i = \sqrt{m\omega/2\hbar} (x_i + ip_i/m\omega) \\ a_i^\dagger = \sqrt{m\omega/2\hbar} (x_i - ip_i/m\omega) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_i = \sqrt{\hbar/2m\omega} (a_i + a_i^\dagger) \\ p_i = -i\sqrt{m\hbar\omega/2} (a_i - a_i^\dagger) \end{cases}$$

Essi obbediscono alle relazioni

$$(1.7) \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

Con questi operatori l'hamiltoniana (1.1) si scrive

$$(1.8) \quad H = \hbar\omega \left(\sum_{i=1}^D a_i^\dagger a_i + \frac{D}{2} \right) = \hbar\omega (\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a} + D/2).$$

Si riconosce adesso che la (1.8) è invariante per la trasformazione $\mathbf{a} \rightarrow \beta \mathbf{a}$, dove β è una matrice $D \times D$ unitaria. Le matrici β formano un gruppo di Lie, denominato $U(D)$. Poiché le matrici β reali (e ortogonali) sono un sottoinsieme delle matrici unitarie e formano il gruppo $O(D)$, ne segue che $O(D)$ è un sottogruppo di $U(D)$.

Questa trasformazione che lascia H invariata, corrisponde alla seguente trasformazione per \mathbf{x} e \mathbf{p} :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \mathbf{x}' = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\beta \mathbf{a} + \beta^* \mathbf{a}^\dagger) = \frac{1}{2}(\beta + \beta^*) \mathbf{x} + \frac{i}{2m\omega} (\beta - \beta^*) \mathbf{p} \\ \mathbf{p}' = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\beta \mathbf{a} - \beta^* \mathbf{a}^\dagger) = \frac{1}{2}(\beta + \beta^*) \mathbf{p} + \frac{m\omega}{2i} (\beta - \beta^*) \mathbf{x} \end{cases}$$

Si verifica facilmente che, se la matrice β è unitaria, la trasformazione (1.9) è canonica, cioè lascia invariati i commutatori canonici fra x_i e p_j . Si vede poi che la trasformazione si riduce a una rotazione D -dimensionale se β è reale, mentre in generale rappresenta una rotazione generalizzata, a coefficienti reali, nello spazio delle fasi.

Nello spazio di Hilbert degli stati del sistema, la base degli autostati dell'energia è rappresentata dai vettori ket

$$(1.10) \quad |\mathbf{n}\rangle \equiv |n_1, n_2, \dots, n_D\rangle$$

che corrispondono, nella rappresentazione delle coordinate, alle autofunzioni $u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ della (1.4). Ciascun vettore $|\mathbf{n}\rangle$ è autovettore simultaneo degli operatori $N_i = a_i^\dagger a_i$, o di funzioni di questi, e si hanno quindi in totale D operatori simultaneamente diagonali, di cui $D - 1$ indipendenti dall'energia. L'insieme degli N_i costituisce un'osservazione massima del sistema. Infatti si può

dimostrare che un'osservazione massima è costituita da D osservabili indipendenti e compatibili, come del resto si capisce dal fatto che il sistema ha D gradi di libertà.

Oltre agli N_i esistono altre costanti del moto. Consideriamo in particolare gli operatori $a_i^\dagger a_j$, ovvero le loro combinazioni autoaggiunte

$$(1.11) \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i); \quad A_{ij} = \frac{1}{2i}(a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i).$$

Si capisce facilmente (e si può verificare algebricamente) che gli operatori $a_i^\dagger a_j$, e quindi anche S_{ij} e A_{ij} , commutano con l'hamiltoniana (1.8). Infatti applicando $a_i^\dagger a_j$ a un autovettore $|\mathbf{n}\rangle$ si ha che n_i aumenta di 1 e n_j diminuisce di 1, per cui n rimane invariato. Pertanto gli S_{ij} e A_{ij} costituiscono un set di D^2 osservabili compatibili con l'energia, ovvero costanti del moto. Osserviamo infine che anche la parità è una costante del moto e che tutti gli stati del livello n hanno parità $(-1)^n$, come risulta dalle autofunzioni (1.4), ricordando che le autofunzioni unidimensionali $u_{n_i}(x_i)$ hanno parità $(-1)^{n_i}$.

Nei prossimi paragrafi discuteremo in particolare i casi di maggior interesse fisico dell'oscillatore, in due e in tre dimensioni.

2 Oscillatore armonico in due dimensioni

2.1 Soluzioni dell'equazione di Schrödinger

Consideriamo l'oscillatore bidimensionale nel piano (x_1, x_2) , che ha come hamiltoniana

$$(2.1) \quad H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2).$$

L'equazione di Schrödinger è un caso particolare di quello trattato nel paragrafo precedente. In particolare gli autovalori dell'energia sono

$$(2.2) \quad E_n = \hbar\omega(n + 1), \quad n = n_1 + n_2$$

e il livello n è degenere $n + 1$ volte. Infatti n_1 può prendere tutti i valori da 0 a n , in totale $n + 1$ valori, e n_2 è determinato univocamente come $n_2 = n - n_1$. Le autofunzioni, in coordinate cartesiane, sono date da

$$(2.3) \quad \psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = u_{n_1}(x_1) u_{n_2}(x_2),$$

dove $u_{n_i}(x_i)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore unidimensionale, date da

$$(2.4) \quad u_{n_i}(x_i) = N_{n_i} H_{n_i}(\alpha x_i) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x_i^2},$$

dove $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$, H_{n_i} è un polinomio di Hermite e N_{n_i} è la costante di normalizzazione.

L'hamiltoniana H si può anche scrivere in coordinate polari (r, θ) e risulta

$$(2.5) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Per un moto piano si definisce il momento angolare

$$(2.6) \quad L = x_1 p_2 - x_2 p_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Si vede che L commuta con H ed è quindi una costante del moto. Inoltre L e H rappresentano un'osservazione massima del sistema³. L'equazione agli autovalori per L è

$$(2.7) \quad L \Phi_m(\theta) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_m(\theta) = m\hbar \Phi_m(\theta)$$

ed ha autovalori $m\hbar$, con m intero, e autofunzioni normalizzate

$$(2.8) \quad \Phi_m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}.$$

La richiesta che le autofunzioni siano funzioni a un sol valore nel piano, e quindi siano periodiche in θ con periodo 2π , porta alla condizione che i valori di m siano interi.

L'equazione di Schrödinger in coordinate polari si scrive

$$(2.9) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - E \right] \psi(r, \theta) = 0.$$

Poiché H e L commutano, conviene cercare autofunzioni simultanee dell'energia e di L . Poniamo allora

$$(2.10) \quad \psi(r, \theta) = R(r) \Phi_m(\theta),$$

dove le $\Phi_m(\theta)$ sono date dalla (2.8). Le funzioni radiali $R(r)$ sono soluzioni dell'equazione agli autovalori

$$(2.11) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - E \right] R(r) = 0.$$

Usando la variabile adimensionale $\rho = \alpha r$, con $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$, la (2.11) diventa

$$(2.12) \quad R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - \rho^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0.$$

Risolvendo l'equazione (2.12), la cui discussione è riportata in nota⁴, si ottengono gli autovalori dell'energia

$$(2.13) \quad E_n = \hbar\omega (n + 1), \quad n \in \mathbb{N}$$

³Poiché il sistema ha due gradi di libertà, un'osservazione massima è costituita da due osservabili indipendenti e compatibili, come ad es. le coordinate x_1 e x_2 o gli operatori 'numero' N_1 e N_2 .

⁴L'equazione (2.12) ha una singolarità regolare in $\rho = 0$ e una singolarità essenziale all'infinito. Per $\rho = 0$ l'equazione caratteristica $\alpha^2 - m^2 = 0$ ci dice che le soluzioni vanno come ρ^m e ρ^{-m} . Scegliamo la soluzione regolare che va come $\rho^{|m|}$. Per $\rho \rightarrow \infty$ le soluzioni vanno come $e^{\pm \frac{1}{2}\rho^2}$. In questo caso scegliamo la soluzione che si annulla all'infinito, come richiesto per gli stati legati, e abbiamo quindi l'andamento $e^{-\frac{1}{2}\rho^2}$, tipico dell'oscillatore armonico. Poniamo allora

$$R(\rho) = \rho^{|m|} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} F(\rho)$$

e richiediamo che $F(\rho)$ vada a costante per $\rho \rightarrow 0$ e cresca al più come una potenza per $\rho \rightarrow +\infty$. Ponendo per comodità $\varepsilon = E/\hbar\omega$ e $k = |m|$, si ottiene per $F(\rho)$ la seguente equazione differenziale

$$F'' + \left(\frac{2k+1}{\rho} - 2\rho \right) F' + 2(\varepsilon - k - 1) F = 0.$$

Facciamo il cambiamento di variabile $z = \rho^2$ e poniamo $G(z) = F(\rho)$, per cui l'equazione diventa

$$zG''(z) + (k+1-z)G'(z) + \frac{1}{2}(\varepsilon - k - 1)G(z) = 0.$$

che coincidono ovviamente con quelli della (2.2), e le funzioni radiali che risultano

$$(2.14) \quad R(\rho) \equiv R_{n_r|m|}(\rho) = N \rho^{|m|} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} L_{n_r}^{(|m|)}(\rho^2),$$

dove $n_r \in \mathbb{N}$ è il numero quantico radiale, $L_{n_r}^{(|m|)}$ è un polinomio associato di Laguerre di grado n_r e N è una costante di normalizzazione. Ricordiamo poi che le autofunzioni complete dell'energia sono date dalla (2.10), cioè

$$(2.15) \quad \psi_{nm}(r, \theta) = R_{n_r|m|}(\alpha r) \Phi_m(\theta).$$

Il numero quantico principale n è legato ai numeri quantici n_r e m dalla relazione

$$(2.16) \quad n = 2n_r + |m|$$

per cui i livelli E_n per $n > 0$ risultano degeneri. Vediamo per esempio cosa accade per i livelli più bassi. Per $n = 0$ si ha solo $n_r = m = 0$, per cui lo stato fondamentale è non degenero. Per $n = 1$ si ha $n_r = 0$ e $m = \pm 1$, per cui il livello è due volte degenero. Per $n = 2$ si può avere $n_r = 0$, $m = \pm 2$, e $n_r = 1$, $m = 0$, per cui il livello è tre volte degenero. In generale si può dimostrare facilmente che la degenerazione del livello n è $n + 1$, come si è visto per la (2.2).

Il fatto che n e m differiscano per un numero pari è legato alla parità delle autofunzioni. Infatti in coordinate cartesiane la parità delle autofunzioni (2.3) è $(-1)^n$, mentre in coordinate polari l'operazione di parità $x_i \rightarrow -x_i$ corrisponde alla trasformazione $\theta \rightarrow \theta + \pi$, che per la (2.8) dà un fattore $(-1)^m$. Perché la parità sia la stessa, per un dato n , occorre appunto che $n - m$ sia pari.

2.2 Trattazione algebrica

Discutiamo adesso alcune proprietà algebriche della teoria, basate sull'uso degli operatori di spostamento a_i e a_i^\dagger . Dalle definizioni (1.6), (2.1) e (2.6) si ricava che gli operatori H e L sono dati da

$$(2.17) \quad H = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1); \quad L = i\hbar(a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2),$$

e si verifica che commutano. È utile introdurre gli operatori

$$(2.18) \quad \begin{cases} a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \pm ia_2) \\ a_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger \mp ia_2^\dagger) \end{cases}$$

e si verifica che essi obbediscono alle relazioni di commutazione:

$$(2.19) \quad \begin{cases} [a_+, a_-] = [a_+, a_-^\dagger] = 0 \\ [a_+, a_+^\dagger] = [a_-, a_-^\dagger] = 1 \end{cases}$$

Questa è un'equazione ipergeometrica confluyente (si veda il §3.2 per maggiori dettagli), la cui soluzione regolare in $z = 0$ è

$$G(z) = {}_1F_1\left(\frac{1}{2}(k+1-\varepsilon); k+1; z\right).$$

Poiché la funzione ipergeometrica ${}_1F_1$ va all'infinito come $e^z = e^{\rho^2}$, dobbiamo richiedere che la serie ipergeometrica sia troncata, ovvero che il primo parametro della ${}_1F_1$ sia un intero negativo. Questa condizione si scrive $\frac{1}{2}(k+1-\varepsilon) = -n_r$, dove $n_r \in \mathbb{N}$ rappresenta il numero quantico radiale. Questa relazione porta all'equazione (2.13) per gli autovalori dell'energia, dove si è posto $n = 2n_r + k$. Inoltre la ${}_1F_1$ si riduce al polinomio associato di Laguerre $L_{n_r}^{(k)}(z)$, per cui la funzione radiale $R(\rho)$ assume la forma della (2.14).

che sono del tutto analoghe a quelle per a_i e a_i^\dagger . Definiamo poi gli operatori ‘numero’

$$(2.20) \quad N_+ = a_+^\dagger a_+, \quad N_- = a_-^\dagger a_-$$

e si verifica che valgono le relazioni

$$(2.21) \quad N_+ a_+ = a_+ (N_+ - 1), \quad N_+ a_+^\dagger = a_+^\dagger (N_+ + 1).$$

Pertanto le coppie di operatori (a_+, a_+^\dagger) e (a_-, a_-^\dagger) formano due coppie indipendenti di operatori di salita e discesa, del tutto analoghi alle coppie (a_1, a_1^\dagger) e (a_2, a_2^\dagger) .

Osserviamo che per lo stato fondamentale $|00\rangle$, definito dalle relazioni $a_1|00\rangle = a_2|00\rangle = 0$, dalla prima delle (2.18) segue che si ha

$$(2.22) \quad a_+ |00\rangle = a_- |00\rangle = 0.$$

Applicando più volte allo stato fondamentale gli operatori a_+^\dagger e a_-^\dagger , con lo stesso procedimento dell’oscillatore unidimensionale si possono allora costruire gli autostati $|n_+ n_-\rangle$, tali che

$$(2.23) \quad N_\pm |n_+ n_-\rangle = n_\pm |n_+ n_-\rangle$$

dove n_+ e n_- sono interi non negativi.

Dalle (2.17), (2.18) e (2.20) si verificano facilmente le seguenti relazioni notevoli:

$$(2.24) \quad N_\pm = \frac{1}{2}(N \mp L/\hbar)$$

da cui si ottiene

$$(2.25) \quad \begin{cases} N = N_+ + N_- \\ L/\hbar = N_- - N_+ \end{cases}$$

Questo risultato ci mostra che nella base $\{|n_+ n_-\rangle\}$ l’energia e il momento angolare sono diagonali, mentre L non è diagonale nella base $\{|n_1 n_2\rangle\}$. Applicando le (2.25) a un generico ket $|n_+ n_-\rangle$ si trovano le seguenti relazioni fra i numeri quantici:

$$(2.26) \quad \begin{cases} n = n_+ + n_- \\ m = n_- - n_+ \end{cases}$$

Infine dalla (2.16) si ricava che il numero quantico n_r è uguale al minore fra n_+ e n_- .

Vogliamo infine osservare che nella base dei numeri (n_+, n_-) , gli operatori $a_+ a_-^\dagger$ e $a_- a_+^\dagger$ fanno passare da uno stato a un altro, lasciando n invariato e aumentando o diminuendo m di due unità. In questo modo si possono raggiungere tutti gli stati del livello n .

3 Oscillatore armonico in tre dimensioni

3.1 Soluzione in coordinate cartesiane

Vogliamo ora discutere brevemente l’oscillatore armonico isotropo nello spazio tridimensionale ordinario. La trattazione in coordinate cartesiane si ottiene come caso particolare di quanto visto nel §1 per $D = 3$. L’hamiltoniana è

$$(3.1) \quad H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{x}^2$$

e l'equazione di Schrödinger

$$(3.2) \quad H u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = E_n u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

si separa immediatamente come somma di tre equazioni unidimensionali. Pertanto gli autovalori dell'energia risultano

$$(3.3) \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{3}{2}), \quad n = n_1 + n_2 + n_3$$

e le autofunzioni sono date da

$$(3.4) \quad u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \equiv u_{n_1 n_2 n_3}(\mathbf{x}) = u_{n_1}(x_1) u_{n_2}(x_2) u_{n_3}(x_3),$$

dove le $u_{n_i}(x_i)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore unidimensionale, riportate nella (2.4).

Il livello E_n è degenere d_n volte, con

$$(3.5) \quad d_n = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1),$$

secondo la (1.5) per $D = 3$. Osserviamo infine che le autofunzioni (3.4) hanno parità definita, e precisamente si ha:

$$(3.6) \quad u_{n_1 n_2 n_3}(-\mathbf{x}) = (-1)^n u_{n_1 n_2 n_3}(\mathbf{x}).$$

3.2 Soluzione in coordinate sferiche

L'equazione di Schrödinger in coordinate sferiche si scrive

$$(3.7) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathbf{l}^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - E \right] u(\mathbf{x}) = 0,$$

dove \mathbf{l} è l'operatore del momento angolare orbitale in unità \hbar (usiamo la notazione $\mathbf{L} = \hbar \mathbf{l} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$). L'autofunzione $u(\mathbf{x})$ si può fattorizzare, ponendo

$$(3.8) \quad u(\mathbf{x}) = u_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi).$$

Dalla (3.7) si ricava per $R(r)$ l'equazione radiale

$$(3.9) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) R(r) = 0.$$

Facciamo il cambiamento di variabile $\rho = \alpha r$, con $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$, e dividiamo l'equazione per α^2 . Si ottiene allora

$$(3.10) \quad R''(\rho) + \frac{2}{\rho} R'(\rho) + \left[\lambda - \rho^2 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] R(\rho) = 0,$$

dove si è posto

$$(3.11) \quad \lambda = \frac{2mE}{\hbar^2 \alpha^2} = \frac{2E}{\hbar\omega}.$$

Esaminiamo gli andamenti di $R(\rho)$ per $\rho \rightarrow 0$ e per $\rho \rightarrow \infty$. In $\rho = 0$ la (3.10) ha una singolarità regolare e le soluzioni hanno gli andamenti ρ^l e ρ^{-l-1} . Perché $R(\rho)$ sia regolare scegliamo la soluzione che va come ρ^l . Per $\rho \rightarrow \infty$ l'equazione asintotica dà gli andamenti $e^{\pm \frac{1}{2}\rho^2}$, come nel caso unidimensionale. La soluzione corretta è quella che va come $e^{-\frac{1}{2}\rho^2}$. Scriviamo allora la funzione radiale nella forma

$$(3.12) \quad R(\rho) = \rho^l e^{-\frac{1}{2}\rho^2} F(\rho),$$

dove $F(\rho)$ deve essere regolare in $\rho = 0$ e non deve crescere più di una potenza per $\rho \rightarrow \infty$. Ponendo la (3.12) nella (3.10) si ottiene

$$(3.13) \quad F''(\rho) + \frac{2}{\rho}(l+1-\rho^2)F'(\rho) + (\lambda-2l-3)F(\rho) = 0.$$

Conviene fare il cambiamento di variabile $z = \rho^2$, da cui $d/d\rho = 2\sqrt{z} d/dz$. Ponendo $F(\rho) = G(z)$ si ottiene

$$(3.14) \quad zG''(z) + \left(l + \frac{3}{2} - z\right)G'(z) + \frac{1}{4}(\lambda - 2l - 3)G(z) = 0.$$

Quest'equazione coincide con l'equazione ipergeometrica confluyente

$$(3.15) \quad zF''(z) + (c-z)F'(z) - aF(z) = 0,$$

dove a e c sono i due parametri dell'equazione. La (3.15) ammette una soluzione regolare nell'origine, mentre l'altra è singolare (va come $z^{1-c} = \rho^{-2l-1}$). La soluzione regolare si indica con ${}_1F_1(a; c; z)$ ed è data dalla serie di potenze

$$(3.16) \quad {}_1F_1(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n = 1 + \frac{a}{c}z + \frac{a(a+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \dots$$

dove si è usata la notazione $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$. Confrontando la (3.14) con la (3.15) si ha per i parametri a e c

$$(3.17) \quad a = \frac{1}{4}(2l+3-\lambda), \quad c = l + \frac{3}{2}$$

e ponendo $z = \rho^2$ si ottiene per la $F(\rho)$ della (3.12)

$$(3.18) \quad F(\rho) = {}_1F_1\left(\frac{1}{4}(2l+3-\lambda); l + \frac{3}{2}; \rho^2\right).$$

Per $\rho \rightarrow \infty$ la ${}_1F_1(z)$ va come $e^z = e^{\rho^2}$, salvo il caso che la serie (3.16) sia troncata. Poiché abbiamo richiesto che $F(\rho)$ non cresca più di una potenza, questo è quello che deve accadere. Dalla (3.16) si vede che la serie si interrompe se a è un intero negativo, cioè $a = -n_r$, con $n_r \in \mathbb{N}$. Questa condizione ci dà gli autovalori dell'energia. Infatti dalla (3.17) si ha

$$(3.19) \quad \lambda = 4n_r + 2l + 3$$

e dalla (3.11) si ottiene la formula

$$(3.20) \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right), \quad \text{dove } n = l + 2n_r \in \mathbb{N}$$

che coincide con la (3.3).

Per $a = -n_r$ la (3.16) si riduce a un polinomio di grado n_r , detto *polinomio associato di Laguerre*. Questi polinomi compaiono anche nella funzione radiale dell'atomo d'idrogeno e appartengono alla classe dei polinomi ortogonali. Indichiamo un generico polinomio con $L_n^{(\alpha)}(z)$, dove n è il grado del polinomio e α un parametro che può essere in generale complesso. Si hanno in particolare le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 (3.21) \quad L_n^{(\alpha)}(z) &= \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; z) \\
 &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!} \binom{n+\alpha}{n-r} z^r \\
 &= \frac{1}{n!} z^{-\alpha} e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^{n+\alpha} e^{-z})
 \end{aligned}$$

Ricordando le (3.12) e (3.18) e usando la prima delle (3.21) e la seconda delle (3.20), si ottiene la seguente espressione della funzione radiale:

$$(3.22) \quad R_{nl}(\rho) = N_{nl} \rho^l e^{-\frac{1}{2}\rho^2} L_{\frac{1}{2}(n-l)}^{(l+\frac{1}{2})}(\rho^2),$$

dove N_{nl} è la costante di normalizzazione. Il grado del polinomio, che è pari al numero quantico radiale n_r , è stato espresso mediante n e l per mezzo della relazione $n_r = \frac{1}{2}(n-l)$.

Osserviamo che gli autovalori dell'energia E_n dipendono soltanto dal numero quantico principale n , mentre le autofunzioni (3.8) dipendono dai tre numeri quantici n , l ed m . Si ha quindi degenerazione rispetto a l e m . La degenerazione rispetto a m è tipica di qualunque potenziale centrale, mentre quella rispetto a l è una particolarità che si verifica—in tre dimensioni—soltanto in due casi: quello del potenziale coulombiano e quello del potenziale elastico. Si può dimostrare che questa proprietà è legata alla particolare simmetria della hamiltoniana, che è invariante rispetto al gruppo di trasformazioni SU(3).

Esaminiamo più in dettaglio questa degenerazione. Per la seconda delle (3.20), l può prendere tutti i valori con la stessa parità di n , da 1 a n se n è dispari o da 0 a n se n è pari. Inoltre per un dato l , m può prendere tutti i valori interi da $-l$ a l . Così lo stato fondamentale ha $n = l = m = 0$ ed è non degenere. Il primo stato eccitato ha $n = l = 1$ e $m = +1, 0, -1$ ed è quindi 3 volte degenere. Il livello con $n = 2$ può avere $l = 0$ o $l = 2$ ed ha quindi $1 + 5 = 6$ stati degeneri. In generale si dimostra facilmente che la degenerazione del livello n è data dalla formula (3.5).

Concludiamo con un'osservazione sulla parità. Le autofunzioni (3.8) hanno la parità $(-1)^l$ data dalle armoniche sferiche. Ma questa coincide con la parità $(-1)^n$ della (3.6) poiché n e l hanno la stessa parità.