

Cenni sulla meccanica quantistica di Feynman

1 Propagatore

Dato che la formulazione di Feynman della meccanica quantistica è basata sul concetto di *propagatore*, sarà utile richiamare la definizione e le proprietà principali del propagatore nella teoria standard.

Nella consueta rappresentazione di Schrödinger, i vettori di stato dipendono dal tempo secondo la legge

$$(1) \quad |\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle,$$

dove $U(t, t_0)$ è un operatore unitario detto *operatore di evoluzione*. Se la hamiltoniana H non dipende dal tempo esso ha la forma

$$(2) \quad U(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H (t - t_0) \right].$$

Consideriamo il caso di una particella puntiforme e prendiamo la base $\{|\mathbf{x}\rangle\}$ degli autovettori generalizzati delle coordinate. Questi obbediscono alle relazioni di ortonormalità e di completezza

$$(3) \quad \begin{cases} \langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \int d^3x |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| = \mathbb{1}. \end{cases}$$

Il vettore di stato $|\psi(t)\rangle$ viene rappresentato in questa base dalla funzione d'onda

$$(4) \quad \psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle$$

e l'equazione (1), proiettando sul generico vettore *ket* $|\mathbf{x}\rangle$, diventa

$$(5) \quad \psi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t_0) \psi(\mathbf{x}', t_0),$$

dove si è posto

$$(6) \quad K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t_0) = \langle \mathbf{x} | U(t, t_0) | \mathbf{x}' \rangle.$$

La (5) ha la forma di una trasformata integrale di cui K è il nucleo. La funzione $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t_0)$, come appare dalla (6), è la rappresentazione dell'operatore di evoluzione e prende il nome di *propagatore*. In particolare $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ rappresenta la funzione d'onda nel punto \mathbf{x} e al tempo t , della particella che al tempo t_0 si trovava nel punto \mathbf{x}_0 . Questo infatti risulta dalla (5), prendendo per la funzione d'onda¹ al tempo t_0 : $\psi(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

Il propagatore obbedisce all'equazione di Schrödinger

$$(7) \quad \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0$$

¹Si tratta, come è noto, di una funzione d'onda *generalizzata*, cioè con norma infinita.

e alle relazioni

$$(8) \quad K^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = K(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, t)$$

$$(9) \quad K(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

che seguono dalle equazioni (3) e (6) e dalle proprietà dell'operatore di evoluzione.

Nel caso stazionario il propagatore si può esprimere per mezzo delle autofunzioni dell'energia $u_n(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | E_n \rangle$ nel modo seguente:

$$(10) \quad \begin{aligned} K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) &= \sum_n \langle \mathbf{x} | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | E_n \rangle \langle E_n | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t-t_0)} u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Una proprietà importante del propagatore è la seguente *regola di composizione*:

$$(11) \quad K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \int d^3x' K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}', t') K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1),$$

dove t' è arbitrario. La (11) si dimostra facilmente usando la regola del prodotto dell'operatore di evoluzione.

2 I postulati di Feynman

La meccanica quantistica di Feynman è stata formulata nel 1948, per un punto materiale nello spazio delle configurazioni, ed è stata poi estesa a sistemi più complessi e in particolare con infiniti gradi di libertà, come la teoria dei campi. Essa è basata sul propagatore $K(b, a)$ — che chiameremo *ampiezza di Feynman* —, definito come l'ampiezza di probabilità di una particella di andare dal punto $a \equiv (\mathbf{x}_a, t_a)$ al punto $b \equiv (\mathbf{x}_b, t_b)$. Esplicitamente la teoria di Feynman si fonda sui seguenti tre postulati.

Postulato 1. *Se una particella è localizzata nel punto \mathbf{x}_a al tempo t_a , la densità di probabilità $w(b)$ di trovarla nel punto \mathbf{x}_b al tempo t_b è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza $K(b, a)$:*

$$(12) \quad w(b) \propto |K(b, a)|^2.$$

Postulato 2. *L'ampiezza $K(b, a)$ è la somma dei contributi ϕ_γ di tutti i possibili cammini γ che uniscono i punti a e b .*

Formalmente possiamo scrivere

$$(13) \quad K(b, a) = \sum_\gamma \phi_\gamma.$$

Con Feynman chiameremo *cammino* una qualunque traiettoria classica fisicamente percorribile dalla particella, indipendentemente dalle condizioni iniziali del moto. Un dato cammino γ si può rappresentare nello spazio \mathbb{R}^3 delle coordinate con una linea di equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, tali che $\mathbf{x}(t_a) = \mathbf{x}_a$ e $\mathbf{x}(t_b) = \mathbf{x}_b$. Allora ϕ_γ è un funzionale di $\mathbf{x}(t)$, che scriveremo come $\phi_\gamma = \phi[\mathbf{x}(t)]$. La somma sui cammini γ andrà poi opportunamente definita.

Postulato 3. Il contributo ϕ_γ di un dato cammino è dato da

$$(14) \quad \phi_\gamma = A \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{x}(t)] \right],$$

dove A è una opportuna costante e $S[\mathbf{x}(t)]$ è la funzione d'azione classica, definita da

$$(15) \quad S[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t] dt.$$

Nella (15) $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ è la lagrangiana classica e l'integrale su t è un integrale di linea fatto lungo il cammino γ .

Facciamo una breve discussione sul significato di questi postulati. Il primo corrisponde all'interpretazione probabilistica della funzione d'onda. Infatti, se $K(b, a)$ coincide col propagatore del § 1, come poi dimostreremo, esso rappresenta la funzione d'onda² calcolata nel punto b della particella che era partita dal punto a .

Il secondo postulato è un'espressione del principio di sovrapposizione degli stati e si può giustificare con un ragionamento che generalizza l'esperimento delle due fenditure schematizzato nella Figura 1.

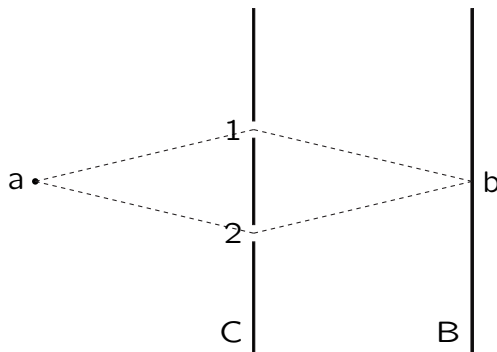


Figura 1

Un fascio di particelle (per es. elettroni) emesse da una sorgente posta in a , attraversa lo schermo C con due fenditure, indicate con 1 e 2, e arriva sullo schermo B , dove gli elettroni vengono rivelati da appositi rivelatori. Ogni elettrone arriva in un ben definito punto-istante b , in accordo con l'ipotesi corpuscolare. Se però si considera la distribuzione di un gran numero di elettroni arrivati sullo schermo, si osserva che questa distribuzione riproduce la figura d'interferenza dell'ottica ondulatoria. Come è noto, la meccanica quantistica spiega questo fenomeno ammettendo che un singolo elettrone non segua un determinato cammino fra a e b , ma abbia una probabilità $P(b)$ di arrivare nel punto b data da

$$P(b) = |\phi_1 + \phi_2|^2,$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono le ampiezze di probabilità che l'elettrone arrivi in b passando rispettivamente dalla fenditura 1 e dalla fenditura 2.

²La funzione $K(b, a)$, come funzione di \mathbf{x}_b , ha norma infinita. Si ha infatti $\int d^3x_b |K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a)|^2 = \int d^3x_b \langle \mathbf{x}_a | U^\dagger(t_b - t_a) | \mathbf{x}_b \rangle \langle \mathbf{x}_b | U(t_b - t_a) | \mathbf{x}_a \rangle = \delta(0) = \infty$. Per avere una funzione d'onda di norma finita occorre mediare $K(b, a)$ con una funzione di L^2 , come avviene nella (5).

Supponiamo ora di inserire fra C e B un ulteriore schermo D con tre fenditure, come mostrato nella Figura 2. In questo caso ognuno dei due cammini precedenti si divide in tre, per cui un elettrone per andare da a a b può seguire 6 cammini diversi.

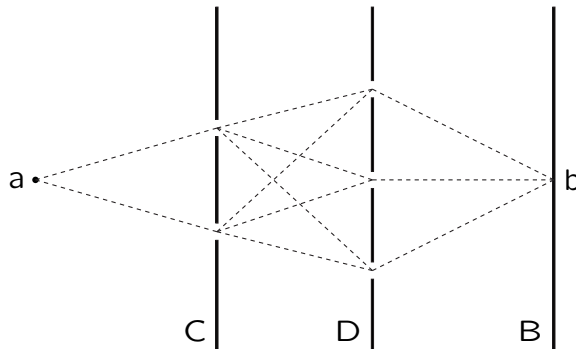


Figura 2

La probabilità $P(b)$ sarà allora espressa dalla formula

$$P(b) = \left| \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} \right|^2.$$

Generalizzando al caso di infiniti schermi fra a e b , ciascuno con infinite fenditure, questo ragionamento suggerisce l'ipotesi che un elettrone per andare da a a b possa seguire una qualunque traiettoria γ e che ognuna di queste contribuisca con un termine ϕ_γ all'ampiezza totale.

Riguardo al terzo postulato, la forma specifica della (14) potrà essere verificata solo dalle applicazioni. Tuttavia questa espressione trova una notevole giustificazione in base al principio di corrispondenza. Con un semplice ragionamento dovuto a Feynman, si può infatti capire perché una particella macroscopica segua la traiettoria classica γ_c . Il contributo ϕ_γ di un generico cammino γ è, secondo la (14), un numero complesso la cui fase S_γ/\hbar è un numero enorme³. Allora, nel fare la somma sui cammini della (13), i contributi di cammini molto vicini su scala macroscopica hanno fasi molto diverse e si elidono fra loro, salvo il caso che la fase sia stazionaria, nel qual caso i contributi si sommano. Come è noto, una proprietà della traiettoria classica è proprio quella di rendere stazionaria l'azione (15). Se ne conclude che l'ampiezza K della (13) riceve contributi solo da un piccolo intorno della traiettoria classica γ_c e dunque, secondo la (12), la probabilità di trovare la particella fuori da γ_c è nulla.

3 La somma sui cammini

Per definire la somma sui cammini consideriamo il caso di una sola dimensione spaziale, per cui un cammino è una linea nel piano (x, t) , che passa per i punti fissi $a \equiv (x_a, t_a)$ e $b \equiv (x_b, t_b)$. Dividiamo l'intervallo temporale $t_b - t_a$ in N intervallini di uguale ampiezza $\epsilon = (t_b - t_a)/N$ e poniamo

$$\begin{cases} t_0 = t_a; & t_r = t_a + r\epsilon, & (r = 1, \dots, N-1); & t_N = t_b; \\ x_0 = x_a; & x_r = x(t_r); & x_N = x_b. \end{cases}$$

³Per un corpo macroscopico e in unità CGS, l'azione S sarà dell'ordine di 1 o di una piccola potenza di 10^{-1} , mentre è $\hbar = 1.05 \times 10^{-27}$ erg s.

Approssimiamo poi il cammino con una spezzata che unisce i punti (x_r, t_r) , con $r = 0, 1, \dots, N$, con tratti rettilinei, come mostrato nella Figura 3.

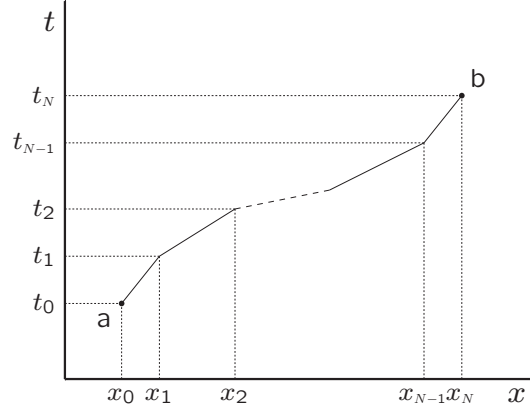


Figura 3

Tutti i possibili cammini si ottengono facendo variare x_1, x_2, \dots, x_{N-1} fra $-\infty$ e $+\infty$ e facendo poi il limite per $N \rightarrow \infty$. L'idea è quindi di definire

$$(16) \quad \sum_{\gamma} \phi_{\gamma} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{r=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_r \right) \phi(x_1, \dots, x_{N-1}).$$

Per realizzarla scriviamo ϕ_{γ} dato dalla (14) come un prodotto di N fattori funzioni delle x_r nel modo seguente:

$$(17) \quad \phi_{\gamma} = \prod_{r=1}^N A_{\epsilon} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_r \right] = A_{\epsilon}^N \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{r=1}^N S_r \right]$$

$$(18) \quad S_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} L(x, \dot{x}) dt = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] dt$$

$$(19) \quad \simeq \epsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_r - x_{r-1}}{\epsilon} \right)^2 - V \left(\frac{x_r + x_{r-1}}{2} \right) \right] = S(x_r, x_{r-1}).$$

La costante A della (14) è stata riscritta nella forma A_{ϵ}^N , dove A_{ϵ} è una costante che dipende da ϵ . Inoltre nel penultimo passaggio si sono usati il teorema della media per l'integrale su t e le approssimazioni $\bar{\dot{x}} = (x_r - x_{r-1})/\epsilon$ e $\bar{x} = (x_r + x_{r-1})/2$, valide per $\epsilon \rightarrow 0$.

Dalle precedenti equazioni si ottiene per l'ampiezza $K(b, a)$ la seguente espressione

$$(20) \quad K(b, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{r=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_r \right) \prod_{i=1}^N A_{\epsilon} e^{\frac{i}{\hbar} S(x_i, x_{i-1})}.$$

La costante A_{ϵ} dovrà essere scelta in modo che il limite per $N \rightarrow \infty$ esista. Questo punto sarà discusso nel § 5 col seguente risultato:

$$(21) \quad A_{\epsilon} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}}.$$

Con questo valore di A_ϵ , il secondo membro della (20) definisce la *somma sui cammini*. Questa espressione viene generalmente chiamata *integrale sui cammini* (path integral), o anche *integrale funzionale* e la si indica col simbolo $\int_a^b \mathcal{D}x(t)$. La (20) si scrive allora simbolicamente

$$(22) \quad K(b, a) = \int_a^b \mathcal{D}x(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right).$$

4 Esempio: la particella libera

Per illustrare in un caso semplice il metodo della somma sui cammini descritto sopra, ci proponiamo di calcolare l'ampiezza di Feynman $K(b, a)$ per una particella libera. Partiamo dalle equazioni (20) e (19) con $V = 0$ e scriviamo

$$(23) \quad K(b, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_\epsilon \prod_{r=1}^{N-1} \left(A_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx_r \right) \exp\left[\frac{im}{2\hbar\epsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \right].$$

Facciamo per primo l'integrale su x_1 , prendendo solo i fattori che dipendono da x_1 e utilizzando la formula

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/4\alpha}, \quad \text{Re } \alpha > 0$$

estesa al limite $\text{Re } \alpha \rightarrow 0+$. Si ottiene allora

$$(25) \quad \begin{aligned} & A_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar\epsilon} [(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2] \right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar\epsilon} [2x_1^2 - 2x_1(x_0 + x_2) + x_0^2 + x_2^2] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{m}{4i\hbar\epsilon}(x_0 + x_2)^2 + \frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_0^2 + x_2^2) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{im}{2 \cdot 2\hbar\epsilon}(x_2 - x_0)^2 \right]. \end{aligned}$$

Facciamo un secondo passo moltiplicando questo risultato per

$$A_\epsilon \exp\left[\frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_3 - x_2)^2 \right]$$

e integrando su x_2 . Si ottiene

$$(26) \quad \begin{aligned} & A_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \exp\left[\frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_3 - x_2)^2 \right] \times \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{im}{4\hbar\epsilon}(x_2 - x_0)^2 \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{4\pi i\hbar\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar\epsilon} \left[\frac{3}{2}x_2^2 - x_2(x_0 + 2x_3) + \left(\frac{1}{2}x_0^2 + x_3^2\right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left[\frac{m}{12i\hbar\epsilon}(x_0 + 2x_3)^2 + \frac{im}{2\hbar\epsilon}\left(\frac{1}{2}x_0^2 + x_3^2\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left[\frac{im}{3 \cdot 2\hbar\epsilon}(x_3 - x_0)^2 \right]. \end{aligned}$$

Dai risultati delle equazioni (25) e (26) si vede che c'è una regola molto semplice che permette di iterare il procedimento delle integrazioni successive. Alla fine delle $N - 1$ integrazioni avremo quindi come risultato

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[\frac{im}{N \cdot 2\hbar\epsilon} (x_N - x_0)^2 \right].$$

Moltiplicando ancora per A_ϵ secondo la (23) e usando le relazioni $N\epsilon = t_b - t_a$, $x_N - x_0 = x_b - x_a$, si ottiene infine per l'ampiezza di Feynman

$$(27) \quad K(b, a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \right].$$

5 Proprietà dell'ampiezza di Feynman

L'ampiezza di Feynman $K(b, a)$ coincide col propagatore definito nel § 1, e questo fatto stabilisce l'equivalenza della meccanica quantistica di Feynman con quella tradizionale. Per provare questa coincidenza dobbiamo dimostrare che l'ampiezza $K(b, a)$ soddisfa alle relazioni (7-9) e (11) del propagatore.

La relazione di simmetria (8) si dimostra facilmente partendo dalle definizioni (13-15). Si vede infatti che la relazione (8) è soddisfatta dal contributo ϕ_γ di ogni singolo cammino, poiché lo scambio di a con b cambia il segno dell'azione (15) e quindi il segno della fase della (14), così come la coniugazione complessa.

Dimostriamo ora la regola di composizione (11), che riscriviamo per semplicità per il caso unidimensionale nella forma

$$(28) \quad K(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_c K(b, c) K(c, a).$$

Supponiamo che sia $t_b > t_c > t_a$, benché questa condizione non sia essenziale. Partendo dalla definizione (20), dividiamo gli N intervallini fra t_a e t_b in M intervallini fra t_a e t_c più $N - M$ intervallini fra t_c e t_b e poniamo $x_M = x_c$. Si vede che la (20) può essere riscritta nella forma

$$(29) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{(N-M) \rightarrow \infty} \left(\prod_{r=1}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_r \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_M \left(\prod_{s=M+1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_s \right) \\ \times \prod_{i=1}^M A_\epsilon e^{\frac{i}{\hbar} S(x_i, x_{i-1})} \prod_{j=M+1}^N A_\epsilon e^{\frac{i}{\hbar} S(x_j, x_{j-1})}.$$

È facile allora riconoscere che questa espressione corrisponde alla (28).

La relazione (9) va intesa come valida nel limite di tempi uguali. Consideriamo allora l'ampiezza $K(b, a)$ per $t_b = t_a + \epsilon$, facendo poi il limite per $\epsilon \rightarrow 0$. Prendiamo allora la (20) per un solo intervallino ϵ , e quindi senza integrazioni intermedie:

$$(30) \quad K(x_b, t_a + \epsilon; x_a, t_a) \simeq A_\epsilon e^{\frac{i}{\hbar} S(x_b, x_a)} = A_\epsilon \exp \left[\frac{im}{2\hbar\epsilon} (x_b - x_a)^2 - \frac{i}{\hbar} \epsilon V \left(\frac{x_b + x_a}{2} \right) \right],$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la (19). Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ il secondo termine nell'esponenziale si può trascurare e si ha

$$(31) \quad K(x_b, t_a; x_a, t_a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon \exp \left[\frac{im}{2\hbar\epsilon} (x_b - x_a)^2 \right].$$

Usiamo ora la seguente rappresentazione della delta di Dirac:

$$(32) \quad \delta(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} e^{-x^2/\eta}.$$

Si vede allora che prendendo per A_ϵ l'espressione (21)

$$A_\epsilon = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}}$$

si ottiene

$$(33) \quad K(x_b, t_a; x_a, t_a) = \delta(x_b - x_a).$$

Resta da dimostrare che $K(b, a)$ obbedisce all'equazione di Schrödinger che, sempre nel caso unidimensionale, ha la forma

$$(34) \quad \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x) \right] K(x, t; x_a, t_a) = 0.$$

Partiamo dall'equazione (28) e poniamo

$$x_b = x, \quad t_b = t + \epsilon; \quad x_c = x - \xi, \quad t_c = t.$$

Per ϵ infinitesimo $K(b, c)$ ha la forma della (30), per cui si ha:

$$(35) \quad K(x, t + \epsilon; a) = A_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2\epsilon} \xi^2 - \epsilon V(x - \frac{1}{2}\xi) \right] \right\} K(x - \xi, t; a).$$

Sviluppiamo il primo membro e il secondo fattore dell'esponenziale al secondo membro fino al primo ordine in ϵ , per cui si ottiene

$$(36) \quad \left(1 + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) K(x, t; a) = A_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left(\frac{im}{2\hbar\epsilon} \xi^2 \right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon V(x - \frac{1}{2}\xi) \right) K(x - \xi, t; a).$$

Osserviamo che, nell'integrale al secondo membro, l'esponenziale fa sì che all'integrale stesso contribuisca solo una piccola regione attorno a $\xi = 0$, con $m\xi^2 \lesssim 2\hbar\epsilon$. Infatti dentro questa regione l'esponenziale è dell'ordine di 1, mentre lontano da questa l'esponenziale è rapidamente oscillante e, moltiplicato per una funzione regolare di ξ , dà un integrale praticamente nullo. Sviluppamo allora gli ultimi due fattori dell'integrando fino al secondo ordine in ξ . Dallo sviluppo del potenziale si avrebbe $V(x) - \frac{1}{2}\xi V'(x)$, ma il secondo termine, moltiplicato per ϵ , contribuirebbe all'integrale con un termine di ordine ϵ^2 e si può quindi trascurare. Il secondo membro della (36) si riduce allora a

$$A_\epsilon [1 - (i\epsilon/\hbar) V(x)] \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left(\frac{im}{2\hbar\epsilon} \xi^2 \right) \left(1 - \xi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) K(x, t; a).$$

Facciamo ora l'integrale su ξ . Il termine lineare in ξ nella parentesi tonda dà zero perché l'integrando è dispari. Per gli altri due termini utilizziamo la (21) e le formule:

$$A_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{im}{2\hbar\epsilon} \xi^2 \right) d\xi = 1; \quad A_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp \left(\frac{im}{2\hbar\epsilon} \xi^2 \right) d\xi = \frac{i\hbar\epsilon}{m}$$

Infine, inserendo il risultato nella (36) e uguagliando i termini del primo ordine in ϵ , si ottiene l'equazione di Schrödinger (34).