Radiazione del corpo nero

1 Generalità sulla radiazione termica

Un corpo solido emette, per effetto dell'agitazione termica degli atomi, una radiazione elettromagnetica, uniformemente distribuita in tutte le direzioni e non polarizzata, con uno spettro continuo che si estende dalle microonde all'ultravioletto e la cui forma ha un aspetto caratteristico che dipende dalla temperatura assoluta.

Indichiamo con $w(\nu, T, \theta) = dE/dt\, d\nu\, dS\, d\Omega$ la densità di energia emessa dal corpo alla temperatura T per unità di tempo e di intervallo di frequenza, dall'unità di superficie nell'unità di angolo solido, in una direzione che forma un angolo θ con la normale alla superficie. Nell'ipotesi che la radiazione sia perfettamente diffusa, la dipendenza da θ è data dalla legge di Lambert:

$$w(\nu, T, \theta) = l(\nu, T) \cos\theta. \tag{1.1}$$

Integrando $l(\nu, T)$ su tutte le frequenze si ottiene l'importante grandezza fotometrica

$$L(T) = \int_0^\infty l(\nu, T)\, d\nu, \tag{1.2}$$

che rappresenta la potenza emessa dall'unità di superficie nella direzione perpendicolare alla superficie stessa e prende il nome di *radianza*[1].

Integrando $w(\nu, T, \theta)$ su tutte le direzioni uscenti dalla superficie del corpo si ottiene il *potere emissivo*

$$\mathcal{E}(\nu, T) = \int w(\nu, T, \theta)\, d\Omega = 2\pi l(\nu, T) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \pi\, l(\nu, T), \tag{1.3}$$

che rappresenta la potenza della radiazione emessa dall'unità di superficie nell'unità di intervallo di frequenza. Esso dipende, oltre che da ν e T, anche dalla natura e dalla forma della superficie.

Quando una radiazione e.m. incide su un corpo, essa viene in parte riflessa sulla superficie e in parte assorbita. Il rapporto fra la densità di energia assorbita e quella incidente viene chiamato *potere assorbente*, ovvero *coefficiente di assorbimento*, e lo indicheremo con $\mathcal{A}(\nu, T)$. Come $\mathcal{E}$, anche $\mathcal{A}$ dipende dalla frequenza ν, dalla temperatura assoluta T e dalla natura della superficie. In base alla definizione, $\mathcal{A}$ è un numero puro compreso fra 0 e 1. Se per una data frequenza si ha $\mathcal{A} = 0$ il corpo è perfettamente riflettente; se invece $\mathcal{A} = 1$ esso è perfettamente assorbente. Il caso ideale di un corpo che abbia $\mathcal{A}(\nu, T) = 1$ per tutte le frequenze prende il nome di *corpo nero.*

[1] $L(T)$ viene anche chiamata *brillanza, luminanza, radiosità* o *splendore.* Essa ha la seguente notevole proprietà, che si ricava dalla (1.1): l'intensità totale della radiazione proveniente da una data sorgente e che arriva in un punto P è data da $I = L\Omega_s$, dove Ω_s è l'angolo solido entro il quale dal punto P si vede la sorgente. Questa formula è valida nelle seguenti tre ipotesi: (i) che L sia costante su tutta la superficie del corpo; (ii) che la sorgente abbia dimensioni piccole rispetto alla distanza dal punto P, in modo che i raggi si possano considerare paralleli; (iii) che si possa trascurare l'assorbimento della radiazione lungo il percorso.

Si dimostra[2] che il rapporto fra il potere emissivo e il potere assorbente

$$\frac{\mathcal{E}(\nu,T)}{\mathcal{A}(\nu,T)} = K(\nu,T) \tag{1.4}$$

non dipende dalla natura o dalla forma della superficie ed è quindi una funzione universale di ν e T. Questo corrisponde all'enunciato della *legge di Kirchhoff*. Poiché $\mathcal{A} = 1$ corrisponde al corpo nero, la (1.4) ci dice che $K(\nu,T)$ rappresenta il *potere emissivo del corpo nero.*

2 Lo spettro del corpo nero

La distribuzione spettrale di $K(\nu,T)$ è mostrata nella figura.

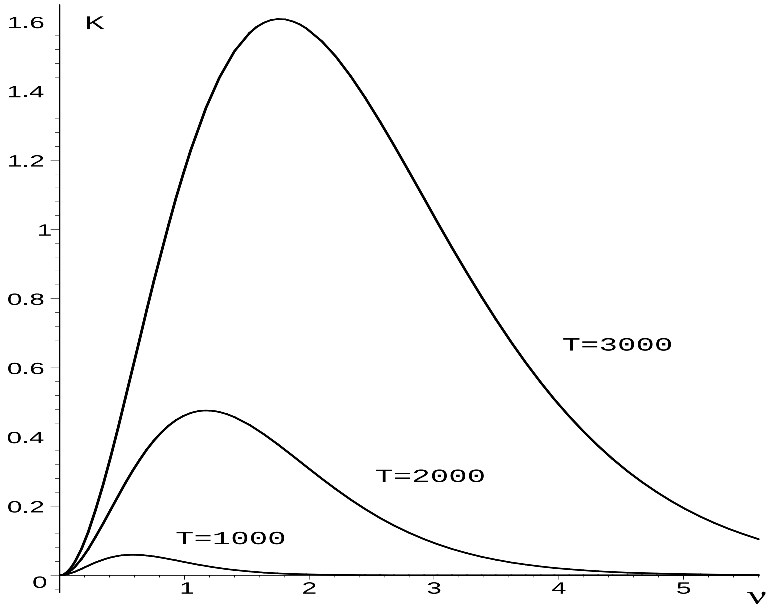

Figura 1. Spettro di emissione del corpo nero. Il potere emissivo $K(\nu,T)$, in unità 10^{-8} J m^{-2}, è riportato in funzione della frequenza ν, in unità di 10^{14} s^{-1}, per le temperature di 1000 °K, 2000 °K e 3000 °K. Poiché la frequenza della luce visibile si estende da circa 4×10^{14} Hz (estremo rosso) fino a circa 7.5×10^{14} Hz (estremo violetto), si vede che fino a temperature di circa 2000 °K (T=1809 °K è la temperatura di fusione del ferro), la radiazione viene emessa in massima parte nella regione infrarossa.

Si vede che K cresce come ν^2 per basse frequenze, ha un massimo per una frequenza ν_{max} dipendente da T e poi decresce esponenzialmente per grandi ν. Al crescere di T, per ν fissato, K cresce in maniera monotòna.

[2] Consideriamo due corpi 1 e 2 alla stessa temperatura T e su di essi due elementi di superficie dS_1 e dS_2, che si guardano e sono alla distanza r. La potenza della radiazione alla frequenza ν emessa dal dS_1 e assorbita dal dS_2 è data da $\mathcal{A}_2(\nu,T)w_1(\nu,T,\theta_1)dS_1 d\Omega_2 = \mathcal{A}_2 l_1 \cos\theta_1 dS_1 \cos\theta_2 dS_2/r^2$. Analogamente la potenza emessa dal dS_2 e assorbita dal dS_1 è data da $\mathcal{A}_1 l_2 \cos\theta_2 dS_2 \cos\theta_1 dS_1/r^2$. Ma all'equilibrio termico queste due quantità devono essere uguali, per cui deve essere $\mathcal{A}_2 l_1 = \mathcal{A}_1 l_2$. Dalla relazione $\mathcal{E} = \pi l$ della (1.3) si ottiene infine $\mathcal{E}_1/\mathcal{A}_1 = \mathcal{E}_2/\mathcal{A}_2 = K$, dove K risulta indipendente dal corpo considerato.

La frequenza $\nu_{max}(T)$ per cui si ha la massima emissione è proporzionale a T, secondo la legge

$$\nu_{max}(T) = CT, \qquad C = 5.879 \times 10^{10} \ \mathrm{s}^{-1}\,{}^\circ\mathrm{K}^{-1} \tag{2.1}$$

nota come *legge di Wien*, o *legge dello spostamento.*

L'area sotto la curva $K(\nu, T)$ corrisponde alla potenza totale emessa dal corpo nero per unità di superficie e dipende da T secondo la *legge di Stefan-Boltzmann*

$$W(T) = \int_0^\infty K(\nu, T)\, d\nu = \sigma T^4 \tag{2.2}$$

dove $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\ \mathrm{Wm}^{-2}\,{}^\circ\mathrm{K}^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann. Le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann si possono ricavare classicamente dalla termodinamica delle radiazioni e sono in ottimo accordo con l'esperienza.

Un buon modello di corpo nero, limitatamente a un elemento di superficie, è rappresentato dal foro d'ingresso di una cavità. Si consideri una cavità all'interno di un corpo solido e vuota di materia, le cui pareti siano alla temperatura T e siano impenetrabili alla radiazione. Sulla parete della cavità vi sia un piccolo foro da cui può passare la radiazione. Le dimensioni lineari del foro siano piccole rispetto a quelle della cavità, in modo da non turbare lo stato di equilibrio della radiazione, ma grandi rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione, in modo da evitare fenomeni di diffrazione. La sezione del foro rappresenta la superficie di un corpo nero, in quanto la radiazione che vi incide dall'esterno entra nella cavità e ne rimane completamente assorbita.

Consideriamo la radiazione che si trova dentro la cavità all'equilibrio termico. Per ogni frequenza essa è costituita dalla somma incoerente di tante onde piane che viaggiano alla velocità c e sono orientate uniformemente in tutte le direzioni. Indicando con $u = u(\nu, T) = dE/dV\, d\nu$ la densità di energia per unità di volume e di intervallo di frequenza, ad essa si può associare, in ogni punto interno alla cavità e per una generica direzione $\boldsymbol{e}$, una densità di corrente per unità di angolo solido $\boldsymbol{j} = u\, c\, \boldsymbol{e}/4\pi$. Allora il flusso della radiazione che esce dal foro della cavità per unità di superficie è dato da

$$\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\, d\Omega = u(\nu, T)\frac{c}{4\pi}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{4}cu(\nu, T), \tag{2.3}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è la normale alla superficie e θ è l'angolo fra $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{n}$. Si riconosce che questo flusso coincide con il potere emissivo del corpo nero, per cui si ha l'importante relazione

$$K(\nu, T) = \frac{c}{4}u(\nu, T) \tag{2.4}$$

che lega il potere emissivo K alla densità di energia della radiazione.

3 Il calcolo dello spettro

Ci proponiamo di calcolare la densità di energia della radiazione $u(\nu, T)$ in equilibrio termico alla temperatura T. Il calcolo si compone di due parti:

(i) la descrizione della radiazione con la determinazione dei gradi di libertà;

(ii) la determinazione della distribuzione statistica di equilibrio.

Consideriamo per semplicità una cavità della forma di un cubo di lato L e prendiamo un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro del cubo e gli assi paralleli agli spigoli. Il campo e.m. nella cavità può essere descritto dal solo potenziale vettore $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$, che obbedisce all'equazione delle onde

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{3.1}$$

e alla condizione di gauge (di Coulomb)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = 0. \tag{3.2}$$

Il campo $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ è definito per $x_i \in [-L/2,+L/2]$ e si può quindi sviluppare in serie di Fourier per ciascuna delle tre variabili x_i ottenendo

$$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3,t) = \sum_{n_1,n_2,n_3=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{a}_{n_1n_2n_3}(t)\exp\left[i\frac{2\pi}{L}(n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3)\right]. \tag{3.3}$$

Ponendo

$$\boldsymbol{n} \equiv (n_1,n_2,n_3); \qquad \boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k_n} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}, \qquad n_i \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

la (3.3) si può riscrivere sinteticamente nella forma

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{a_n}(t)\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{3.5}$$

La (3.1) ci dà per i coefficienti $\boldsymbol{a_n}(t)$ l'equazione

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}}(t) = -c^2k^2\,\boldsymbol{a_n}(t) = -\omega^2\boldsymbol{a_n}(t), \tag{3.6}$$

dove si è posto $\omega = ck$, con $k = |\boldsymbol{k}|$. La (3.6) ha come soluzione

$$\boldsymbol{a_n}(t) = \boldsymbol{a_{n+}}\, e^{i\omega t} + \boldsymbol{a_{n-}}\, e^{-i\omega t}. \tag{3.7}$$

La condizione che $\boldsymbol{A}$ sia reale ci dà per la (3.5) la relazione $\boldsymbol{a}^*_{\boldsymbol{n}}(t) = \boldsymbol{a}_{-\boldsymbol{n}}(t)$, da cui per la (3.7) si ricava $\boldsymbol{a}^*_{\boldsymbol{n}+} = \boldsymbol{a}_{-\boldsymbol{n}-}$. Ponendo ora $\boldsymbol{a_{n-}} = \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_{n+}} = \boldsymbol{a}^*_{-\boldsymbol{n}}$ e cambiando nella sommatoria con $\boldsymbol{a_{n+}}$ $\boldsymbol{n}$ in $-\boldsymbol{n}$, lo sviluppo di $\boldsymbol{A}$ si può riscrivere nella forma

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{a_n}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} + \boldsymbol{a}^*_{\boldsymbol{n}}e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\right], \tag{3.8}$$

che risulta reale a vista.

A questo punto, la condizione di gauge (3.2) diventa

$$\boldsymbol{k_n}\cdot\boldsymbol{a_n} = 0, \tag{3.9}$$

vale a dire che per ogni terna di numeri (n_1,n_2,n_3), per cui $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_n}$ risulta fissato, $\boldsymbol{a_n}$ deve essere ortogonale a $\boldsymbol{k}$. Fissiamo allora nel piano ortogonale a $\boldsymbol{k}$ una coppia di versori ortogonali

${\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}}^{(1)}$ ed ${\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}}^{(2)}$, in modo che $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{(2)}$ e $\boldsymbol{k}/k$ formino una terna di versori ortogonali, congruente con quella degli assi coordinati. Allora $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}$ si potrà scrivere come combinazione di $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{(1)}$ e $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{(2)}$ nella forma

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\lambda=1}^{2} a_{\boldsymbol{n}}^{(\lambda)}\, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{(\lambda)}. \tag{3.10}$$

Infine per il campo $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ si ottiene lo sviluppo

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{2} a_{\boldsymbol{n}}^{(\lambda)} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{(\lambda)} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot x-\omega t)} + \text{c.c.}, \tag{3.11}$$

dove c.c. indica il complesso coniugato. Quello della (3.11) viene chiamato lo sviluppo nei *modi normali.* Il termine generico dello sviluppo è un'onda piana di ampiezza (complessa) $a_{\boldsymbol{n}}^{(\lambda)}$, polarizzazione $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{(\lambda)}$, vettore di propagazione $\boldsymbol{k}$ e pulsazione ω.

Le funzioni $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{(\lambda)} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot x-\omega t)}$, per dati valori di $\boldsymbol{n}$ e λ, sono soluzioni delle equazioni (3.1) e (3.2) e il loro insieme costituisce una base ortogonale di funzioni, nella quale una generica soluzione $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ può essere sviluppata.

Il fatto che il dominio di $\boldsymbol{x}$ sia il cubo di volume finito $V = L^3$ ha la notevole conseguenza che questa base risulta numerabile. Infatti un elemento della base è caratterizzato dalla quaterna di numeri interi (n_1, n_2, n_3, λ), dove $n_i \in \mathbb{Z}$ e $\lambda = 1, 2$. A ogni quaterna corrisponde un grado di libertà, che corrisponde a un modo normale di oscillazione del campo.

Mentre a un dato campo $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ corrisponde un ben definito sviluppo (3.11), la radiazione termica della cavità va pensata come una sovrapposizione incoerente di campi, che può essere descritta assegnando ai vari modi di oscillazione solo dei pesi statistici, che saranno fissati dalle leggi della meccanica statistica.

Dato che i gradi di libertà sono del tutto indipendenti fra loro e supponendo che a modi di oscillazione con la stessa frequenza corrisponda in media la stessa energia, la densità di energia $u(\nu, T)$ si potrà scrivere come il prodotto di due fattori:

$$u(\nu, T) = \rho(\nu) w(\nu, T), \tag{3.12}$$

dove

$$\rho(\nu) = \frac{dN}{dV\, d\nu} \tag{3.13}$$

rappresenta il numero di modi di oscillazione per unità di volume e per unità di intervallo di frequenza e $w(\nu, T)$ è l'energia media che compete a un singolo modo di oscillazione con frequenza ν all'equilibrio termico alla temperatura T.

Per calcolare $\rho(\nu)$ osserviamo che nello spazio dei numeri d'onde, riferito agli assi k_i, i modi normali del campo, con i valori di k_i dati dalla (3.4), formano un reticolo cubico con passo reticolare pari a $2\pi/L$. Ad ogni nodo del reticolo corrispondono due modi distinti, per i due possibili valori di λ. Si hanno quindi due modi per ogni cella di volume $(2\pi/L)^3$, per cui si ha una densità di modi normali data da

$$\frac{dN}{d^3k} = 2\,(2\pi/L)^{-3} = \frac{2V}{(2\pi)^3}, \tag{3.14}$$

ovvero il numero di modi contenuti nell'elemento di volume d^3k è dato da

$$dN = \frac{2V}{(2\pi)^3} d^3k. \tag{3.15}$$

Dalla relazione $\nu = \omega/2\pi = ck/2\pi$ si vede che ν dipende soltanto dal modulo di $\boldsymbol{k}$. Scrivendo allora l'elemento di volume in coordinate sferiche come $d^3k = k^2 dk\, d\Omega_{\boldsymbol{k}}$ e integrando su tutte le direzioni di $\boldsymbol{k}$ si ottiene

$$dN = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi\, k^2\, dk = \frac{8\pi}{c^3} V\, \nu^2\, d\nu. \tag{3.16}$$

Dalla definizione (3.13) si ricava allora

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2. \tag{3.17}$$

L'energia media $w(\nu, T)$ si può calcolare con la meccanica statistica. I modi normali del campo e.m., corrispondenti alle onde piane $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot x - \omega t)}$, possono essere assimilati a oscillatori armonici meccanici con pulsazione ω. Classicamente un oscillatore armonico può avere qualunque energia $E \geq 0$. Vale allora il principio di equipartizione dell'energia (cinetica), secondo il quale ad ogni grado di libertà del sistema compete un'energia cinetica media pari a $\frac{1}{2}kT$, dove k è la costante di Boltzmann. Poiché per un oscillatore armonico l'energia totale è il doppio dell'energia cinetica media, secondo la fisica classica si ha[3]

$$w(\nu, T) = kT \tag{3.18}$$

per qualunque frequenza ν. Dalle (3.12), (3.17) e (3.18) si ottiene allora per $u(\nu, T)$ la classica formula di Rayleigh-Jeans:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} kT\, \nu^2. \tag{3.19}$$

Questa espressione è in buon accordo qualitativo con l'esperienza per le basse frequenze, ma risulta manifestamente errata sia per le medie frequenze, dove non presenta nessun massimo nello spettro, sia per le alte frequenze, dove tende a divergere anziché andare a zero. Anche la potenza totale W emessa dal corpo nero e data dalla (2.2) sarebbe infinita. Questa divergenza, dovuta al contributo delle alte frequenze, prende il nome di *catastrofe ultravioletta.*

4 La formula di Planck

La soluzione del problema dello spettro fu data da Planck nel 1900, con l'introduzione della prima ipotesi quantistica. Egli suppose che lo scambio di energia fra la radiazione e le pareti della cavità non avvenga con continuità, ma per quantità discrete, i famosi *quanti di energia.* Questo corrisponde a supporre che l'energia di ciascun oscillatore e.m. possa assumere

[3] La (3.18) si può ricavare più in generale dalla distribuzione di Boltzmann, che vale per un sistema qualsiasi, con l'unica ipotesi che l'energia E sia ≥ 0 e abbia uno spettro continuo.

solo valori discreti. In particolare Planck ipotizzò che i valori dell'energia di un oscillatore di frequqnza ν siano dati dalla formula[4]

$$E_n = nh\nu, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{4.1}$$

dove $h = 6.626 \times 10^{-34}\,$Js è una costante fondamentale, che prende il nome di *costante di Planck*.

Nel bagno termico alla temperatura T, la probabilità che l'oscillatore abbia l'energia E_n è data dalla distribuzione di Boltzmann:

$$P_n = N\,e^{-\beta E_n} = N\,e^{-n\beta h\nu}, \tag{4.2}$$

dove si è posto $\beta = 1/kT$ e N è la costante di normalizzazione, tale che

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = N \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu}. \tag{4.3}$$

Sommando la serie geometrica si ottiene

$$N = 1 - e^{-\beta h\nu}. \tag{4.4}$$

Per l'energia media dell'oscillatore si ottiene allora

$$\begin{aligned} w(\nu, T) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n = Nh\nu \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\beta h\nu} = -N \frac{\partial}{\partial\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} \\ &= -N \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{1}{N} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dalle (3.12) e (3.17) si ricava infine per la densità di energia la famosa *formula diPlanck*

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} \tag{4.6}$$

e dalla (2.4) si ha per il potere emissivo del corpo nero[5]

$$K(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1}. \tag{4.7}$$

Osserviamo che nel limite $h \to 0$, per cui lo spettro dell'energia (4.1) diventa continuo, la (4.6) tende alla formula classica (3.19). Lo stesso accade per basse frequenze o per alte temperature,

[4] La trattazione quantistica corretta dell'oscillatore armonico dà per l'energia i valori $E_n = (n + \frac{1}{2})h\nu$. L'energia minima non può essere zero a causa del principio di indeterminazione. Tuttavia l'aggiunta nella (4.1) del termine $E_0 = \frac{1}{2}h\nu$ non modifica il risultato della presente trattazione.

[5] Talvolta il potere emissivo o la densità di energia vengono espressi in funzione della lunghezza d'onda λ. Consideriamo il potere emissivo e indichiamo con $\widetilde{K}(\lambda, T)$ quello espresso in funzione di λ. La relazione fra $\widetilde{K}$ e K si ottiene uguagliando la potenza emessa nell'intervallo corrispondente, imponendo cioè che sia $\widetilde{K}(\lambda, T)d\lambda = K(\nu, T)d\nu = K(c/\lambda, T)(c/\lambda^2)d\lambda$, da cui segue $\widetilde{K}(\lambda, T) = (c/\lambda^2)K(c/\lambda, T)$. La (4.7) diventa allora per $\widetilde{K}$:

$$\widetilde{K}(\lambda, T) = 2\pi c^2 h \lambda^{-5} \left(e^{\beta hc/\lambda} - 1\right)^{-1}.$$

e in generale quando il parametro $h\nu/kT$ è $\ll 1$. Viceversa per frequenze $\nu > kT/h$ la (4.6) ha un andamento del tutto diverso dalla (3.19) e riproduce lo spettro descritto nel § 2.

Si verifica facilmente che la (4.7) obbedisce alla legge di Wien (2.1), con la costante C data da

$$C = xk/h, \tag{4.8}$$

dove x è la radice dell'equazione trascendente $(3-x)e^x - 3 = 0$ e vale $x \approx 2.82144$. Si verifica inoltre che la (4.7) soddisfa alla legge di Stefan-Boltzmann (2.2), con la costante σ data da

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15\, c^2 h^3}. \tag{4.9}$$

Con i valori sperimentali di C e σ noti a quell'epoca, nel 1900 Planck riuscì a calcolare i valori delle costanti h e k (quest'ultima nota solo come ordine di grandezza) con uno scarto di circa il 2% rispetto ai valori attuali.