# Rotazioni e momento angolare

g.longhi

a.a. 2003-2004

# Indice

# Capitolo 1

# Rotazione attorno ad un asse fisso

## 1.1 Rotazione di un vettore

Vogliamo studiare come varia un vettore $\vec{v}$ quando viene ruotato attorno ad un asse fisso, definito da un versore $\hat{n}$, di un angolo $\psi$ positivo, cioè in senso antiorario (vedi la figura (1.1)), come visto da $\hat{n}$ (n.b. con $\hat{}$ indichiamo sempre un versore). Indichiamo il vettore ruotato con $\vec{v}'$.

Se $\vec{v}_\perp$, $\vec{v}_\parallel$ e $\vec{v}'_\perp$, $\vec{v}'_\parallel$ sono le parti perpendicolare e parallela di $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ rispettivamente rispetto a $\hat{n}$, si ha

$$\vec{v}'_\perp = v'_\perp(\cos\psi\ \hat{v}_\parallel + \sin\psi\ (\hat{n}\wedge\hat{v})), \tag{1.1}$$

ma si ha anche

$$\mid \vec{v}_\perp \mid = \mid \vec{v}'_\perp \mid, \tag{1.2}$$

e inoltre

$$\hat{n}\wedge\vec{v} = \hat{n}\wedge\vec{v}_\perp, \tag{1.3}$$

$$\mid \hat{n}\wedge\vec{v}_\perp \mid = v_\perp. \tag{1.4}$$

$$\tag{1.5}$$

Quindi

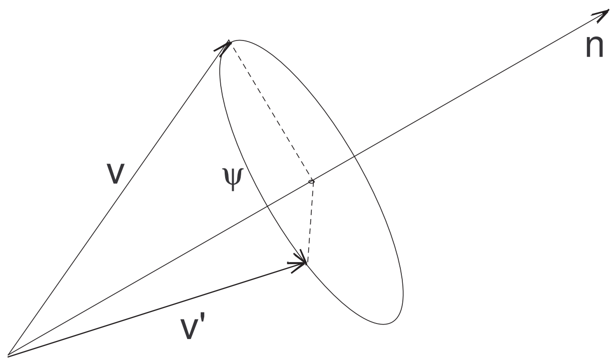


Figura 1.1:

$$\vec{v}'_\perp = \cos\psi\ \vec{v}_\perp + \sin\psi\ (\hat{n} \wedge \vec{v}), \tag{1.6}$$

e, poiché

$$\vec{v}'_\parallel = \vec{v}_\parallel = (\vec{v} \cdot \hat{n})\ \hat{n}, \tag{1.7}$$

si ha infine

$$\vec{v}' = \cos\psi\ \vec{v} + (1 - \cos\psi)(\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + \sin\psi\ \hat{n} \wedge \vec{v}. \tag{1.8}$$

Questa relazione descrive una rotazione dal punto di vista **attivo** (vedi la Sezione seguente).

Se si fissa un riferimento Cartesiano e si pone

$$\vec{v}' = R(\psi, \hat{n})\ \vec{v}, \tag{1.9}$$

si ha

$$R_{ij}(\psi, \hat{n}) = \cos\psi\ \delta_{ij} + (1 - \cos\psi) n_j n_j + \sin\psi\ \epsilon_{ikj} n_k, \tag{1.10}$$

dove si suppone assegnata una terna ortonormale destra di versori $\{\hat{e}_i\}$, con $(i, j = 1, 2, 3)$, per cui $\vec{v} = v_i\ \hat{e}_i$ e $\hat{n} = n_i\ \hat{e}_i$.

Si verifica facilmente che

$$R(\psi_1, \hat{n}) R(\psi_2, \hat{n}) = R(\psi_1 + \psi_2, \hat{n}). \tag{1.11}$$

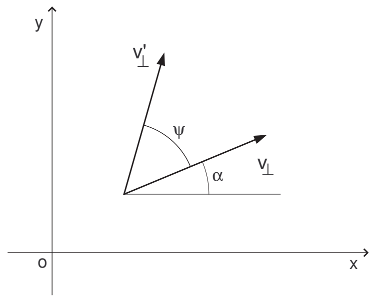


Figura 1.2:

Le espressioni di $R$ per i casi particolari in cui $\hat{n} = \hat{e}_i$, con $(i = 1, 2, 3)$ sono

$$R(\psi, \hat{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

$$R(\psi, \hat{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

$$R(\psi, \hat{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Consideriamo per esempio $R(\psi, \hat{e}_3)$. Nella figura (1.2) è rappresentato il piano $(x,\ y)$ e si vede che

$$\begin{aligned} \vec{v}' = & \; v'_\perp \cos(\alpha + \psi)\hat{e}_1 + v'_\perp \sin(\alpha + \psi)\hat{e}_2 + v'_3\hat{e}_3 = \\ = & \; v_\perp(\cos\alpha\cos\psi - \sin\alpha\sin\psi)\hat{e}_1 + v_\perp(\sin\alpha\cos\psi + \cos\alpha\sin\psi)\hat{e}_2 + v'_3\hat{e}_3 \\ = & \; (v_1\cos\psi - v_2\sin\psi)\hat{e}_1 + (v_1\sin\psi + v_2\cos\psi)\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3, \end{aligned}$$

dove $\vec{v}'_\perp$ è la proiezione di $\vec{v}'$ sul piano $(x,\ y)$ che è uguale in modulo alla proiezione di $\vec{v}$. La terza componente resta naturalmente invariata.

L'equazione precedente si può scrivere

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cos\psi - v_2 \sin\psi \\ v_1 \sin\psi + v_2 \cos\psi \\ v_3 \end{pmatrix} = R(\psi, \hat{e}_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad (1.15)$$

e si riconosce la forma (1.14) della matrice di trasformazione.

## 1.2 Punto di vista attivo e passivo

Si dice che si adotta il punto di vista **attivo** quando si applica una trasformazione (nel nostro caso una rotazione) al sistema fisico in esame. Le varie grandezze definite su questo sistema, scalari, vettoriali ecc., avranno componenti assegnate rispetto ad un dato sistema di riferimento dato, mantenuto fisso. Queste componenti assumeranno dopo la rotazione valori diversi, funzioni delle componenti iniziali.

Se invece si trasforma il sistema di riferimento, mantenendo fisso il sistema, le varie grandezze restano invariate, ma cambiano le loro componenti. Questo punto di vista è detto **passivo**.

Più precisamente sia $v$ un vettore di uno spazio lineare e $\{\hat{e}_i\}$ una base, eventualmente ortonormale se è dato anche un prodotto scalare $(\ ,\ )$.

Lo sviluppo di $\vec{v}$ sulla base $\{\hat{e}_i\}$ sia dato da

$$v = e_i v_i. \qquad (1.16)$$

Sia ora $A$ una trasformazione lineare

$$v \underset{A}{\longrightarrow} v' = Av, \qquad (1.17)$$

dove $v'$ avrà uno sviluppo sulla **stessa** base $\{e_i\}$:

$$v' = e_i v_i'. \qquad (1.18)$$

In particolare, i vettori della base, in quanto vettori dello spazio, saranno trasformati con la stessa legge (1.17)

$$e_i \underset{A}{\longrightarrow} e_i' = Ae_i, \tag{1.19}$$

e i versori $e_i'$ potranno essere sviluppati anch'essi sulla base iniziale:

$$Ae_i = e_i' = e_j A_{ji}. \tag{1.20}$$

Questa relazione definisce i coefficienti $A_{ji}$, che dipendono solo da $A$ e dalla scelta della base $\{e_i\}$. Sono gli elementi di matrice della trasformazione $A$.

Se in particolare esiste un prodotto scalare ( , ), e se per semplicità consideriamo uno spazio lineare reale, si ha

$$(e_k,\ Ae_i) = (e_k,\ e_i') = (e_k,\ e_j)A_{ji} \tag{1.21}$$

e se la base $\{e_i\}$ è ortonormale, cioè

$$(e_k,\ e_j) = \delta_{kj}, \tag{1.22}$$

si ha

$$(e_k,\ Ae_i) = A_{ki}. \tag{1.23}$$

Usando la definizione della matrice $\parallel A_{ji} \parallel$ (1.20), si ha

$$v' = Av = A(e_i v_i) = A(e_i)v_i \tag{1.24}$$

per la linearità di $A$, e quindi

$$v' = e_i' v_i = e_i A_{ij} v_j = e_i v_i', \tag{1.25}$$

per cui

$$v_i' = A_{ij} v_j. \tag{1.26}$$

L'equazione (1.26), insieme con la definizione (1.18), esprime il punto di vista **attivo**.

Il punto di vista **passivo** consiste nel trasformare, con la trasformazione inversa $A^{-1}$, la **base**, lasciando invariato $v$:

$$v = e_i v_i = e_i (A^{-1})_{ik} (A)_{kj} v_j = A^{-1}(e_k) v'_k \tag{1.27}$$

dove si sono usate la (1.20) e la (1.26).

Si vede che , rispetto alla nuova base $\tilde{e}_i$, definita da

$$\tilde{e}_i = A^{-1} e_i = e_j (A^{-1})_{ji}, \tag{1.28}$$

le componenti di $v$ sono le stesse delle componenti di $Av$ rispetto alla base $\{e_i\}$

$$v'_k = A_{ki} v_i, \tag{1.29}$$

cioè $v$ appare rispetto al nuovo riferimento come $v'$ rispetto al vecchio.

## 1.3 Proprietà della matrice di rotazione

Poniamo

$$R(\psi, \hat{n}) = \cos\psi \ \mathbf{1} + (1 - \cos\psi) \ \mathbf{N} + \sin\psi \ \mathbf{I}, \tag{1.30}$$

con

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{pmatrix}, \tag{1.31}$$

che è una matrice simmetrica, e

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

che è antisimmetrica.

In componenti

$$\mathbf{R}_{ij} = n_i n_j, \qquad \mathbf{I}_{ij} = \epsilon_{ikj} n_k. \tag{1.33}$$

Si verificano facilmente le seguenti proprietà di $\mathbf{N}$ e $\mathbf{I}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}^2 &= \mathbf{N}, \\
\mathbf{I}\,\mathbf{N} = \mathbf{N}\,\mathbf{I} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{I}^2 &= \mathbf{N} - \mathbf{1},
\end{aligned} \tag{1.34}
$$

e inoltre

$$
\mathrm{Tr}\ \mathbf{N} = 1, \quad \mathrm{Tr}\ \mathbf{I} = 0. \tag{1.35}
$$

e, in particolare, segue dalle precedenti

$$
\mathbf{I}^3 = -\mathbf{I}. \tag{1.36}
$$

**a**)-Con l'uso delle (1.34) si verifica facilmente che si ha

$$
R(\psi, \hat{n}) R^T(\psi, \hat{n}) = R^T(\psi, \hat{n}) R(\psi, \hat{n}) = \mathbf{1}, \tag{1.37}
$$

cioè $R$ è una matrice **ortogonale**.

Più in generale, la trasformazione determinata da una qualsiasi matrice ortogonale $R \in O(3)$ ($O(3)$ è l'insieme delle matrici reali ortogonali e quindi non singolari, 3x3, che formano un gruppo, il gruppo delle rotazioni) conserva i prodotti scalari e rappresenta una rotazione. Se infatti $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono due vettori con componenti $x_i$ e $y_i$ rispetto ad una base $\{\hat{e}_i\}$ ortonormale, si ha

$$
\vec{x} \cdot \vec{y} = (\hat{e}_i x_i,\ \hat{e}_j y_j) = x_i y_j (\hat{e}_i,\ \hat{e}_j) = x_i y_i \rightarrow R_{ij} x_j R_{ik} y_k = \tag{1.38}
$$

$$
= (\sum_i R_{ij} R_{ik}) x_j y_k = \delta_{jk} x_j y_k = x_j y_j. \tag{1.39}
$$

$$
\tag{1.40}
$$

Viceversa, se per qualunque $\vec{x}$ e $\vec{y}$ si ha

$$
\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}' \cdot \vec{y}', \tag{1.41}
$$

con

$$
\vec{x}' = R\vec{x}, \quad \text{e} \quad \vec{y}' = R\vec{y}, \tag{1.42}
$$

allora $R$ è ortogonale. Infatti

$$x'_i y'_i = R_{ij} x_j R_{ik} y_k = (\sum_i R_{ij} R_{ik}) x_j y_k = x_j y_j, \tag{1.43}$$

ma essendo $x_j$ e $y_j$ arbitrari, segue

$$\sum_i R_{ij} R_{ik} = (RR^T)_{jk} = \delta_{jk}, \tag{1.44}$$

cioè $RR^T = 1$, come si voleva dimostrare.

**b**)-Si può verificare che $\hat{n}$ è invariante sotto l'azione di $R(\psi, \hat{n})$, per qualunque $\psi$, com'è ovvio che sia. Infatti

$$R(\psi, \hat{n})\hat{n} = \cos\psi \hat{n} + (1 - \cos\psi)\hat{n}^2 \hat{n} + \sin\psi \ \hat{n} \wedge \hat{n} = \hat{n}. \tag{1.45}$$

Viceversa, se

$$\vec{v}' = R(\psi, \hat{n})\vec{v} = \vec{v}, \tag{1.46}$$

cioè

$$\cos\psi \ \vec{v} + (1 - \cos\psi)(\hat{n} \cdot \vec{v})\hat{n} + \sin\psi \ \hat{n} \wedge \vec{v} = \vec{v}, \tag{1.47}$$

da cui

$$\sin\psi \ \hat{n} \wedge \vec{v} = (1 - \cos\psi)[\vec{v} - (\hat{n} \cdot \vec{v})\hat{n}]. \tag{1.48}$$

Poiché $\hat{n} \wedge \vec{v}$ è perpendicolare al piano sotteso da $\hat{n}$ e $\vec{v}$ e poiché $\vec{v} - (\hat{n} \cdot \vec{v})$ giace nel piano $(n, v)$, si ha, con $\psi$ arbitrario

$$\begin{cases} \hat{n} \wedge \vec{v} = 0, \\ \vec{v} - (\hat{n} \cdot \vec{v}) \ \hat{n} = 0, \end{cases} \tag{1.49}$$

cioè $\vec{v}$ è parallelo a $\hat{n}$.

**c**)-Dalla (1.30) si ha

$$\mathrm{Tr} \ R(\psi, \hat{n}) = 1 + 2\cos\psi, \tag{1.50}$$

cioè

$$\cos\psi = \frac{1}{2}[\mathrm{Tr}\ R(\psi, \hat{n}) - 1], \tag{1.51}$$

che determina l'angolo $\psi$ data la $R$, a meno del segno, con $\psi$ definito in $(-\pi, \pi)$.

Sempre dalla (1.10) si ha

$$\begin{aligned}
R_{ij}\epsilon_{ijm} &= \sin\psi\ \epsilon_{ikj}n_k\epsilon_{ijm} = \\
&= -\sin\psi\ (\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm})n_k = -\sin\psi\ (2\delta_{km})n_k = \\
&= -2\sin\psi\ n_m
\end{aligned}$$

cioè

$$n_i = -\frac{1}{2\sin\psi} R_{jk}\epsilon_{jki}, \tag{1.52}$$

che determina $\hat{n}$, dati $\psi$ e $R$.

In definitiva, le equazioni (1.51) e (1.52) determinano $\hat{n}$ e $\psi$ data $R$. Sono cioè l'inversione della (1.10).

**d**)-Se $\rho \in O(3)$ si ha

$$\rho R(\psi,\ \hat{n})\rho^{-1} = R(\psi,\ \rho\hat{n}), \tag{1.53}$$

che ci dice come cambia $R$ se si cambia l'asse di rotazione.

Infatti si verifica che $\rho\hat{n}$ è invariante sotto l'azione della matrice $\rho R\rho^{-1}$:

$$(\rho R(\psi,\ \hat{n})\rho^{-1})(\rho\hat{n}) = \rho R(\psi,\ \hat{n})\hat{n} = \rho\hat{n}. \tag{1.54}$$

Quindi $\rho R\rho^{-1}$, che è una rotazione in quanto è ortogonale ( poiché $\rho \in O(3)$ si ha $\rho^{-1} = \rho^T$ da cui segue facilmente l'ortogonalità di $\rho R\rho^{-1}$), lascia invariante $\rho\hat{n}$.

Si ha inoltre che $\rho\hat{n}$ è un versore, infatti

$$(\rho\hat{n}, \rho\hat{n}) = (\hat{n},\ \rho^\star\rho\hat{n}) = (\hat{n}, \rho^T\rho\hat{n}) = (\hat{n},\ \hat{n}) = 1. \tag{1.55}$$

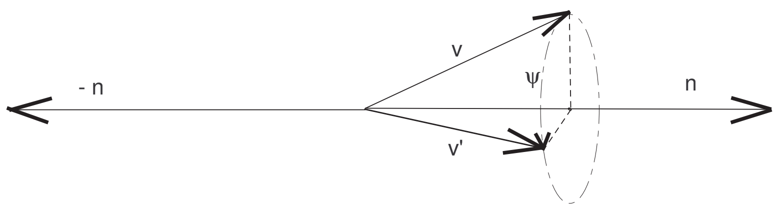


Figura 1.3:

Ne segue che $\rho R \rho^{-1}$ è una rotazione attorno $\rho\hat{n}$. Inoltre l'angolo $\psi$ è invariante sotto la trasformazione $\rho R \rho^{-1}$ , come si vede dalla (1.50), tenuto conto del fatto che la traccia è invariante sotto una trasformazione di similitudine, qual'è la (1.53).

In definitiva abbiamo che $\rho R(\psi,\ \hat{n})\rho^{-1}$ è una rotazione attorno al vettore $\rho\hat{n}$, che è il suo asse fisso, di un angolo $\psi$. Quindi vale la (1.53).

**e**)-Dalle (1.30), (1.31) e (1.32) segue

$$R^T(\psi,\ \hat{n}) = R(\psi,\ -\hat{n}), \tag{1.56}$$

ovvero

$$\mathbf{I}(-\hat{n}) = -\mathbf{I}(\hat{n}) = \mathbf{I}^T(\hat{n}), \tag{1.57}$$

e, per la (1.37),

$$R^{-1}(\psi,\ \hat{n}) = R(\psi,\ -\hat{n}) = R(-\psi,\ \hat{n}). \tag{1.58}$$

L'ultima uguaglianza è ovvia se si osserva la figura (1.3)

# Capitolo 2

# Angoli di Eulero

Un'altro modo di parametrizzare una rotazione è mediante gli angoli di Eulero. Questi definiscono la rotazione di un sistema di assi ortogonali. Seguendo il punto di vista **attivo** questo sistema di assi, che costituisce esso stesso un corpo rigido, si può pensare come il sistema che viene ruotato.

Una rotazione generica si ottiene con tre rotazioni successive:

**a)-** di un angolo $\alpha$ attorno all'asse $z$, col che l'asse $y$ va in un nuovo asse $n$, detto asse dei nodi,

**b)-** di un angolo $\beta$ attorno a $n$,

**c)-** di un angolo $\gamma$ attorno al nuovo asse $z'$ ottenuto dall'asse $z$ con la rotazione precedente.

Queste rotazioni successive sono indicate nella figura (2.1).

$$R(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = R(\gamma,\ \hat{z}')R(\beta,\ \hat{n})R(\alpha,\ \hat{z}). \tag{2.1}$$

Nella (2.1) $\hat{z}$ e $\hat{z}'$ sono i versori dei corrispondenti assi.

Si può esprimere $R(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ in termini delle rotazioni attorno agli assi originari, indicati da $(\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z})$. L'espressione che cosí si ottiene è molto più comoda della (2.1).

Per far ciò osserviamo che la rotazione attorno all'asse $\hat{n}$ si può riscrivere

$$R(\beta, \hat{n}) = R(\alpha,\ \hat{z})R(\beta,\ \hat{y})R^{-1}(\alpha,\ \hat{z}), \tag{2.2}$$

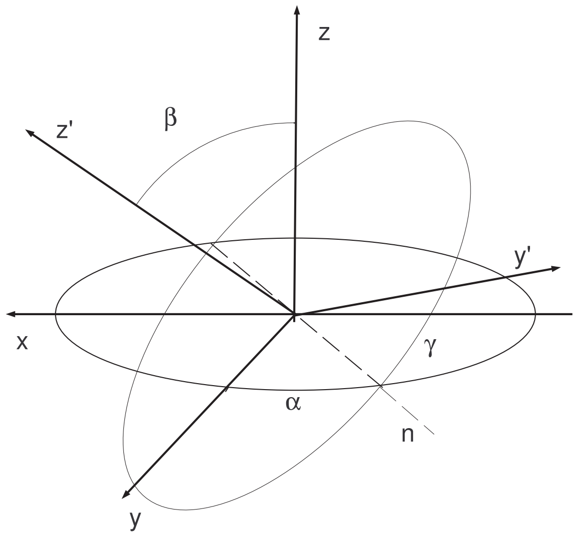


Figura 2.1: Angoli di Eulero

che ha il significato di riportare l'asse $\hat{n}$ nella posizione originaria, cioè coincidente con l'asse $\hat{y}$, di effettuare una rotazione di un angolo $\beta$ attorno all'asse $y$ stesso e poi di riportare l'asse $\hat{y}$ a coincidere con l'asse $\hat{n}$.

Analogamente si può scrivere

$$R(\gamma,\ \hat{z}') = R(\beta,\ \hat{n})R(\alpha,\ \hat{z})R(\gamma,\ \hat{z})R^{-1}(\alpha,\ \hat{z})R^{-1}(\beta,\ \hat{n}). \tag{2.3}$$

Sostituendo la (2.2) nella (2.1) si ha

$$R(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = R(\beta,\ \hat{n})R(\alpha,\ \hat{z})R(\gamma,\ \hat{z})R^{-1}(\alpha,\ \hat{z})R^{-1}(\beta,\ \hat{n})R(\beta,\ \hat{n})R(\alpha,\ \hat{z}), \tag{2.4}$$

che, semplificando, si riduce a

$$R(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = R(\beta,\ \hat{n})R(\alpha,\ \hat{z})R(\gamma,\ \hat{z}). \tag{2.5}$$

Sostituendo ora la (2.2) nella precedente e semplificando si ha infine

$$R(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = R(\alpha,\ \hat{z})R(\beta,\ \hat{y})R(\gamma,\ \hat{z}), \tag{2.6}$$

che è l'espressione cercata.

Usando le (1.12), (1.13) e (1.14) si può calcolare la $R(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$:

$$R(\alpha,\ \beta,\ \gamma) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma; & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma; & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma; & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma; & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma; & \sin\beta\sin\gamma; & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Casi particolari sono:

$$R(0,0,0) = \mathbf{1}, \tag{2.8}$$

$$R(\alpha,0,0) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

che è una rotazione di un angolo $\alpha$ attorno all'asse $z$,

$$R(-\frac{\pi}{2},\beta,+\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

che è una rotazione di un angolo $\beta$ attorno all'asse $x$.

Si verifica facilmente che vale

$$R(\alpha,0,\gamma) = R(\alpha+\gamma,0,0) = R(0,0,\alpha+\gamma). \tag{2.11}$$

La $R(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ data dalla (2.7) si può identificare con la (1.10) per determinare la relazione che passa tra gli angoli di Eulero e la parametrizzazione mediante $\psi,\ \hat{n}$.

Uguagliando le tracce della (1.10) e della (2.7) e usando la (1.50), si ha

$$1 + 2\cos\psi = (1+\cos\beta)\cos(\alpha+\gamma) + \cos\beta. \tag{2.12}$$

Si ha poi dalla (1.10) o dalla (1.30)

$$R_{21} - R_{12} = 2\sin\psi\ n_3, \tag{2.13}$$

e dalla (2.7)

$$R_{21} - R_{12} = (1+\cos\beta)\sin(\alpha+\gamma), \tag{2.14}$$

e analoghe espressioni per le altre componenti di $R$.

In definitiva si ha

$$\begin{aligned} 2\sin\psi\ n_1 &= R_{32} - R_{23} = -\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma, \\ 2\sin\psi\ n_2 &= R_{13} - R_{31} = \cos\alpha\sin\beta + \sin\beta\cos\gamma, \\ 2\sin\psi\ n_3 &= R_{21} - R_{12} = (1+\cos\beta)\sin(\alpha+\gamma), \end{aligned} \tag{2.15}$$

che esprimono la relazione tra gli angoli di Eulero e la parametrizzazione $(\psi,\ \hat{n})$.

# Capitolo 3

# Rotazioni infinitesime

Poniamo nella (1.8) $\psi = \varepsilon$ infinitesimo. Al primo ordine in $\varepsilon$ si ha

$$\vec{v}' = \vec{v} + \varepsilon \hat{n} \wedge \vec{v}, \tag{3.1}$$

o anche

$$(\vec{v}')_i = (\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{I})_{ij} v_j. \tag{3.2}$$

Consideriamo ora una partizione dell'intervallo $(0, \psi)$ in $n$ subintervalli tale che sia $\varepsilon = \psi/n$ con $\psi$ fissato.

Tenendo presente la proprietà (1.11), possiamo ricostruire una rotazione di un angolo $\psi$ attorno ad $\hat{n}$ mediante rotazioni infinitesime successive:

$$\begin{aligned} v'_i = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{I})_{ij_1} (\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{I})_{j-1j_2} ... (\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{I})_{j_{n-1}j_n} v_{j_n} = \\ = \lim_{n\to\infty} [(\mathbf{1} + \frac{\psi}{n} \mathbf{I})]^n_{ij} v_j = (e^{\psi \mathbf{I}})_{ij} v_j, \end{aligned}$$

cioè

$$\vec{v}' = e^{\psi \mathbf{I}} \vec{v} = R(\psi,\ \hat{n}) \vec{v}. \tag{3.3}$$

La relazione

$$R(\psi,\ \hat{n}) = e^{\psi \mathbf{I}} \tag{3.4}$$

si può verificare direttamente. Dalla (1.36) segue

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{2k} &= -(-1)^k \mathbf{I}^2, \quad \text{per} \quad k \geq 1, \\ \mathbf{I}^{2k+1} &= (-1)^k \mathbf{I}, \quad \text{per} \quad k \geq 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

quindi

$$\begin{aligned} e^{\psi \mathbf{I}} &= \sum_{k\geq 0} \frac{\psi^k \mathbf{I}^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{\psi^{2k}\mathbf{I}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{\psi^{2k+1}\mathbf{I}^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{\psi^{2k}}{(2k)!}[-(-1)^k \mathbf{I}^2] + \sum_{k\geq 0} \frac{\psi^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k \mathbf{I} = \\ &= 1 - \mathbf{I}^2[\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{\psi^{2k}}{(2k)!} - 1] + \mathbf{I}\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{\psi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= 1 + \mathbf{I}^2(1 - \cos\psi) + \mathbf{I}\sin\psi, \end{aligned} \tag{3.6}$$

cioè

$$e^{\psi \mathbf{I}} = \mathbf{1} + (1 - \cos\psi)\mathbf{I}^2 + \sin\psi \mathbf{I} \tag{3.7}$$

e, tenuto conto della terza delle (1.34), si ha

$$e^{\psi \mathbf{I}} = \mathbf{1} + (1 - \cos\psi)\mathbf{N} + \sin\psi \mathbf{I}, \tag{3.8}$$

che è l'espressione di $R(\psi,\ \hat{n})$ data dalla (1.30).

Se nella (1.32) poniamo

$$\mathbf{I} = -i\hat{n} \cdot \vec{j}, \tag{3.9}$$

$\vec{j}$ sarà dato da

$$j_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

$$j_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$j_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

La scelta del fattore $i$ rende le matrici $j$ autoaggiunte.

Usando la forma (3.4) si può scrivere in forma esponenziale la matrice di rotazione $R(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, data dalla (2.6), parametrizzara dagli angoli di Eulero:

$$R(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = e^{-i\alpha j_z} e^{-i\beta j_y} e^{-i\gamma j_z}. \tag{3.13}$$

Le matrici $j_i$ hanno un'algebra di commutazione che è identica a quella del momento angolare, com'è facile verificare. Tuttavia sono diverse dalla forma usuale delle matrici di momento angolare poiché per esempio $j_z$ non è diagonale. Si tratta in effetti di una rappresentazione diversa, ma che è equivalente. Si può infatti trovare una matrice unitaria $U$ tale che le matrici

$$U^{-1}\ j_i\ U \tag{3.14}$$

siano identiche alle matrici di momento angolare con $j = 1$ nella forma consueta.

Notare che le rotazioni nella forma esponenziale, sia (3.4) che (3.13), hanno necessariamente determinante uguale a $+1$. Infatti, per una qualsiasi matrice $A$ vale la seguente relazione

$$\det\ e^{A} = e^{\mathrm{Tr}A} \tag{3.15}$$

e poiché la traccia di tutte le componenti di $\vec{j}\ j$ è nulla si ha che il determinante della forma esponenziale è 1.

Quindi le matrici ella forma (3.13) formano il gruppo $O_+(3)$, che è il sottogruppo di $O(3)$ delle matrici con determinante $+1$, che forma la componente connessa all'identità del gruppo (l'altra componente, formata da tutte le matrici di $O(3)$ con determinante $-1$ non forma un gruppo e non è connessa con continuità all'identità).

# Capitolo 4

# Trasformazione di un campo scalare e vettoriale

## 4.1 Campo scalare

Dato un sistema fisico che occupa una certa estensione di spazio, se in ogni suo punto $\vec{x}$, di componenti $x_1, x_2, x_3$ rispetto ad un sistema di riferimento assegnato da una terna ortonormale $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, è definito un campo scalare $\psi(\vec{x})$, ruotando il sistema e mantenendo il sistema di riferimento fisso (punto di vista **attivo**), il nuovo campo scalare $\psi'$, calcolato nel punto ruotato $\vec{x}'$ dovrà assumere lo stesso valore:

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}). \tag{4.1}$$

Se si pone

$$R\vec{x} = \vec{x}' \tag{4.2}$$

e

$$\mathcal{R}\psi = \psi', \tag{4.3}$$

potremo anche scrivere

$$(\mathcal{R}\psi)(\vec{x}) = \psi'(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x}), \tag{4.4}$$

dove l'applicazione $\mathcal{R}$, che definiremo come applicazione **lineare**, è indotta sullo spazio delle funzioni $\psi$ dalla rotazione $R$.

Se per esempio $\psi$ è la funzione d'onda di un sistema quantistico, poiché una rotazione del sistema, se il sistema è isolato, non deve alterare i risultati delle osservazioni, si dovrà assumere che $\mathcal{R}$, oltre ad essere un operatore lineare, sia tale da non alterare i prodotti scalari tra stati dello spazio di Hilbert.

Un modo per garantire ciò è di richiedere che $\mathcal{R}$ sia **unitario**.

Osserviamo che la (4.4) dev'essere consistente con la legge di composizione del gruppo delle rotazioni. Ciò si può verificare. Applichiamo in successione le rotazioni $R_2$ e $R_1$; si ha

$$(\mathcal{R}_2\psi)(\vec{x}) = \psi(r_2^{-1}\vec{x}) \tag{4.5}$$

e poniamo

$$\psi(R_2^{-1}\vec{x}) = \phi(\vec{x}). \tag{4.6}$$

Applichiamo la rotazione $R_1$ su $\phi$, si ha

$$(\mathcal{R}_1\phi)(\vec{x}) = \phi(R_1^{-1}\vec{x}), \tag{4.7}$$

cioè

$$(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\psi)(\vec{x}) = \psi(R_2^{-1}(R_1^{-1}\vec{x})) = \psi((R_1R_2)^{-1}\vec{x}), \tag{4.8}$$

come si voleva dimostrare.

## 4.2 Trasformazione infinitesima

Si può determinare $\mathcal{R}$ nel caso infinitesimo. Con $\psi = \varepsilon$ dalla (3.1) si ha

$$R\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon\hat{n} \wedge \vec{x}, \tag{4.9}$$

dove $R = R(\varepsilon,\ \hat{n})$; ne segue

$$R^{-1}\vec{x} = \vec{x} - \varepsilon\hat{n} \wedge \vec{x}, \tag{4.10}$$

a meno di ordini superiori in $\varepsilon$.

Dalla (4.4) segue

$$(\mathcal{R}\psi)(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \varepsilon\hat{n} \wedge \vec{x}) = \psi(\vec{x}) - \varepsilon(\hat{n} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{x}). \tag{4.11}$$

Ora si ha

$$(\hat{n} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} = \hat{n} \cdot \vec{x} \wedge \vec{\nabla} = \frac{i}{\hbar}\hat{n} \cdot \vec{x} \wedge \vec{p} = \frac{i}{\hbar}\hat{n} \cdot \vec{L}, \tag{4.12}$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore di momento orbitale, ovvero il generatore delle trasformazioni infinitesime.

Si ha perciò

$$(\mathcal{R}\psi)(\vec{x}) = (\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{n} \cdot \vec{L})\ \psi(\vec{x}). \tag{4.13}$$

Si può procedere come per la (3.4) ed esponenziare:

$$\mathcal{R}(\psi,\ \hat{n}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\psi\hat{n}\cdot\vec{L}}, \tag{4.14}$$

ovvero, in analogia alla (3.15)

$$\mathcal{R}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha L_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta L_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma L_z}. \tag{4.15}$$

## 4.3 Campo vettoriale

Nel caso di un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ c'è un termine aggiuntivo nell'analoga della (4.11), dovuto alle proprietà di trasformazione dei vettori; usando la (3.1) si ha

$$(\mathcal{R}\vec{v})(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x} - \varepsilon\hat{n} \wedge \vec{x}) + \varepsilon\hat{n} \wedge \vec{v}(\vec{x}), \tag{4.16}$$

dove abbiamo trascurato termini di ordine superiore in $\varepsilon$; in particolare nell'ultimo termine, dove abbiamo calcolato il campo nel punto invariato.

Riscriviamo la (4.16) nella forma

$$(\mathcal{R}\vec{v})(\vec{x}) = (\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{n} \cdot \vec{L} - \frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{n} \cdot \vec{S})\vec{v}(\vec{x}), \tag{4.17}$$

dove si è posto

$$\hat{n} \wedge \vec{v}(\vec{x}) = -\frac{i}{\hbar}(\hat{n} \cdot \vec{S})\vec{v}(\vec{x}), \tag{4.18}$$

ovvero in componenti

$$i\hbar\epsilon_{ijk} = (S_j)_{ik}, \tag{4.19}$$

e dove $S_1$, $S_2$ e $S_3$ sono matrici 3x3 che operano secondo la regola

$$(\vec{S}\vec{v})_i = \vec{S}_{ij}v_j. \tag{4.20}$$

Esplicitamente

$$\epsilon_{ijk}n_j v_k(\vec{x}) = -\frac{i}{\hbar}n_m(S_m)_{ij}v_j(\vec{x}), \tag{4.21}$$

cioè

$$\begin{aligned} n_2v_3 - n_3v_2 &= -\frac{i}{\hbar}n_m(S_m)_{1j}v_j, \\ n_3v_1 - n_1v_3 &= -\frac{i}{\hbar}n_m(S_m)_{2j}v_j, \\ n_1v_2 - n_2v_1 &= -\frac{i}{\hbar}n_m(S_m)_{2j}v_j, \end{aligned}$$

che devono valere per ogni $\hat{n}$ e ogni $\vec{v}$.

Da qui si ricava facilmente la loro forma esplicita, cioè (usando indifferentemente gli indici di componenete (1,2,3) o (x,y,z))

$$S_x = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$S_y = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

$$S_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Queste matrici, salvo il fattore $\hbar$, sono identiche alle matrici (3.10), (3.11) e (3.12).

Se ora si esponenzia nel modo ormai noto la (4.17) si ottiene

$$(\mathcal{R}\vec{v})(\vec{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{n}\cdot(\vec{L}+\vec{S})}\vec{v}(\vec{x}), \tag{4.25}$$

dalla quale si vede che $\vec{v}$ si trasforma con un generatore

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \tag{4.26}$$

dove $\vec{L}$ è un operatore differenziale e $\vec{S}$ è un operatore che opera su di uno spazio finito dimensionale, ovvero, come matrice, opera sugli indici di componente di $\vec{v}$. L'operatore $\vec{j}$ introdotto nel capitolo 3, è nient'altro che $\vec{S}/\hbar$.

# Capitolo 5

# Connettività del gruppo $O_+(3)$ e omomorfismo $SU(2) \to O_+(3)$

## 5.1 Connettività di $O_+(3)$

Il gruppo $O_+(3)$ delle matrici ortogonali con determinante $+1$ è connesso, ma non semplicemente connesso. Infatti lo spazio dei parametri può essere rappresentato in termini dell'angolo $\psi$ di rotazione attorno alla direzione individuata da $\hat{n}$, secondo l'equazione (1.30).

Si può visualizzare questo spazio come una sfera di raggio $\pi$, facendo corrispondere ai punti interni di questa sfera, che si trovino lungo un raggio nella direzione di $\hat{n}$, i valori di $\psi$ da 0 a $+\pi$. In questo nodo si tien conto della relazione (1.58), secondo la quale le rotazioni con $-\pi \leq \psi \leq 0$ sono uguali a quelle con $\hat{n} \to -\hat{n}$.

I punti opposti sulla superficie della sfera vanno però identificati, poiché per $\psi = \pi$ si ha che una rotazione attorno a $\hat{n}$ e una attorno a $-\hat{n}$ sono la stessa rotazione $R(\pi,\ \hat{n})$, come si vede dalla (1.30). Infatti, per $\psi = \pi$, il termine dispari in $\hat{n}$ si annulla.

Quindi, lo spazio dei parametri di $O_+(3)$ è la sfera di raggio $\pi$, con i punti della superficie opposti identificati.

Questo spazio è evidentemente connesso ( cioè ogni suo punto può essere raggiunto con una linea continua a partire da un punto assegnato), ma non semplicemente connesso. Esistono infatti 2 classi di omotopia (dove una classe di omotopia è costituita da tutti i cammini che si possono deformare

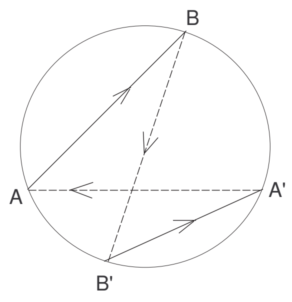


Figura 5.1:

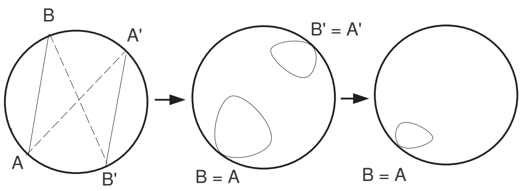


Figura 5.2:

.

con continuità in un cammino dato), come si può vedere col ragionamento seguente.

Vi è un primo tipo di curve continue <u>chiuse</u>, che possono essere contratte (con continuità) ad un punto: sono le curve chiuse che percorrono punti interni.

Vi sono poi curve che iniziano e terminano sulle superfici della sfera e che quindi sono chiuse quando il punto iniziale e finale sono opposti. Queste non si possono contrarre ad un punto, perch'e spostando il punto iniziale si sposta automaticamente anche il punto finale.

Tutte le altre curve chiuse sono omotope al primo tipo o al secondo (omotope = che si possono portare a coincidere con continuità ad una del primo tipo o del secondo).

Per esempio, la curva nella figura (5.1) può essere contratta ad un punto spostando il punto B lungo la superficie fino a farlo coincidere con il punto A, come mostrato in figura (5.2).

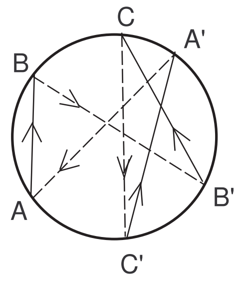


Figura 5.3:

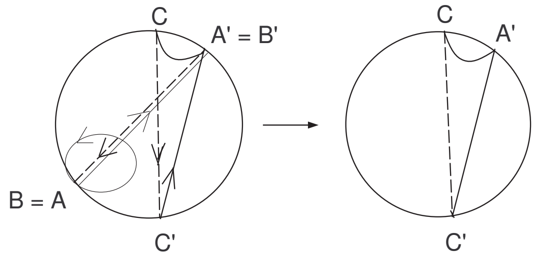


Figura 5.4:

Se invece si ha la curva di figura (5.3) portando B a coincidere con A si ha la figura (5.4) e quindi appartiene alla seconda classe di curve chiuse.

Si può verificare che le curve chiuse che hanno un numero pari di salti (da un punto della superfice al suo opposto), come quella del primo esempio (2 salti), appartengono alla prima classe: curve chiuse contraibili ad un punto.

Le curve chiuse che hanno un numero dispari di salti appartengono invece alla secondo classe, come per il secondo esempio (3 salti).

Si conclude che $O_+(3)$ è doppiamente connesso (due classi di omotopia).

Le funzioni continue sul gruppo potranno perciò essere al massimo a due valori, ne segue che $O_+(3)$ avrà rappresentazioni continue al massimo a due valori.

Esiste un teorema che afferma che $SU(2)$, cioè il gruppo delle matrici complesse unitarie 2x2 con determinante $+1$, è il gruppo di ricoprimento universale di $O_+(3)$, cioè che $SU(2)$ è semplicemente connesso e localmente isomorfo a $O_+(3)$.

Le rappresentazioni continue ed un sol valore di $SU(2)$ forniscono tutte le rappresentazioni, ad uno e a due valori, di $O_+(3)$.

## 5.2 L'omomorfismo $SU(2) \to O_+(3)$

Dimostriamo che il gruppo $SU(2)$ è semplicemente connesso.

Un elemento $\alpha$ di $SU(2)$ è una matrice complessa 2x2 unitaria, con determinante uguale a 1:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

con $\mid a \mid^2 + \mid b \mid^2 = 1$.

Lo spazio dei parametri di $SU(2)$ è perciò dato dai numeri reali Re(a), Im(a), Re(b), Im(b), soggetti solo alla condizione

$$(Rea)^2 + (Ima)^2 + (Reb)^2 + (Imb)^2 = 1. \tag{5.2}$$

Perciò lo spazio dei parametri di $SU(2)$ è la superficie della sfera unitaria in $\mathbf{R}^4$: $S^4$.

$S^4$ è semplicemnte connessa: si verifica , per esempio con una proiezione stereografica che rappresenta i punti della sfera in un iperpiano 3-dimensionale. Più in generale , tutte le sfere $S^n$ con $n > 2$ sono semplicemente connesse.

L'omomorfismo tra $SU(2)$ e $O_+(3)$, che è 2 a 1 per ciò che si è detto sulle clessi di omotopia di $O_+(3)$, si può costruire nel modo seguente.

Sia $\vec{x}$ un vettore di $E^3$, cioè di $\mathbf{R}^3$ con assegnato il consueto prodotto scalare. Poniamo

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \sigma_i \; x_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{5.3}$$

dove le matrici $\sigma_1, \sigma_2$ e $\sigma_3$ sono le matrici di Pauli, e dove

$$\det X = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -\vec{x}^2, \tag{5.4}$$

e

$$\mathrm{Tr}\; X = 0. \tag{5.5}$$

Una trasformazione di similitudine

$$X \to X' = \tilde{\alpha} X \tilde{\alpha}^{-1}, \tag{5.6}$$

con $\tilde{\alpha} \in SU(2)$, mantiene $X$ senza traccia e conserva il det $X$. Cioè

$$\mathrm{Tr}\; X' = \mathrm{Tr}\; X, \tag{5.7}$$

$$\det\; X' = \det\; X. \tag{5.8}$$

$$\tag{5.9}$$

Ne segue che

$$\vec{x}'^2 = \vec{x}^2, \tag{5.10}$$

si ha cioè che $\tilde{\alpha} \in SU(2)$ induce una rotazione su $E^3$, cioè una trasformazione lineare che conserva il modulo dei vettori e quindi dei prodotti scalari.

La corrispondenza tra $\tilde{\alpha} \in SU(2)$ e la trasformazione di $O_+(3)$ che rappresenta la rotazione di $\vec{x}$ è 2 a 1, come si vede dal fatto che $\pm\tilde{\alpha}$ inducono la stessa trasformazione su $X$, infatti un fattore di $\tilde{\alpha}$ lascia invariata la relazione (5.6), e dovendo $\tilde{\alpha}$ essere a determinante 1, questo fattore potrà essere solo $\pm 1$.

La (5.3) si può invertire con

$$x_i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i X) \tag{5.11}$$

e la trasformazione di $\vec{x}$ indotta dalla (5.6) è

$$x_i \to x_i' = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i X') = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i \tilde{\alpha} X \tilde{\alpha}^{-1}). \tag{5.12}$$

Con la parametrizzazione (5.1) si ha

$$X' = \tilde{\alpha} X \tilde{\alpha}^{-1} = X = \begin{pmatrix} x_3' & x_1' - ix_2' \\ x_1' + ix_2' & -x_3' \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

dove

$$\begin{aligned} x_1' + ix_2' &= (x_1 - ix_2)a^2 - (x_1 + ix_2)b^2 - 2abx_3, \\ x_3' &= [(x_1 + ix_2)\overline{a}b + c.c.] + (\mid a \mid^2 - \mid b \mid^2)x_3, \end{aligned} \tag{5.14}$$

con

$$| a |^2 + | b |^2 = 1. \tag{5.15}$$

La (5.14) si può riscrivere

$$x'_i = R_{ij} x_j, \tag{5.16}$$

con

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + \overline{a}^2 - b^2 - \overline{b}^2) & \frac{1}{2i}(a^2 - \overline{a}^2 + b^2 - \overline{b}^2) & -(ab + \overline{a}\underline{b}) \\ -\frac{1}{2i}(a^2 - \overline{a}^2 - b^2 + \overline{b}^2) & \frac{1}{2}(a^2 + \overline{a}^2 + b^2 + \overline{b}^2) & -i(ab - \overline{a}\overline{b}) \\ \overline{a}b + a\overline{b} & i(\overline{a}b - a\overline{b}) & | a |^2 - | b |^2 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Se per esempio si pone

$$a = e^{-\frac{1}{2}i\alpha}, \quad b = 0, \tag{5.18}$$

si ha

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv R(\alpha,\ \hat{e}_z) \tag{5.19}$$

e, con

$$a = \cos\frac{\beta}{2}, \quad b = -\sin\frac{\beta}{2} \tag{5.20}$$

si ha

$$R = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \equiv R(\beta,\ \hat{e}_y). \tag{5.21}$$

Se ora si calcola la matrice

$$R(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = R(\alpha,\ \hat{z})R(\beta,\ \hat{y})R(\gamma,\ \hat{z}) \tag{5.22}$$

con la (5.19) e (5.21) si ha la matrice di rotazione in $E^3$ in termini degli angoli di Eulero (2.6).

Inversamente, alla (5.19) corrispondono le matrici

$$\tilde{\alpha} = \pm \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{+\frac{i}{2}\alpha} \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{2}\alpha\sigma_3} \tag{5.23}$$

e alla (5.21) corrispondono le matrici

$$\tilde{\alpha} = \pm \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, = e^{-\frac{i}{2}\beta\sigma_2}, \tag{5.24}$$

dove si è usata la formula

$$e^{i\phi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\phi + i(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\phi. \tag{5.25}$$

Mediante le (5.23) e (5.24) si può scrivere la trasformazione di $SU(2)$ che corrisponde, a meno del segno, alla (5.22):

$$\tilde{\alpha}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \pm e^{-\frac{i}{2}\alpha\sigma_3} \pm e^{-\frac{i}{2}\beta\sigma_2} \pm e^{-\frac{i}{2}\gamma\sigma_3} = \tag{5.26}$$

$$= \pm \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{+\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & e^{+\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

$$\tag{5.28}$$

Si verifica che si ha

$$\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^* = \mathbf{1} \tag{5.29}$$

e

$$\det\tilde{\alpha} = +\mathbf{1}. \tag{5.30}$$

Se si parametrizza la rotazione con $\psi$ e $\hat{n}$ si ha, generalizzando la (5.23) e la (5.24)

$$\tilde{\alpha} = \pm e^{-\frac{i}{2}\psi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}. \tag{5.31}$$

* * * * * * * *