

Appunti per il Corso di Quanti

Roberto Casalbuoni

Dipartimento di Fisica dell'Università di Firenze
a.a. 2004-2005

Indice

1	Introduzione	3
2	Il corpo nero	5
2.1	Irraggiamento Termico del Corpo Nero	5
2.2	Calori Specifici a Bassa Temperatura	13
3	Dualismo Onda-Corpuscolo	16
3.1	L'effetto fotoelettrico	16
3.2	L'effetto Compton	18
4	Stati Stazionari	24
4.1	La stabilità degli atomi	24
4.2	La teoria di Bohr	28
5	Onde di De Broglie (1923).	35
6	L'esperimento di Davisson e Germer (1927).	40
7	Il Principio di Indeterminazione	46
8	Il Principio di Sovrapposizione	52
9	Quantizzazione spaziale	55
10	Analogia tra ottica geometrica e dinamica del punto	58
10.1	L'equazione di Hamilton-Jacobi per sistemi conservativi.	58
10.2	Il limite dell'ottica geometrica.	63
10.3	L'equazione d'onda di Schrödinger.	67

Capitolo 1

Introduzione

Il modo in cui la meccanica quantistica è nata ben esemplifica come le scienze fisiche si evolvono. All'inizio del 900 quando ormai, dopo le equazioni di Maxwell, la fisica sembrava una scienza completamente sistematizzata, una serie di fatti sperimentali mise in crisi questo edificio. Senza parlare dei problemi connessi con la teoria della relatività ricordiamo qui i seguenti fenomeni in totale disaccordo con quanto aspettato dalla descrizione classica:

- Spettro del corpo nero
- Calori specifici a bassa temperatura
- Stabilità degli atomi
- Dualismo onda-corpuscolo (effetto fotoelettrico, scattering Compton, ecc.)

In aggiunta a ciò esisteva tutta un'altra serie di fenomeni del mondo atomico che la fisica classica non era assolutamente in grado di spiegare quali:

- Spettri atomici
- Legami chimici
- Forze molecolari
- Periodicità della tavola di Mendeleiev

Lo scopo di questo corso è di illustrare brevemente quali siano state le difficoltà della fisica classica e le idee fondamentali che hanno permesso di arrivare alla formulazione della meccanica quantistica, che sarà studiata in dettaglio nel corrispondente corso del terzo anno.

Capitolo 2

Il corpo nero

2.1 Irraggiamento Termico del Corpo Nero

Lo studio dell'irraggiamento termico del corpo nero è di importanza storica fondamentale, in quanto è stato l'ambito nel quale Planck ha introdotto l'idea della quantizzazione e dove è stata introdotta la costante caratteristica della meccanica quantistica, la costante di Planck. Consideriamo dei corpi alla

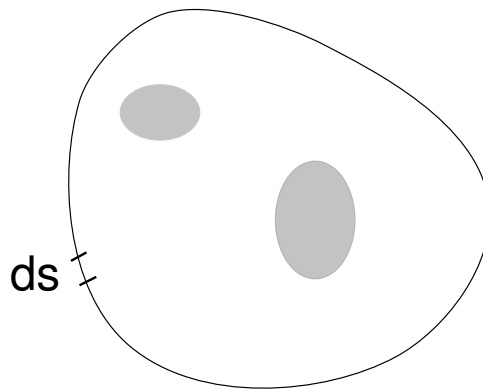


Figura 2.1: La cavità discussa nel testo

temperatura T in una cavità vuota, come in Fig. 2.1. Sia i corpi che la cavità emetteranno energia elettromagnetica (e.m.). Il problema che ci si pone è quello di calcolare la densità di energia presente nella cavità ad una

assegnata frequenza ν ed una data temperatura T . Un elemento di superficie ds di uno qualunque dei corpi o della cavità emetterà nella banda compresa tra ν e $\nu + d\nu$, nel tempo dt e nell'angolo solido $d\Omega$ una quantità di energia che potremo scrivere nella forma

$$E_\nu d\nu ds dt d\Omega \quad (2.1)$$

E_ν è chiamato potere emissivo specifico. Sull'elemento ds potrà inoltre arrivare un'energia dw sempre nella banda ν e $\nu + d\nu$, nel tempo dt e nell'angolo solido $d\Omega$. Di questa energia la superficie sarà in grado di assorbirne una frazione (vedi Fig. 2.2)

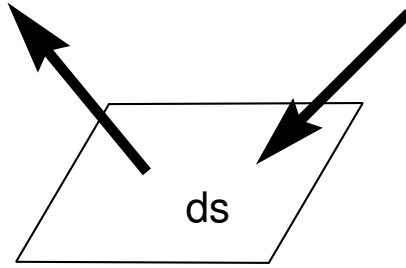


Figura 2.2: Illustrazione dell'emissione e dell'assorbimento di un elemento di superficie ds

$$A_\nu dw \quad (2.2)$$

dove A_ν è detto potere assorbente specifico. Anche l'energia dw potrà essere scritta in forma analoga alla (2.1)

$$dw = u_\nu d\nu ds dt d\Omega \quad (2.3)$$

Kirchoff ha mostrato per via termodinamica che, all'equilibrio, la quantità u_ν è una funzione universale di ν e T . Infatti, consideriamo due cavità A e B diverse tra di loro, ma alla stessa temperatura T . Supponiamo per assurdo che la densità $u(\nu, T)$ sia maggiore in A , nell'intervallo di frequenza $(\nu, \nu + d\nu)$. Se si connette A a B mediante un tubo opaco a tutte le frequenze eccetto che alla frequenza ν , che sia cioè un filtro di colore, avremo un flusso di calore da A a B fino al raggiungimento di un equilibrio, con la temperatura di A più bassa del valore iniziale e quella di B maggiore. Verrebbe così creata spontaneamente una differenza di temperatura, senza che sia fatto

alcun lavoro sul sistema delle due cavità, in contrasto col secondo principio della termodinamica. Si può concludere che $u(\nu, T)$ è una funzione solo di T e di ν , cioè una funzione universale.

In particolare risulta indipendente dal punto considerato nella cavità e dall'orientazione della superficie. Poiché u_ν caratterizza la radiazione nella cavità, possiamo dire che la radiazione deve essere isotropa e non polarizzata. Sempre all'equilibrio si dovrà avere compensazione tra energia assorbita ed energia emessa e quindi

$$E_\nu d\nu ds dt d\Omega = A_\nu u_\nu d\nu ds dt d\Omega \quad (2.4)$$

da cui

$$E_\nu = A_\nu u_\nu \quad (2.5)$$

Segue dunque che sebbene E_ν ed A_ν dipendano dal corpo considerato, il loro rapporto ne è indipendente. Per misurare u_ν si può far ricorso ad un corpo per il quale il potere assorbente sia uguale ad 1. Questo corpo idealizzato totalmente assorbente è quello che si chiama il corpo nero. Segue dall'equazione precedente che u_ν altro non è che il potere emissivo del corpo nero. Sperimentalmente un corpo nero può essere realizzato con il dispositivo

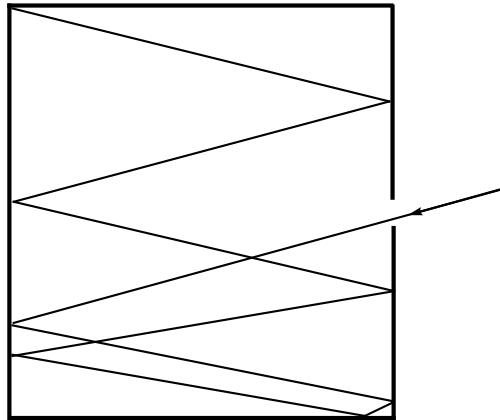


Figura 2.3: Illustrazione del corpo nero

mostrato in Fig. 2.3. Cioè tramite un involucro a pareti molto assorbenti e con un piccolo foro. La radiazione viene intrappolata all'interno della cavità e durante le riflessioni multiple assorbita in modo pressoché totale. Dunque

il forellino è capace di assorbire tutta la radiazione in arrivo rimettondone una quantità trascurabile. Tramite un'analisi spettroscopica della radiazione in uscita si determina E_ν . La densità di energia e.m. nella cavità, ρ_ν , risulta proporzionale ad u_ν

$$\rho_\nu = \frac{8\pi}{c} u_\nu \quad (2.6)$$

Il principio di relatività e la termodinamica permettono di dimostrare che la densità di energia, pur essendo una funzione di due variabili, ne dipende in modo estremamente particolare (legge di Wien)

$$\rho_\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (2.7)$$

Cioè il rapporto ρ_ν/T^3 dipende solo dal rapporto ν/T e non dalle due variabili separatamente. La funzione F deve essere determinata usando le proprietà del campo e.m. e vedremo in seguito come fare. Per il momento diciamo che il calcolo classico dà come risultato la formula di Rayleigh e Jeans

$$\rho_\nu = \frac{8\pi k}{c^3} \nu^2 T = \nu^3 \left[\frac{8\pi k}{c^3} \left(\frac{T}{\nu}\right) \right] \quad (2.8)$$

dove k è la costante di Boltzmann

$$k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \quad (2.9)$$

Questa formula è in contrasto clamoroso con i dati sperimentali, eccetto per la regione di piccole frequenze. Infatti se riportiamo in grafico i dati sperimentali per ρ_ν/T^3 in funzione di $x = \nu/T$, si ottiene la curva in Fig. 2.4. Mentre i dati mostrano che la funzione tende a zero per grandi valori di x la soluzione di Rayleigh e Jeans (equazione (2.8)) diverge. In ogni caso la legge di Wien permette di dedurre una certa quantità di informazioni generali sul corpo nero, senza necessità di determinare la funzione F . Per esempio una semplice conseguenza è la legge dello spostamento di Wien, che dice che la frequenza alla quale si ha la massima emittività aumenta linearmente con la temperatura. Infatti il massimo in frequenza è determinato dalla condizione

$$\frac{d\rho_\nu}{d\nu} = 0 \quad (2.10)$$

cioè

$$\frac{d}{d\nu} \left[\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) \right] = 0 \quad (2.11)$$

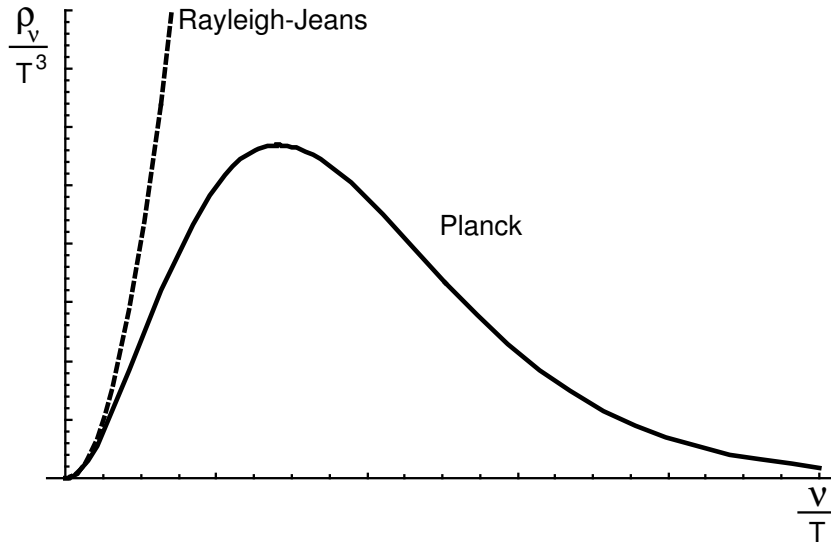


Figura 2.4: La soluzione di Rayleigh e Jeans confrontata con i valori sperimentali, fittati perfettamente dalla distribuzione di Planck (vedi dopo)

o semplificando ed introducendo la variabile $x = \nu/T$

$$3F(x) + x^3 F'(x) = 0 \quad (2.12)$$

Questa equazione fissa in maniera univoca la posizione del massimo in x , $x = x_0$, e quindi il massimo in frequenza sarà dato da

$$\nu = x_0 T \quad (2.13)$$

Un altro risultato generale è la legge di Stefan-Boltzmann che riguarda la densità totale di energia, che si ottiene integrando ρ_ν su tutte le frequenze

$$\rho = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \int_0^\infty \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu \quad (2.14)$$

da cui

$$\rho = T^4 \int_0^\infty x^3 F(x) dx \equiv aT^4 \quad (2.15)$$

Queste espressione si può connettere con l'energia emessa dal forellino del corpo nero integrando su metà dell'angolo solido. Questa sarà data da

$$E(T) = \int_0^\infty d\nu \int_{meta'} d\Omega u_\nu = \int_0^\infty d\nu \int_{meta'} d\Omega \frac{c}{8\pi} \rho_\nu = \frac{c}{4} \rho = \sigma T^4 \quad (2.16)$$

con

$$\sigma = a \frac{c}{4} \quad (2.17)$$

una costante universale detta costante di Stefan-Boltzmann.

Ricapitolando, la legge di Wien, conseguenza della relatività e della termodinamica è in accordo con gli esperimenti effettuati a varie temperature, cioè l'universalità di ρ_ν/T^3 . La legge dello spostamento e la legge di Stefan-Boltzmann sono ben verificate. Il punto in cui la fisica classica cade è nella determinazione della funzione F che si fa usando le proprietà statistiche del campo e.m.. Non solo il risultato di Rayleigh e Jeans contraddice i risultati sperimentali, ma porta addirittura ad un risultato paradossale. Infatti se calcoliamo la costante di Stefan-Boltzmann con l'equazione (2.15) si trova

$$\sigma = \frac{c}{4} \int_0^\infty x^3 \frac{8\pi k}{c^3} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{2\pi k}{c^2} \int_0^\infty x^2 dx = \infty \quad (2.18)$$

Questa è la famosa catastrofe dell'ultravioletto, come fu chiamata da Ehrenfest.

Sperimentalmente era stata dedotta, nel caso di alte frequenze, la seguente formula empirica (Wien)

$$\rho_\nu = B\nu^3 \exp\left(-\frac{b\nu}{T}\right) \quad (2.19)$$

che è in accordo con la legge di Wien. Nel 1900 Planck, cercando una formula che interpolasse tra i due tipi di comportamento, Wien e Rayleigh-Jeans, fu portato a postulare l'espressione

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (2.20)$$

con h (costante di Planck), determinata sperimentalmente, data da

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (2.21)$$

La costante h ha le dimensioni di un'azione (energia \times tempo). Si ha

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \rho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{kT}} = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 \quad (2.22)$$

e

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (2.23)$$

Vediamo adesso come la densità di energia possa essere ottenuta dal trattamento statistico della radiazione. Poiché ρ_ν non dipende dal tipo di pareti della cavità, possiamo pensare che la radiazione sia prodotta nel modo più semplice possibile, cioè da un sistema di oscillatori armonici. L'energia della radiazione sarà allora data dall'energia media degli oscillatori con frequenza nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$ per unità di volume. Il numero di oscillatori può essere contato dal numero di modi normali di un'onda stazionaria nella cavità. In altri termini richiediamo che ogni modo normale dell'onda corrisponda ad un oscillatore con la stessa frequenza. Considerando una cavità cubica di lato L e richiedendo condizioni di periodicità sulle pareti, dato che ogni modo normale è descritto da un'onda piana di tipo $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$, segue che il vettore di propagazione deve essere della forma

$$k_i L = 2\pi n_i, \quad n_i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

quindi il numero di oscillatori con frequenza tra $(\nu, \nu + d\nu)$, cui corrispondono modi normali con vettori d'onda compresi tra $(\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k})$, sarà dato da

$$d^3 n = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3 k = \frac{V}{8\pi^3} k^2 dk d\Omega \quad (2.25)$$

dato che la radiazione è isotropa e non polarizzata possiamo integrare sull'angolo solido e sommare sui due gradi di libertà di polarizzazione. Chiamando il risultato dN si ha

$$dN = 2 \frac{V}{8\pi^3} 4\pi k^2 dk = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu \quad (2.26)$$

dove abbiamo usato la relazione $k = 2\pi\nu/c$. Dunque la densità di energia è data da

$$\rho_\nu(T) = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\nu} \bar{\epsilon} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\epsilon} \quad (2.27)$$

con $\bar{\epsilon}$ l'energia media degli oscillatori con frequenza nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$. Secondo la meccanica statistica classica, all'equilibrio termodinamico, si pesa ogni configurazione del sistema con il fattore di Boltzmann $\exp(-E/kT)$ dove E è l'energia dello stato. Per un oscillatore armonico classico, la cui

energia può variare con continuità, non è difficile dimostrare che la media termodinamica dell'energia è data da

$$\bar{\epsilon} = kT \quad (2.28)$$

Infatti l'energia di un oscillatore unidimensionale di frequenza ω è

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{m} + \omega^2 q^2 \right) \quad (2.29)$$

Definendo

$$Z = \int dpdq \exp(-\beta E) \quad (2.30)$$

con $\beta = 1/kT$, segue

$$\bar{\epsilon} = -\frac{1}{Z} \frac{d}{d\beta} Z \quad (2.31)$$

Si trova subito che in questo caso

$$Z = \frac{2\pi}{\omega\beta} \sqrt{m} \quad (2.32)$$

e quindi derivando si trova il risultato in eq. (2.28). In effetti questo non è altro che un caso particolare del teorema di equipartizione dell'energia che assegna ad ogni grado di libertà classico un'energia media pari a $kT/2$. Si giunge così alla formula di Rayleigh e Jeans (2.8).

Planck notò che era possibile riprodurre la sua formula (2.20) postulando che l'energia dei singoli oscillatori fosse discreta

$$E = nh\nu \quad (2.33)$$

Il valor medio dell'energia si calcola come nel caso classico ma adesso avremo

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta nh\nu) \quad (2.34)$$

Questa è una serie geometrica e quindi

$$Z = \frac{1}{1 - \exp(-\beta h\nu)} \quad (2.35)$$

Calcolando la derivata si trova

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{\exp(\beta h\nu) - 1} \quad (2.36)$$

che sostituito nella (2.27) riproduce la formula di Planck (2.20). È importante realizzare che mentre la fisica classica assegna la stessa energia media a tutti gli oscillatori indipendentemente dalla loro frequenza, e quindi porta alla catastrofe ultravioletta, il risultato di Planck mostra che i modi a frequenza più alta devono contribuire meno alla media termodinamica. Come risultato la costante di Stefan-Boltzmann risulta adesso finita ed in accordo con l'esperimento. Infatti, integrando la formula di Planck su tutte le frequenze (vedi (2.14)) ed usando

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (2.37)$$

si trova

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3} = 5.671 \times 10^{-8} \text{ Js}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (2.38)$$

2.2 Calori Specifici a Bassa Temperatura

I calori specifici possono essere calcolati classicamente usando la legge di Dulong e Petit. Se assimiliamo gli atomi di un solido ad un sistema di oscillatori tridimensionali, segue dalla sezione precedente che l'energia media per atomo, all'equilibrio termodinamico, è data da

$$\bar{\epsilon} = 3kT \quad (2.39)$$

dato che si hanno ora tre gradi di libertà per ogni oscillatore. Quindi l'energia interna per mole risulterà

$$U = N_A \bar{\epsilon} = 3N_A kT = 3RT \quad (2.40)$$

dove $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro e R la costante dei gas, $R = N_A k = 8.316 \text{ J}/(\text{mole K}) = 1.988 \text{ Cal}/(\text{mole K})$, dove abbiamo usato $1 \text{ Cal} = 4.185 \text{ J}$. Si trova allora per il calore specifico a volume costante

$$c_V = \left. \frac{\partial U(T)}{\partial T} \right|_V = 3R \approx 6 \text{ Cal}/(\text{mole K}) \quad (2.41)$$

Sperimentalmente si osservano deviazioni sia ad alta che a bassa temperatura. Le deviazioni ad alta temperatura dipendono evidentemente dall'approssimazione che stiamo facendo di considerare piccole oscillazioni degli atomi del solido e quindi di considerare dei potenziali armonici. Ad alte temperature le fluttuazioni aumentano e questa approssimazione non è più valida. Invece a basse temperature l'approssimazione dovrebbe essere migliore. Anche in questo caso la fisica classica si trova in grossa difficoltà. Nel 1907 Einstein, prendendo spunto dall'ipotesi di quantizzazione di Planck, riusciva a spiegare il fatto che $c_V \rightarrow 0$ per $T \rightarrow 0$, anche se non il corretto andamento sperimentale. Infatti se assumiamo che tutti gli atomi oscillino con la stessa frequenza ν abbiamo (vedi equazione (2.36))

$$U = 3N_A \bar{\epsilon} = \frac{3N_A h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} \quad (2.42)$$

Nel limite di grandi temperature questa formula riproduce la legge di Dulong e Petit. Infatti in questo caso

$$U \approx 3N_A h\nu \frac{kT}{h\nu} = 3N_A kT \quad (2.43)$$

Il calore specifico risulta allora (vedi Fig. 2.5)

$$c_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 3N_A k \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{\exp(\frac{h\nu}{kT})}{(\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1)^2} \quad (2.44)$$

da cui per $T \rightarrow 0$

$$c_V \approx 3N_A k \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \exp(-\frac{h\nu}{kT}) \quad (2.45)$$

Dunque il calore specifico va correttamente a zero a piccole temperature, ma il corretto andamento sperimentale è piuttosto

$$c_V \approx T^3 \quad (2.46)$$

Evidentemente stiamo facendo una approssimazione troppo brutale nell'assumere che tutti gli atomi oscillino con la stessa frequenza. In genere in un solido esiste uno spettro di frequenze caratterizzato da una funzione $f(\nu)$. L'energia interna viene allora scritta nella forma

$$U(T) = \int_0^\infty \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} f(\nu) d\nu \quad (2.47)$$

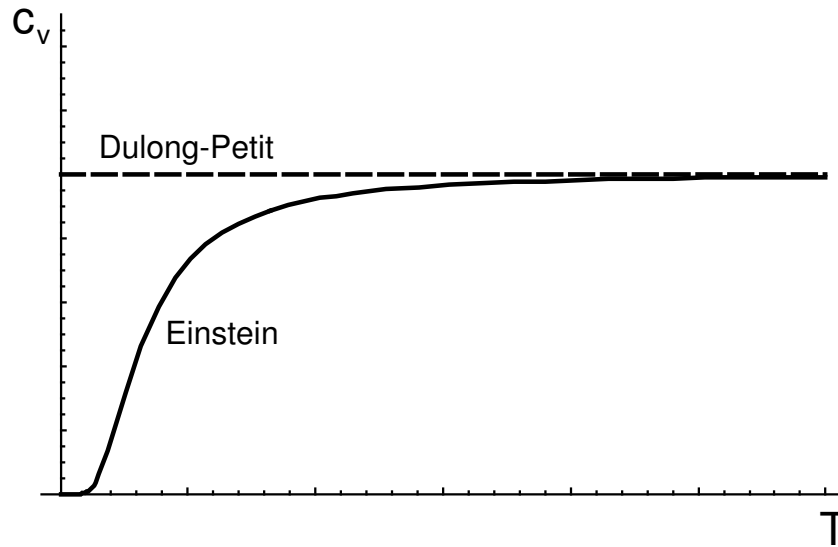


Figura 2.5: La soluzione di Einstein per i calori specifici confrontata con la legge di Dulong e Petit

con la condizione

$$\int_0^{\infty} f(\nu) d\nu = 3N_A \quad (2.48)$$

al fine di riottenere la legge di Dulong e Petit nel limite di alte temperature. La teoria di Einstein si riottiene assumendo appunto che esista una sola frequenza ν_0 , e ponendo

$$f(\nu) = 3N_A \delta(\nu - \nu_0) \quad (2.49)$$

La teoria completa di questo effetto fu sviluppata da Debye.

Capitolo 3

Dualismo Onda-Corpuscolo

3.1 L'effetto fotoelettrico

Nel 1905 Einstein, basandosi sull'ipotesi di quantizzazione di Planck e sull'idea che un campo e.m. in una cavità si comporta come un sistema di oscillatori armonici, mostrò come l'energia e.m. che compete alla banda di frequenze $d\nu$ si comporta come un insieme di corpuscoli indipendenti in numero pari a:

$$n = \frac{U}{h\nu} \quad (3.1)$$

In altri termini l'energia si ripartiva tra n corpuscoli (fotoni) ognuno di energia $E = h\nu$. In questo modo l'interpretazione di Einstein del corpo nero era che la luce veniva emessa come un insieme di fotoni di energia $h\nu$. Applicando questa idea anche all'assorbimento Einstein fu in grado di spiegare in modo semplice l'effetto fotoelettrico. L'effetto consiste nell'emissione di elettroni da parte di metalli irraggiati con la radiazione e.m.. I principali fatti sperimentali a questo riguardo sono:

- 1) - esiste una frequenza di soglia ν_0 che dipende dal metallo irraggiato.
- 2) - L'energia cinetica degli elettroni emessi varia tra 0 ed un massimo che dipende in modo lineare dalla frequenza ν_0 , ma non dipende dall'intensità della radiazione.
- 3) - Il numero di elettroni emessi per secondo e per unità di superficie è proporzionale all'intensità della radiazione.
- 4) - L'estrazione degli elettroni avviene istantaneamente.

La spiegazione classica del fenomeno assume che sulla superficie del metallo ci sia una barriera di doppio strato e che gli elettroni siano in pratica liberi

all'interno. Per estrarre gli elettroni occorre compiere un lavoro w sufficiente a superare la barriera, detto lavoro di estrazione. Supponiamo che l'energia incidente sia distribuita in modo uniforme sulla superficie, occorrerà un certo tempo perché un elettrone accumuli l'energia sufficiente a superare la barriera. Il processo avviene invece in modo istantaneo. Una stima qualitativa del tempo necessario all'estrazione si può effettuare considerando un'energia incidente su 1 cm^2 di superficie pari a 10^{-7} Js^{-1} (cioè 1 erg al secondo), portata da un'onda di frequenza di circa $0.5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (il doppietto del sodio). Il lavoro di estrazione è circa 2 eV , vale a dire $w \approx 3.2 \times 10^{-19} \text{ J}$. Un atomo delle dimensioni di circa 10^{-8} cm riceverà una energia di circa 10^{-23} Js^{-1} . Quindi per accumulare un'energia pari a w occorrerà un tempo dell'ordine di

$$\frac{3.2 \times 10^{-19} \text{ J}}{10^{-23} \text{ Js}^{-1}} = 3.2 \times 10^4 \text{ s} \quad (3.2)$$

quindi un tempo dell'ordine di 9 ore. Inoltre in questo caso la velocità di emissione degli elettroni dovrebbe essere funzione dell'intensità. Nell'ipotesi dei fotoni, si assume invece che l'estrazione avvenga perché il singolo elettrone assorbe il singolo fotone, cioè con un assorbimento localizzato. Il processo è allora istantaneo e detta K l'energia cinetica massima che può assumere l'elettrone, si ha

$$h\nu = w + K \quad (3.3)$$

Inoltre all'aumentare dell'intensità aumenterà il numero di fotoni emessi

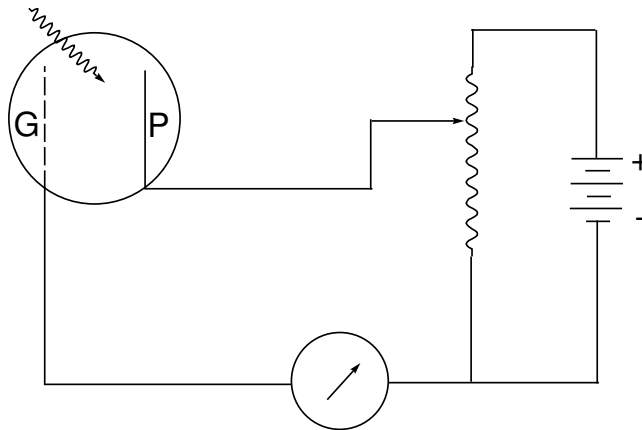


Figura 3.1: Il dispositivo sperimentale per l'effetto fotoelettrico

ma non la loro energia. Questa ipotesi si può verificare con il dispositivo in Fig. 3.1. I fotoelettroni vengono emessi dalla placca e catturati dalla griglia. Rendendo la griglia sempre più negativa la corrente diminuisce sino ad annullarsi per un valore della differenza di potenziale griglia-placca tale che $eV = K$. Riportando in un grafico (vedi Fig. 3.2) K in funzione di ν si può determinare sia w che la costante di Planck.

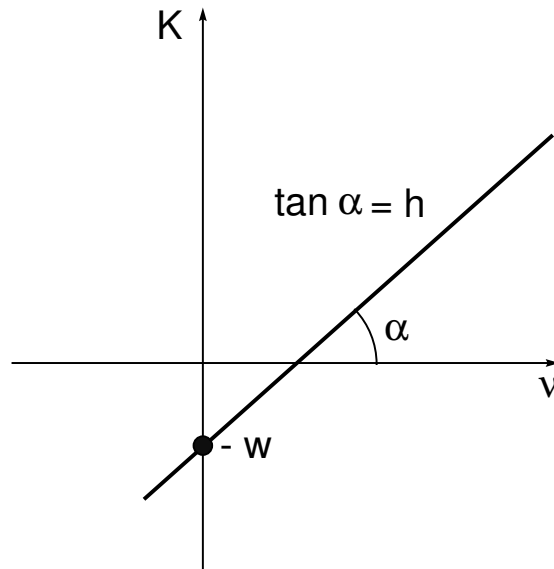


Figura 3.2: L'energia cinetica degli elettroni misurata nell'esperimento sull'effetto fotoelettrico in funzione della frequenza

3.2 L'effetto Compton

Una conferma di queste idee di Einstein venne dall'effetto Compton. Questo effetto è stato scoperto nel 1923 e non ha avuto un'influenza diretta sulla scoperta della meccanica quantistica, ma è comunque una delle conferme più dirette dell'ipotesi dei fotoni. Nell'esperimento si fanno diffondere dei raggi X da parte di un materiale (nell'esperimento originale si trattava di paraffina), come mostrato in Fig. 3.3. L'osservazione mostra che l'onda diffusa ha una lunghezza d'onda (o una frequenza) diversa dall'onda incidente. La

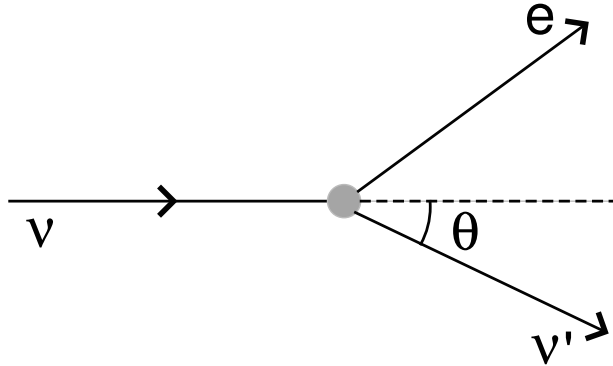


Figura 3.3: Lo scattering Compton

teoria classica prevede che la radiazione diffusa sia dovuta alle cariche elettriche che effettuano delle oscillazioni forzate nel campo dell'onda incidente e che quindi riemettono sulla stessa frequenza. L'effetto si spiega invece semplicemente con il modello corpuscolare tramite la conservazione dell'energia e dell'impulso. Abbiamo visto come nella teoria di Einstein si assegna ad un fotone un'energia pari ad $h\nu$. Mostriamo che dovremo anche attribuire un impulso pari a $h\nu/c$. Consideriamo un'onda piana che trasporti un'energia E e che incida su una particella di carica e , come in Fig. 3.4. Il lavoro effettuato dall'onda sulla particella sarà

$$dL = e\vec{E} \cdot \vec{v}dt = eEv_ydt \quad (3.4)$$

la forza lungo l'asse x è data da

$$F_x = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \right)_x = e\frac{v_y}{c}B \quad (3.5)$$

Pertanto l'impulso trasmesso alla particella sarà

$$dp = F_x dt = e\frac{v_y}{c}Bdt = \frac{1}{c}dL \quad (3.6)$$

dove si è usato $B = E$ (vedi [1], qui stiamo usando le unità di Heaviside Lorentz) Nell'interpretazione di Einstein quest'onda non è altro che un fotone che, essendo assorbito dall'elettrone, produce dunque una variazione

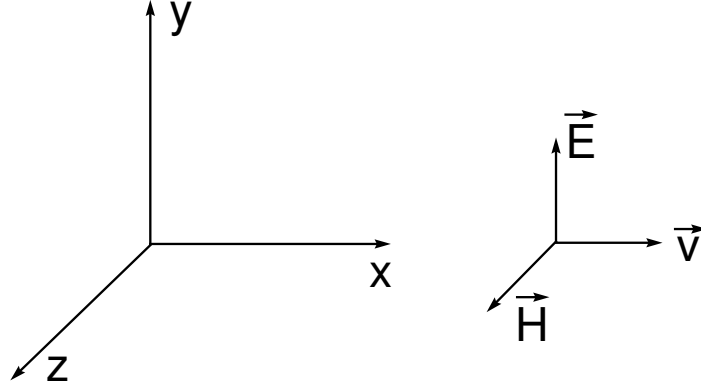


Figura 3.4: La disposizione dei campi elettrico e magnetico discussa nel testo

di impulso sulla particella carica pari ad $1/c$ volte la variazione di energia. Dovremo dunque assegnare ad un fotone

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (3.7)$$

dove abbiamo definito

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi\nu \quad (3.8)$$

Il vettore \vec{k} è detto il vettore d'onda. Segue anche che il fotone è una particella di massa invariante nulla, infatti

$$m^2c^4 = E^2 - c^2|\vec{p}|^2 = 0 \quad (3.9)$$

Supporremo che l'elettrone iniziale sia a riposo (in realtà questo si può giustificare vista la grande differenza di energia tra i raggi X , dell'ordine delle decine di KeV , ed i legami atomici, dell'ordine delle decine di eV). Il processo è pensato come un assorbimento del fotone incidente da parte dell'elettrone ed una successiva riemissione. Le condizioni cinematiche sono allora (vedi Fig. 3.3)

Prima della collisione

$$\begin{aligned} (E, \vec{p})_{\text{fotone}} &= (\hbar\omega, \hbar\vec{k}) \\ (E, \vec{p})_{\text{elettrone}} &= (mc^2, \vec{0}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dopo la collisione

$$\begin{aligned}(E, \vec{p})_{\text{fotone}} &= (\hbar\omega', \hbar\vec{k}') \\ (E, \vec{p})_{\text{elettrone}} &= (E, \vec{p})\end{aligned}\quad (3.11)$$

Inoltre l'energia e l'impulso dell'elettrone dopo la collisione devono soddisfare la relazione

$$E^2 = m^2c^4 + c^2|\vec{p}|^2 \quad (3.12)$$

mentre per i fotoni si ha

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}, \quad |\vec{k}'| = \frac{\omega'}{c} \quad (3.13)$$

la conservazione dell'energia e dell'impulso danno le condizioni

$$\begin{aligned}\hbar\omega + mc^2 &= \hbar\omega' + E \\ \hbar\vec{k} &= \hbar\vec{k}' + \vec{p}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Conviene riscrivere queste condizioni portando a primo membro le variabili relativi ai fotoni ed a secondo membro quelle degli elettroni

$$\begin{aligned}\hbar\omega - \hbar\omega' &= E - mc^2 \\ \hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}' &= \vec{p}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Quadrando entrambe le equazioni, sottraendo la seconda (dopo averla moltiplicata per c^2) dalla prima ed usando (3.12) e (3.13), si trova

$$-\hbar^2\omega\omega' + c^2\hbar^2\vec{k} \cdot \vec{k}' = m^2c^4 - Emc^2 \quad (3.16)$$

Sfruttando ancora la conservazione dell'energia per esprimere E , e sviluppando il prodotto scalare si ha

$$\hbar\omega\omega'(1 - \cos\theta) = mc^2(\omega - \omega') \quad (3.17)$$

che può anche risciversi nella forma

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{\hbar}{mc^2}(1 - \cos\theta) \quad (3.18)$$

o in termini delle lunghezze d'onda $\lambda = 2\pi c/\omega$

$$\lambda' - \lambda = 2\pi\frac{\hbar}{mc}(1 - \cos\theta) \quad (3.19)$$

la quantità

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 3.862 \times 10^{-13} \text{ m} \quad (3.20)$$

è detta la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone. Vediamo tra l'altro che l'introduzione della costante di Planck permette di formare una ulteriore quantità con le dimensioni di una lunghezza, partendo dalle costanti fondamentali. La relazione tra le lunghezze d'onda così ricavata risulta in perfetto accordo con i dati sperimentali.

L'ipotesi del fotone non permette di poter accettare una teoria corpuscolare della luce quale quella formulata da Newton, perché non sarebbe possibile spiegare i fenomeni tipicamente ondulatori, quali l'interferenza e la diffrazione. Inoltre nell'idea stessa del fotone appare un concetto tipicamente ondulatorio quale la frequenza ($E = h\omega$). I due aspetti appaiono qui legati in modo inestricabile. Un ulteriore passo fu fatto in questa strada da De Broglie (1923) che generalizzò questa proprietà alla materia. La sua ipotesi fu quella di associare ad una particella di massa invariante m , energia E ed impulso \vec{p} un'onda piana

$$\psi(\vec{x}, t) = A \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (3.21)$$

in cui la frequenza ed il vettore d'onda sono legati ai parametri cinematici della particella dalle relazioni

$$E = h\omega, \quad \vec{p} = h\vec{k} \quad (3.22)$$

Questa relazione è assunta vera anche nel caso relativistico in cui

$$\vec{p} = m\vec{v} \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (3.23)$$

In questo modo risulta associata ad ogni particella, sia essa materiale (un elettrone) od a massa nulla (fotone), una lunghezza d'onda data da

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} \quad (3.24)$$

Questa ipotesi porta come conseguenza naturale che anche le particelle materiali devono dar luogo a fenomeni ondulatori, quali l'interferenza e la diffrazione. Questo effetto fu verificato da Davisson e Germer nel 1927 che mostrarono

la diffrazione di elettroni su un cristallo di nichel. Nell'esperimento gli elettroni avevano un'energia cinetica, K di 50 eV , o $8 \times 10^{-18} \text{ J}$. Usando formule non relativistiche (l'energia associata alla massa dell'elettrone, mc^2 , è 0.511 MeV), si ha

$$p = (2mK)^{1/2} \approx 4 \times 10^{-24} \frac{\text{Kg m}}{\text{s}} \quad (3.25)$$

La lunghezza d'onda associata risulta allora data da

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx 1.5 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (3.26)$$

Per raggi X , con energia della decina di KeV la lunghezza d'onda associata è dello stesso ordine di grandezza, visto che in questo caso avremo $p = E/c = h\nu/c$ e quindi

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{E} \approx \frac{3 \times 10^8 \times 6.6 \times 10^{-34}}{10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}} \approx 1.3 \times 10^{-10} \quad (3.27)$$

Infatti le figure ottenute da Davisson e Germer erano molto simili alle figure di diffrazione da raggi X . Si vede dunque che sia per la radiazione e.m. che per la materia, coesistono i due aspetti, quello corpuscolare e quello ondulatorio, ed a seconda del tipo di fenomeno che vogliamo studiare prevale uno dei due aspetti. L'unica sintesi che si è resa possibile per conciliare questo comportamento apparentemente schizoide è stata tramite una interpretazione probabilistica. In questa interpretazione i due aspetti sono legati assieme assumendo che la densità di energia e.m. di un'onda monocromatica di frequenza ν sia proporzionale al numero probabile di fotoni per unità di volume \bar{n} . In formule

$$\bar{n} = \frac{1}{h\nu} \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \quad (3.28)$$

Si ottiene in questo modo un legame tra l'aspetto ondulatorio, espresso dai campi \vec{E} e \vec{H} e quello corpuscolare. Notiamo che in questa idea la probabilità è data dai quadrati dei campi. Questa idea è allora generalizzabile alle onde di De Broglie. Assegnando alle particelle materiali un'onda piana e definendo in modo opportuno l'energia per unità di volume, è possibile anche in questo caso legare i due aspetti. Queste idee saranno discusse più in dettaglio in seguito quando sarà trattata la meccanica quantistica, ma l'essenza della materia è in queste considerazioni.

Capitolo 4

Stati Stazionari

4.1 La stabilità degli atomi

Il problema della stabilità degli atomi si è manifestato sin dai primi modelli atomici. Infatti dall'emissione β (cioè dal decadimento di un nucleo di peso atomico A e numero atomico Z , (Z, A) in un nucleo $(A, Z + 1)$ con emissione di un elettrone, detto radiazione β), era noto che gli atomi dovevano essere costituiti sia da cariche positive che negative. D'altra parte nel 1831 il reverendo Samuel Earnshaw aveva dimostrato che un sistema di cariche soggetto a forze coulombiane non può esistere in equilibrio statico. Nel volume atomico finito queste cariche saranno allora in equilibrio dinamico e soggette quindi ad accelerazioni. La teoria classica dell'elettromagnetismo prevede però che una carica accelerata perda energia per irraggiamento [1]. Dunque l'atomo doveva essere instabile (vedi successivamente per una valutazione più quantitativa).

Prima di arrivare alla concezione atomica attuale furono proposti vari modelli tra cui alcuni esempi sono:

- Modelli con atomo costituito per la massima parte da elettroni. L'atomo era costituito da un gran numero di elettroni (da 500 a 1000 nel caso dell'atomo di idrogeno) con idee estremamente vaghe per quanto riguardava le cariche positive. In una variante del 1897 dovuta a Thomson la carica positiva era attribuita allo spazio tra gli elettroni.
- Modello di Thomson (1903-1906). In questo caso la carica positiva era distribuita in modo omogeneo in una sfera con gli elettroni sparsi come lo zibibbo in un panettone. Gli elettroni erano pari al numero atomico e la massa quindi

concentrata nelle cariche positive.

Si affacciava così l'idea che le cariche positive e negative avessero proprietà intrinsecamente diverse (Jeans 1901). Lenard nel 1903 proponeva che la massa atomica fosse dovuta quasi interamente alle cariche positive e che l'atomo fosse quasi vuoto. In questo contesto apparivano naturali i modelli planetari proposti da Perrin (1901) e da Nagaoka (1903). Questo modello era alquanto curioso in quanto l'atomo avrebbe avuto una struttura ad anelli simile a quella di Saturno. Nel 1911 Rutherford effettuò un esperimento che dette informazioni uniche sulla struttura atomica. Rutherford utilizzava particelle α che sono composte da due neutroni e due protoni (sono il nucleo dell'elio), che faceva diffondere nella materia. Il risultato dell'esperimento fu che queste particelle venivano diffuse con grandi deviazioni (o come si dice a grandi angoli). Questo fatto implica che il bersaglio non può avere una struttura uniforme ma deve essere piuttosto composto di grani molto massicci (come si capisce intuitivamente). Si affermò così il

- Modello di Rutherford in cui l'atomo è strutturato come un nucleo centrale positivo (contenente in pratica tutta la massa), con gli elettroni orbitanti attorno al nucleo come i pianeti di un sistema solare.

Il modello di Rutherford presenta due grossi problemi per la fisica classica:

- a) il problema già accennato della stabilità
- b) la radiazione viene emessa dall'atomo in modo continuo e non con uno spettro di righe come l'osservazione sperimentale richiede.

Questi due problemi sono correlati e cercheremo ora di darne una spiegazione quantitativa. Una carica accelerata (consideriamo un elettrone) perde un'energia per unità di tempo data dalla seguente formula (vedi [1], Sez. 9.13, p. 368)

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \quad (4.1)$$

dove $e = 1.602 \times 10^{-19} C$ è la carica elettrica dell'elettrone cambiata di segno, a è la sua accelerazione e $c = 2.998 \times 10^8 ms^{-1}$ è la velocità della luce. Per effettuare questo calcolo conviene esprimere sia E che a come funzioni della distanza dell'elettrone dal nucleo. Se consideriamo l'atomo di idrogeno (costituito da un protone di carica e e da un elettrone di carica $-e$), l'energia totale dovuta all'attrazione coulombiana è

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi r} \quad (4.2)$$

dove m è la massa dell'elettrone (stiamo considerando qui un protone con massa molto maggiore di m , infatti $m_p \approx 2000 m$). Se ci limitiamo a considerare orbite circolari, la condizione di equilibrio tra forza elettrostatica e forza centrifuga è

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi r^2} \quad (4.3)$$

da cui

$$v^2 = \frac{e^2}{4\pi m r} \quad (4.4)$$

Sostituendo nella equazione (4.2) si trova

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi r} \quad (4.5)$$

Inoltre l'accelerazione risulterà

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi m r^2} \quad (4.6)$$

Sostituendo la (4.5) al primo membro della (4.1) ed usando la (4.6) per l'accelerazione al secondo membro si trova

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi m r^2} \right)^2 \quad (4.7)$$

da cui si ricava

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{e^4}{(4\pi)^2 m^2 c^3 r^2} \quad (4.8)$$

Questa è una equazione differenziale a variabili separabili che può essere integrata immediatamente. L'integrale sarà calcolato a partire da $t = 0$ dove l'elettrone si trova sulla sua orbita di raggio a_0 , dove a_0 definisce il raggio atomico, fino all'istante τ del collasso allorché l'elettrone finisce a distanza zero sul protone (che qui è assunto puntiforme). Avremo

$$\int_{a_0}^0 r^2 dr = -\frac{1}{3} a_0^3 = -\frac{4}{3} \frac{e^4}{(4\pi)^2 m^2 c^3} \tau \quad (4.9)$$

quindi l'atomo collassa in un tempo pari a

$$\tau = \frac{1}{4} \frac{(4\pi)^2 m^2 c^3 a_0^3}{e^4} \quad (4.10)$$

Questa equazione si può anche riscrivere nel seguente modo

$$\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{a_0}{r_0} \right)^2 \frac{a_0}{c} \quad (4.11)$$

dove abbiamo introdotto il raggio classico dell'elettrone

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi mc^2} \quad (4.12)$$

Che questa quantità abbia le dimensioni di una lunghezza si riconosce subito dal fatto che $[r_0] = [\text{carica}^2/m\ell^3t^{-2}]$ come segue dalla legge di Coulomb. Numericamente si ha

$$r_0 = 2.817 \times 10^{-15} m \quad (4.13)$$

Conviene osservare a questo punto che un'ulteriore difficoltà della teoria classica è nello spiegare i raggi atomici. Infatti date le costanti fondamentali e e c , l'unico modo per formare una lunghezza è quello esemplificato in eq. (4.12), cioè tramite una unità di massa. Ma se si fa uso della massa del nucleo in una formula analoga alla precedente, si vede che il raggio atomico risulta dell'ordine di $10^{-18} m$, mentre si sa che le dimensioni atomiche sono dell'ordine di $10^{-10} m$. Quindi l'uso sia di m che della massa del nucleo nella (1.12) porta ad un risultato in disaccordo con l'esperimento. Come vedremo la meccanica quantistica introduce una ulteriore costante dimensionata, la costante di Planck, tramite la quale è possibile formare una seconda quantità con le dimensioni di una massa, il raggio di Bohr, che ha il giusto ordine di grandezza. Tornando al nostro problema, se prendiamo il valore

$$a_0 \approx 0.5 \times 10^{-10} m \quad (4.14)$$

come valore approssimato del raggio dell'atomo di idrogeno, si trova

$$\tau \approx 1.3 \times 10^{-11} \text{ sec} \quad (4.15)$$

Vista la stabilità degli atomi questo è un tempo ridicolmente piccolo.

Veniamo ora al problema della frequenza con cui viene emessa la radiazione. La frequenza dell'elettrone nel suo moto attorno al nucleo è data da

$$\omega = \frac{v}{r} \approx r^{-3/2} \quad (4.16)$$

come segue dalla (4.6). Dunque la frequenza della radiazione emessa è continua ed inoltre diverge per $r \rightarrow 0$.

4.2 La teoria di Bohr

Nella determinazione degli spettri atomici la regola di Rydberg-Ritz (1905) ha giocato un ruolo fondamentale. Lo spettro dell'atomo di idrogeno mostrava una serie di righe (vedi Fig. 4.1). La qualità delle misure era tale che Balmer poté stabilire che si potevano riprodurre le frequenze osservate con la formula

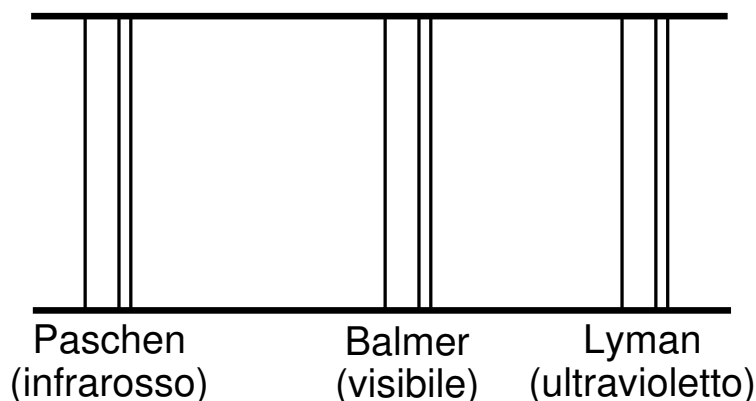


Figura 4.1: Lo spettro dell'atomo di idrogeno

$$\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad R = 1.09677 \times 10^5 \text{ cm}^{-1} \quad (4.17)$$

R prende il nome di costante di Rydberg. Fissando m e variando n si osservano le varie serie di righe:

$m=1$ (serie di Lyman)

$m=2$ (serie di Balmer)

$m=3$ (serie di Paschen)

La struttura di questa formula suggerì a Rydberg e Ritz di definire dei termini spettrali

$$R \frac{1}{n^2} \quad (4.18)$$

tali che le possibili frequenze di emissione si potevano ottenere per differenza di tali termini. Queste idee non hanno alcuna giustificazione classica, in quanto se la radiazione fosse dovuta ad un moto periodico di cariche all'interno dell'atomo, oltre alle frequenze fondamentali si sarebbero dovute

osservare anche le armoniche superiori, cosa che non è. Viceversa la formula si può spiegare se l'atomo esiste solo in stati stazionari di energia definita, e se l'emissione di radiazione avviene solo quando si ha una transizione dell'atomo da uno stato ad un'altro. In questo caso, sfruttando l'ipotesi di Planck avremo che la frequenza della radiazione emessa sarà data da

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \quad (4.19)$$

dove ΔE è la differenza di energia tra i due stati stazionari, come è illustrato in Fig. 4.2. Possiamo allora ricavare l'energia degli stati stazionari tramite

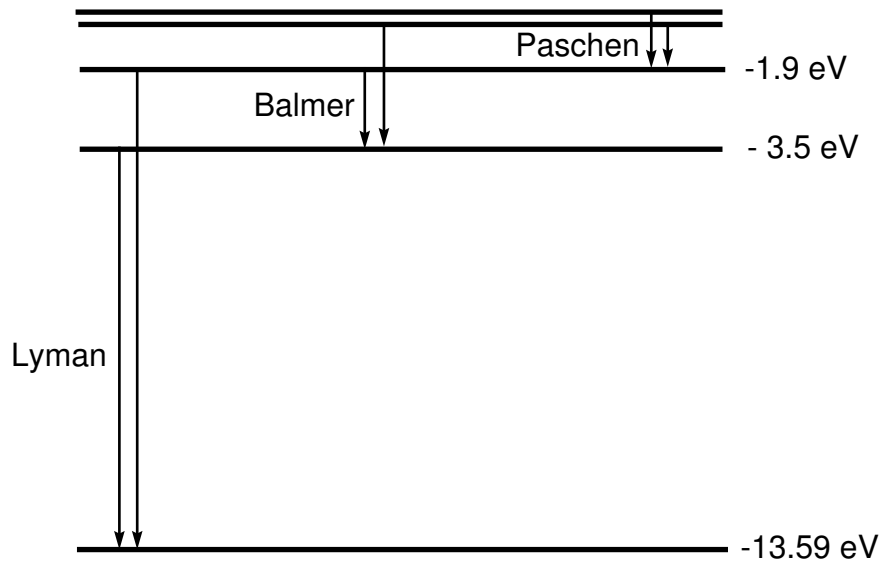


Figura 4.2: Gli stati stazionari dell'atomo di idrogeno

la regola di Rydberg e Ritz

$$E_n = -hc \frac{R}{n^2} \quad (4.20)$$

Prima di discutere la teoria di Bohr degli stati stazionari (1913) è opportuno sottolineare che l'esistenza di questi stati stazionari fu verificata direttamente tramite un esperimento di collisione tra elettroni ed atomi effettuato da Franck e Hertz nel 1914 (quindi un anno dopo la teoria di Bohr). Il dispositivo sperimentale è illustrato in Fig. 4.3. Il tubo contiene dei vapori di

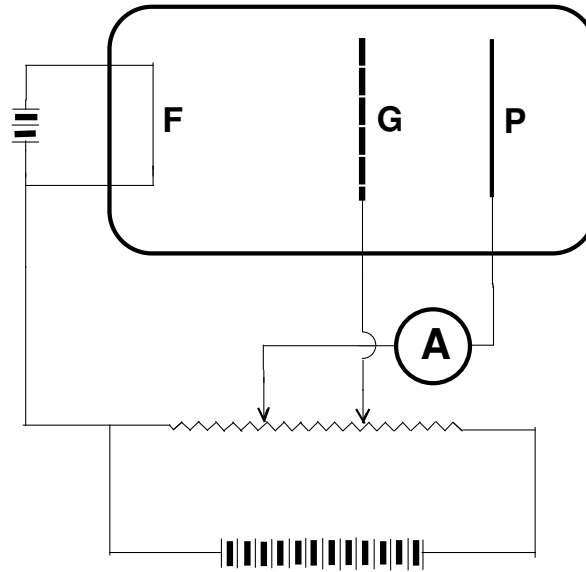


Figura 4.3: Il dispositivo di Franck e Hertz

mercurio ed un flusso di elettroni viene emesso dal filamento incandescente f . La differenza di potenziale V accelera gli elettroni ed un debole controcampo è mantenuto tra G e P . Se gli elettroni effettuano una collisione elastica sugli atomi, quindi senza perdita di energia, la velocità massima che possono raggiungere in G è data da

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = eV \quad (4.21)$$

Regolando il potenziale di placca P si può fare in modo che questa energia sia appena sufficiente a far arrivare gli elettroni in P . Nel circuito fluirà allora una corrente che aumenterà via via che aumentiamo V . L'esperienza mostra delle brusche cadute di corrente (vedi Fig. 4.4). L'elettrone urtando con l'atomo può cedere energia facendo effettuare una transizione, diciamo dallo stato fondamentale al primo stato eccitato. In questo caso però non ha più energia sufficiente a raggiungere P e quindi si ha una caduta di corrente. Se l'elettrone effettua due urti anelastici con due atomi diversi, allora perderà un'energia doppia e così via. Questo esperimento mostra dunque che l'atomo è in grado di assorbire solo energie definite. Per di più si può completare l'esperimento effettuando una osservazione spettroscopica del vapore di mer-

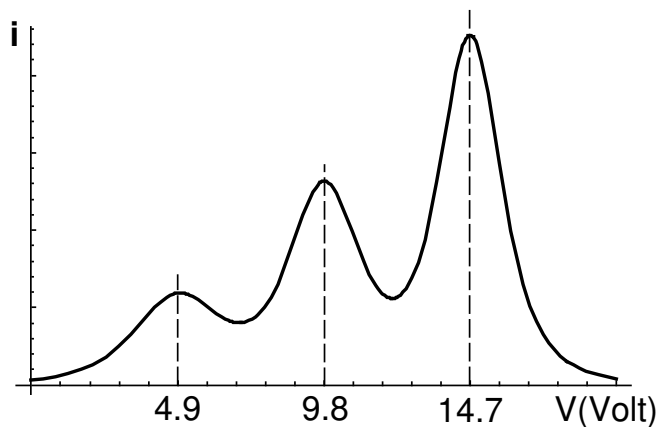


Figura 4.4: I risultati dell'esperienza di Franck e Hertz

curio. Si osserva allora che in corrispondenza della caduta di corrente, cioè degli urti anelastici, il vapore emette radiazione e.m. nella riga $\lambda = 2536.52 \text{ \AA}$ corrispondente ad un quanto di energia $h\nu = hc/\lambda = 4.86 \text{ eV}$. Infatti l'atomo eccitato dalla collisione con l'elettrone ritorna successivamente nello stato fondamentale emettendo un fotone.

Lo spettro dell'atomo di idrogeno fu spiegato da Bohr nel 1913 sulla base delle seguenti ipotesi:

1) Gli elettroni possono stare solo su certe orbite, ed emettono radiazione e.m. solo quando passano da un'orbita all'altra. La frequenza della radiazione emessa è data da

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \quad (4.22)$$

dove ΔE è la differenza tra le energie delle due orbite. L'atomo non può emettere quando si trova in una orbita stazionaria (quindi la stabilità dell'atomo è postulata da Bohr).

2) Le orbite permesse sono solo quelle per cui il momento angolare nella direzione perpendicolare al piano dell'orbita (che sceglieremo come asse z) è quantizzato secondo la regola

$$M_z = n\hbar, \quad n \text{ intero} \quad (4.23)$$

(commenteremo dopo perché Bohr fu portato a questa congettura).

3) Fatta eccezione per queste due regole si possono applicare le leggi classiche del moto.

Consideriamo il caso particolare di un'orbita circolare e di un atomo idrogenoide con carica Ze . Trascuriamo il rapporto tra la massa dell'elettrone e la massa del nucleo. L'energia dell'elettrone è allora data da

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi r} \quad (4.24)$$

Per avere un'orbita stazionaria occorre che la forza centrifuga e quella coulombiana si compensino

$$\frac{Ze^2}{4\pi r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (4.25)$$

segue

$$mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi r} \quad (4.26)$$

quindi l'energia cinetica è pari alla metà del modulo dell'energia coulombiana e segue

$$E = -\frac{Ze^2}{8\pi r} \quad (4.27)$$

La regola 2) richiede, per un'orbita circolare

$$mvr = n\hbar \implies v = \frac{n\hbar}{mr} \quad (4.28)$$

si trova allora

$$mv^2 = \frac{n^2\hbar^2}{mr^2} \quad (4.29)$$

da cui

$$\frac{Ze^2}{4\pi r} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^2} \quad (4.30)$$

Dunque i raggi delle orbite stazionarie sono quantizzati e dati dall'espressione

$$r_n = \frac{4\pi n^2\hbar^2}{Ze^2m} \quad (4.31)$$

Per $n = 1$ e $Z = 1$ si definisce il raggio di Bohr

$$a_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (4.32)$$

Si trova così che i valori permessi dell'energia sono

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^4 m}{2(4\pi)^2 \hbar^2} \quad (4.33)$$

Ricordando l'espressione per i termini spettrali dell'atomo di idrogeno (vedi eq. (5.4))

$$E_n = -hc \frac{R}{n^2} \quad (4.34)$$

si trova per la costante di Rydberg

$$R = \frac{mZ^2 e^4}{(4\pi)^3 c \hbar^3} \quad (4.35)$$

Inserendo i valori numerici si ha (per l'atomo di idrogeno)

$$R = 13.6 \text{ eV} \quad (4.36)$$

in ottimo accordo con il valore sperimentale.

Originariamente Bohr assunse per le energie degli stati stazionari l'espressione data dai termini spettrali. Fece inoltre l'ipotesi che per grandi numeri quantici la frequenza della radiazione emessa calcolata classicamente (cioè data dalla frequenza di rotazione dell'elettrone) coincidesse con quella ottenuta dai termini spettrali. Questo è ragionevole dato che per grandi n e m i livelli si infittiscono e tendono ad un continuo, come ci si aspetta classicamente. Questa ipotesi si chiama il principio di corrispondenza. Da questa identificazione si ricava l'espressione per la costante di Rydberg e quindi la quantizzazione dei raggi delle orbite e del momento angolare.

Sebbene questo risultato di Bohr sia stato uno dei primi successi dell'ipotesi quantistica è chiaro che eravamo ben lontani dall'aver una teoria soddisfacente. Comunque le idee di Bohr furono generalizzate in seguito da Sommerfeld e Watson (1915) che considerarono moti periodici e proposero la loro quantizzazione richiedendo che i seguenti integrali di fase soddisfacessero la condizione

$$\oint p_i dq_i = 2\pi n_i \hbar \quad (4.37)$$

con (p_i, q_i) variabili canonicamente coniugate ed n_i interi arbitrari. L'integrale è esteso ad un periodo del moto. Da queste regole si ricavano facilmente le energie di un oscillatore armonico

$$E_n = nh\nu \quad (4.38)$$

Infatti, dato che energia e tempo sono variabili canonicamente coniugate, segue

$$\int_0^T E dt = ET = nh \quad (4.39)$$

e da $T = 1/\nu$, segue $E = nh\nu$ (ma la meccanica quantistica da $E_n = (n + \frac{1}{2})h\nu$ e le energie dei livelli atomici nel caso di orbite ellittiche. Si può anche osservare che dalla quantizzazione di Sommerfeld e Watson segue subito la condizione di Bohr. Infatti, usando coordinate polari (r, θ, ϕ) , si ha che p_ϕ è la componente del momento angolare perpendicolare al piano dell'orbita, e quindi

$$\oint p_\phi d\phi = nh \longrightarrow 2\pi M_z = nh \longrightarrow M_z = n\hbar \quad (4.40)$$

Capitolo 5

Onde di De Broglie (1923).

L'ipotesi di De Broglie era che ad una particella materiale con massa a riposo m fosse associata un'onda

$$\psi(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (5.1)$$

con \vec{k} , vettore di propagazione, parallelo all'impulso \vec{p} della particella e ω legato all'energia dalla stessa relazione valida per la radiazione e.m., cioè dalla relazione di Planck

$$E = h\nu = \hbar\omega. \quad (5.2)$$

Partendo da questa ipotesi si trattava di ricavare la relazione tra impulso e lunghezza d'onda, in modo da stabilire una relazione tra le caratteristiche corpuscolari E e \vec{p} e quelle ondulatorie ω e \vec{k} , dove $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$.

Per il fotone (caso a massa zero) questa relazione era già stata stabilita da Planck ed Einstein

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (5.3)$$

con

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}. \quad (5.4)$$

Per una particella materiale libera l'onda associata sarà la (5.1), o più precisamente un pacchetto d'onde, la cui velocità è perciò data dalla velocità di gruppo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (5.5)$$

supposta nota la relazione tra ω e k : $\omega = \omega(k)$, cioè la relazione di dispersione.

De Broglie identificò v_g con la velocità della particella.; ricordiamo che, come si è visto nella parte dedicata alla relatività speciale, le velocità di gruppo si compongono con la stessa legge delle velocità di particella.

Notare che l'esistenza di una relazione di dispersione $\omega = \omega(k)$ presuppone che il fenomeno sia governato da un'equazione differenziale per $\psi(\vec{x}, t)$ alle derivate parziali (a coefficienti costanti), come avviene in tutti i fenomeni ondulatori. Dalla (5.5), se v_g è la velocità v della particella, segue

$$v_g = v = \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{dk}, \quad (5.6)$$

ovvero

$$\frac{dk}{dv} = \frac{1}{v} \frac{d\omega}{dv}. \quad (5.7)$$

Usando la (5.2) si ha

$$\hbar\omega = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (5.8)$$

per cui si ha

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{mc^2}{\hbar} \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{v}{c^2}; \quad (5.9)$$

sostituendo nella (5.7) si ha

$$\frac{dk}{dv} = \frac{m}{\hbar(1-\beta^2)^{3/2}}. \quad (5.10)$$

Se si integra quest'espressione, supponendo che

$$k(v=0) = 0, \quad (5.11)$$

si ha

$$k = \int_0^v \frac{m dv}{\hbar(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{mc}{\hbar} \int_0^\beta \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}. \quad (5.12)$$

Posto $\beta = \text{sen}(\alpha)$

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \int_0^\alpha \frac{\cos(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} d\alpha = \tan(\alpha), \quad (5.13)$$

cioè

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.14)$$

e quindi

$$k = \frac{m}{\hbar} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{p}{\hbar} \quad (5.15)$$

(essendo $p = m\gamma v$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$).

Dalla (5.15) segue la relazione di De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (k = \frac{2\pi}{\lambda}). \quad (5.16)$$

Quindi anche per le particelle materiali si ha

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (5.17)$$

identiche alle (5.3).

La relazione di De Broglie (5.16) implica una dipendenza della lunghezza d'onda λ dalla velocità

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\gamma v} = \frac{h}{mc} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}, \quad (5.18)$$

dove

$$\frac{\hbar}{mc} = \lambda_c \quad (5.19)$$

è la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone, se m è la massa dell'elettrone, che si può anche leggere come una dipendenza di ω da k , cioè una relazione di dispersione.

La relazione $\omega = \omega(k)$ si può ricavare dalla prima delle (5.17), ricordando la relazione energia-impulso

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (5.20)$$

cioè

$$\hbar\omega = \sqrt{c^2\hbar^2k^2 + m^2c^4}, \quad (5.21)$$

e si vede che non è lineare, cioè è una relazione di dispersione dispersiva, con velocità di fase

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \quad (5.22)$$

non costante e quindi diversa dalla velocità di gruppo v_g .

La (5.18) ci dice che la lunghezza d'onda di una particella materiale è inversamente proporzionale alla massa e decrescente con la velocità.

Nel limite non relativistico, cioè per $\beta \simeq 0$, se si definisce l'energia cinetica T della particella con

$$E = T + mc^2 \quad (5.23)$$

cioè

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + O(\beta^4);$$

si ha dalla (5.18)

$$\lambda = \frac{h}{m\gamma c} = \frac{h}{mv} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O(c^{-4}) \right), \quad (5.24)$$

cioè

$$\lambda_{n.r.} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}. \quad (5.25)$$

Quindi la relazione di De Broglie vale anche nel caso non relativistico.

È interessante osservare che la relazione di De Broglie permette di ricavare in modo molto semplice la regola di quantizzazione del momento angolare che porta allo spettro dell'atomo di idrogeno. Infatti se l'onda di De Broglie deve corrispondere ad un moto circolare occorrerà richiedere che in una circonferenza ci stia un numero intero di lunghezze d'onda (vedi Fig. 5.1) e quindi

$$2\pi r = n\lambda, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Ed usando $\lambda = h/p$ segue subito

$$pr = M_z = n\hbar \quad (5.27)$$

che coincide con la (4.23).

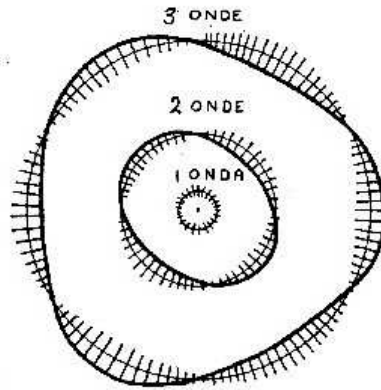


Figura 5.1: La relazione di De Broglie applicata all'atomo di idrogeno

Capitolo 6

L'esperimento di Davisson e Germer (1927).

La verifica sperimentale dell'esistenza delle onde di De Broglie fu data da Davisson e Germer (1927), che utilizzarono un fascio di elettroni a 50 eV incidente su di un cristallo di Nichel (vedi Fig. 6.1. L'impulso degli elettroni

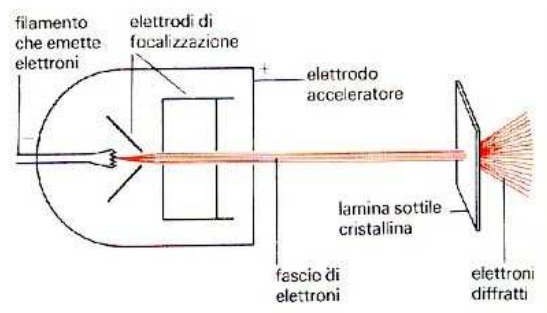


Figura 6.1: Il dispositivo sperimentale di Davisson e Germer.

era perciò

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2mT} = 3,8 \cdot 10^{-19} \frac{\text{gr cm}}{\text{sec}}, \\ v &= \frac{p}{m} = 4,2 \cdot 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

dove il valore di v , pari a circa $1/100$ di c , giustifica l'uso delle relazioni non relativistiche.

Gli elettroni avevano quindi una lunghezza d'onda data da

$$\lambda = \frac{h}{mv} \simeq 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm.} \quad (6.2)$$

Questa lunghezza d'onda è dello stesso ordine di grandezza di quella dei raggi X utilizzati in un analogo esperimento e che danno luogo a figure di diffrazione.

Davisson e Germer ottennero delle figure di diffrazione simili, dimostrando così l'aspetto ondulatorio degli elettroni (vedi Fig. 6.2). Vediamo più

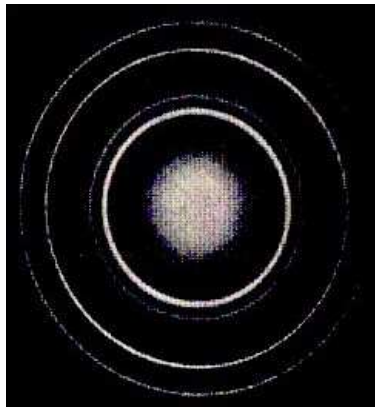


Figura 6.2: La figura di diffrazione ottenuta da Davisson e Germer.

in dettaglio questo esperimento. Un cristallo di Nichel viene investito da un fascio di elettroni emessi da un cannone elettronico, nel quale vengono accelerati ad un'energia di 50eV . Il cristallo è posto nel vuoto e può essere fatto ruotare attorno alla direzione del fascio e un rivelatore, posto ad un angolo θ rispetto all'asse, può anch'esso essere ruotato attorno all'asse.

Vediamo ora come si può descrivere l'interazione degli elettroni con la struttura cristallina. Questa, essendo una struttura periodica tridimensionale, può essere pensata come ottenuta dalla ripetizione di un cella unitaria, che ha la forma di un parallelepipedo, nei cui vertici possiamo immaginare gli atomi. Se indichiamo con \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 tre vettori, linearmente indipendenti, che individuano i vertici della cella, possiamo rappresentare la posizione di ogni atomo del cristallo con

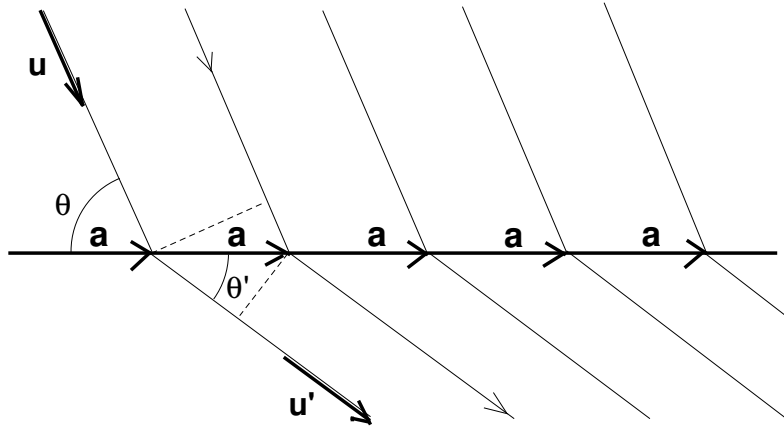


Figura 6.3: Diffrazione da una catena di atomi.

$$\vec{x} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3, \quad (6.3)$$

dove n_1 , n_2 e n_3 sono tre numeri interi.

Prendiamo in esame per ora una catena unidimensionale di atomi, come indicata in figura (6.3), dove \vec{u} e \vec{u}' sono le direzioni del raggio incidente e uscente rispettivamente e dove la lunghezza d'onda λ del raggio incidente è la stessa di quello uscente (si esclude qui il contributo dell'effetto Compton, nel quale si ha un raggio uscente con frequenza minore e quindi con lunghezza d'onda maggiore).

Vedremo dopo come si ottiene il caso tridimensionale.

La differenza di cammini ottici di due raggi adiacenti, come si vede dalla figura (6.3), è data da

$$a \cos \theta' - a \cos \theta, \quad (6.4)$$

e, per due raggi che investono due atomi a una distanza $n_1 a$, avremo

$$n_1(a \cos \theta' - a \cos \theta). \quad (6.5)$$

Poiché

$$a \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{u}, \quad a \cos \theta' = \vec{a} \cdot \vec{u}', \quad (6.6)$$

si ha anche che la differenza dei cammini è data da

$$n_1 \vec{a} \cdot (\vec{u}' - \vec{u}), \quad (6.7)$$

e la condizione di Bragg, affinché si abbia un massimo d'intensità nella direzione di \vec{u}' , è

$$n_1 \vec{a} \cdot (\vec{u}' - \vec{u}) = m\lambda, \quad (6.8)$$

dove m è un numero intero.

Notare che questa condizione fissa solo l'angolo che il vettore \vec{u}' forma con \vec{a} e quindi i vettori \vec{u}' che eventualmente soddisfano la relazione di Bragg formano un cono attorno alla direzione di \vec{a} .

Se si chiede che questa condizione valga per ogni valore di n_1 , cosicché tutti i raggi diffusi da tutti gli atomi della catena emettano in fase e non solo per due, allora la (6.8) equivale a

$$\vec{a} \cdot (\vec{u}' - \vec{u}) = m_1 \lambda, \quad (6.9)$$

dove m_1 è un numero intero, infatti solo in questo caso la (6.8) è soddisfatta per ogni n_1 , poiché solo un numero intero, moltiplicato per un numero intero qualsiasi da un numero intero.

Nel caso tridimensionale, se \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 si indicano tre vettori linearmente indipendenti che definiscono la cella elementare, avremo

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \cdot (\vec{u}' - \vec{u}) = m_1 \lambda, \\ \vec{e}_2 \cdot (\vec{u}' - \vec{u}) = m_2 \lambda, \\ \vec{e}_3 \cdot (\vec{u}' - \vec{u}) = m_3 \lambda, \end{cases} \quad (6.10)$$

con m_1 , m_2 e m_3 numeri interi. Infatti, così come si richiedeva che la (6.9) valesse per ogni n_1 , cioè per ogni atomo della catena 1-dimensionale in direzione di \vec{a} , per avere un effetto cumulativo, ora si richiede che anche i raggi incidenti lungo le altre direzioni e quindi su tutto il volume del cristallo siano diffusi in fase.

E' chiaro che potremmo avere un effetto osservabile anche se ciò avvenisse solo parzialmente, ma noi studiamo qui le condizioni affinché tutti gli atomi diffondano in fase.

Riassumendo, data una cella elementare e quindi la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, le equazioni (6.10) determinano, eventualmente per ogni direzione incidente, la direzione dei raggi uscenti per i quali si ha un massimo d'intensità.

Per risolvere le (6.10) introduciamo la terna duale \vec{v}_i ($i = 1, 2, 3$) alla terna \vec{e}_i , definita dalle equazioni

$$\vec{v}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.11)$$

Si dimostra che la terna di vettori linearmente indipendenti \vec{v}_i esiste ed è unica.

(La dimostrazione è immediata se si osserva che la matrice che ha le colonne formate dai vettori \vec{e}_i è non singolare, poichè i vettori \vec{e}_i sono linearmente indipendenti. Quindi ammette un'inversa e questa inversa è unica. La base duale è detta anche reciproca).

Prima però di utilizzare la base duale facciamo un'osservazione. Se passiamo al caso della diffrazione di particelle materiali, si ha che, in base alla relazione di De Broglie (5.18), l'impulso \vec{p} di una particella materiale è legato al vettore di propagazione \vec{k} dalla relazione

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi}) \quad (6.12)$$

dove, nel nostro caso

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}, \quad \vec{k}' = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}'. \quad (6.13)$$

Ne segue che le (6.10) si possono scrivere

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{p}' - \vec{p}) = m_i h, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.14)$$

Se adesso si sviluppa la variazione d'impulso sulla base duale,

$$\vec{p}' - \vec{p} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3, \quad (6.15)$$

e si sostituisce nelle (6.14), si ha

$$a_i = m_i h, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.16)$$

e quindi

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} = h(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3), \quad (6.17)$$

dova \vec{q} è l'impulso trasferito al reticolo cristallino.

Dalla (6.17) si vede che l'impulso trasferito è quantizzato. Quest'equazione ci mostra quali sono le direzioni in cui si hanno i massimi di diffrazione e anche che non tutte le direzioni (di \vec{p}) danno luogo a massimi di diffrazione.

Capitolo 7

Il Principio di Indeterminazione

Il principio di indeterminazione fu formulato da Heisenberg nel 1927 e fu derivato dalle leggi della meccanica quantistica. Ancora oggi nelle trattazioni moderne dell'argomento, questo principio viene dedotto piuttosto che assunto tra i postulati della meccanica quantistica. Però il principio di indeterminazione è il cuore stesso della meccanica quantistica e mostra esattamente il punto in cui la fisica classica fallisce. Il motivo per cui non è facilmente assumibile tra i postulati è che si tratta di un principio negativo, nel senso che pone delle limitazioni concettuali alla osservabilità delle grandezze fisiche. Non è, in altri termini, un principio costruttivo. L'enunciato è:

Due grandezze canonicamente coniugate non possono essere misurate contemporaneamente con precisione assoluta. Il limite inferiore sul prodotto delle indeterminazioni è $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$.

Mostriamo che questa indeterminazione non ha a che fare con possibili inadeguatezze degli strumenti di misura ma è invece una proprietà fondamentale della natura legata alla dualità onda-corpuscolo della materia e della luce. Viene così a mancare uno dei cardini della meccanica classica, cioè la possibilità di assegnare ad un dato istante coordinate e velocità in modo da poter prevedere il moto successivo del sistema. Si perde così il determinismo classico. Vediamo alcuni esempi di questa impossibilità:

Misura di posizione con un diaframma. Supponiamo di voler misurare la posizione e l'impulso lungo la direzione x di un elettrone in un fascio che si muova lungo l'asse z . A questo scopo possiamo usare un diaframma di larghezza d (vedi Fig. 7.1). La posizione lungo l'asse x è definita con una precisione

$$\Delta x = d \tag{7.1}$$

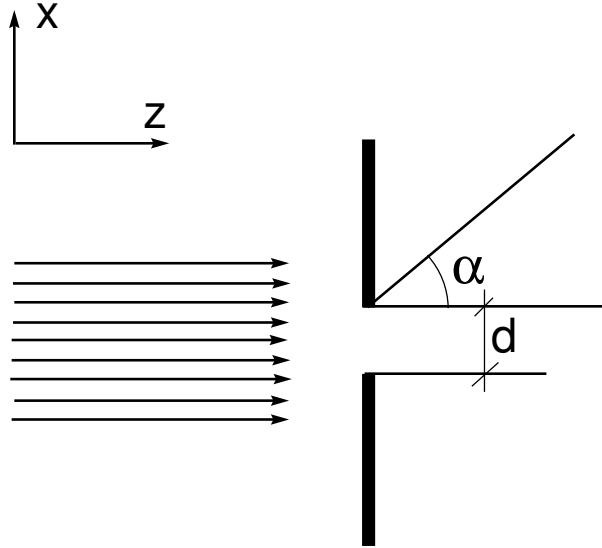


Figura 7.1: La misura della posizione con un diaframma

Però sappiamo che all'elettrone è associata una lunghezza d'onda data da $\lambda = h/p$. Quindi l'elettrone verrà diffuso dalla fenditura in maniera analoga ad un raggio luminoso. Assumendo che il modulo dell'impulso non venga modificato, l'elettrone acquisterà una componente di impulso lungo l'asse x dell'ordine di

$$p_x \approx p \sin \alpha \quad (7.2)$$

Per misurare p_x occorre misurare l'angolo α , cosa che in linea di principio si può fare raccogliendo gli elettroni su uno schermo posto dopo la fenditura. Ma dato che sullo schermo si forma una figura di diffrazione la massima precisione con cui si può misurare p_x corrisponde ad un angolo

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{pd} = \frac{h}{p\Delta x} \quad (7.3)$$

Quindi

$$\Delta p_x \approx p\alpha \approx \frac{h}{\Delta x} \quad (7.4)$$

e

$$\Delta p_x \Delta x \approx \hbar \quad (7.5)$$

È impossibile migliorare il risultato per il prodotto delle incertezze, dato che per migliorare la misura di posizione occorre scegliere una fenditura più piccola, aumentando in questo modo l'effetto della diffrazione e quindi l'incertezza sulla misura della componente x dell'impulso. Un altro classico esperimento concettuale è:

Il microscopio di Heisenberg. Supponiamo di avere un elettrone praticamente a riposo e cerchiamo di misurare la sua posizione e velocità lungo l'asse x . Si può immaginare di osservare l'elettrone con un microscopio con l'obiettivo disposto come in Fig. 7.2. L'elettrone lo immaginiamo collocato nel

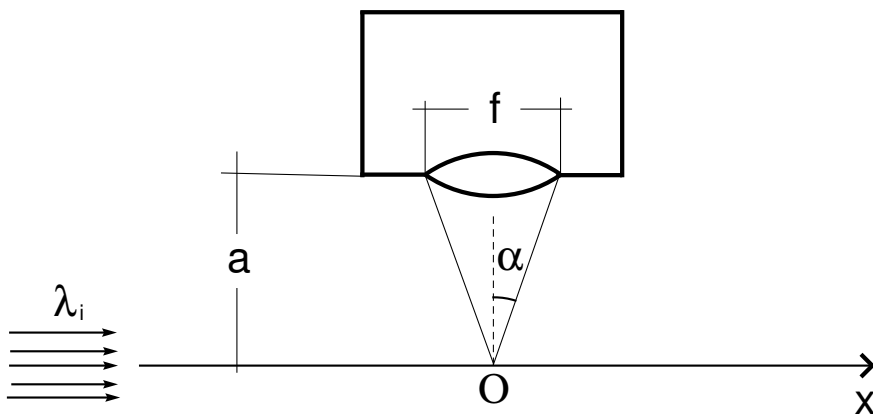


Figura 7.2: Il microscopio di Heisenberg

punto O e lo osserviamo con un fascio di luce parallelo all'asse x . La luce diffusa dall'elettrone viene osservata al microscopio e dalla conoscenza della distanza dell'elettrone dall'obiettivo e dall'angolo con il quale la luce diffusa viene raccolta dal microscopio si può determinare la posizione lungo x . Indichiamo con λ_i la lunghezza d'onda della radiazione incidente e con λ quella della luce diffusa (infatti sappiamo dall'effetto Compton che le due lunghezze d'onda sono in generale diverse). Mostriamo che la posizione dell'elettrone non può essere misurata con precisione superiore a

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (7.6)$$

Infatti si ha dalla Fig. 7.2 che l'angolo α è determinato da

$$\sin \alpha \approx \frac{f}{a} \quad (7.7)$$

con a la distanza dell'elettrone dall'obiettivo. A causa della diffrazione della luce da parte del diaframma del microscopio, la precisione con la quale si determina la direzione dei fotoni, con ragionamento analogo al caso precedente non potrà essere migliore di un angolo β (vedi Fig. 7.3) tale che

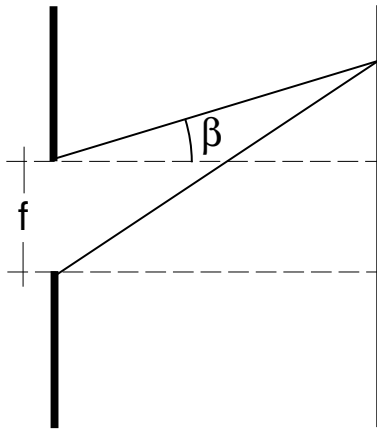


Figura 7.3: Illustrazione dell'equazione (7.8)

$$\sin \beta \approx \frac{\lambda}{f} \quad (7.8)$$

Dunque (trascurando le dimensioni della camera)

$$\Delta x \approx a \sin \beta = a \frac{\lambda}{f} = \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (7.9)$$

L'indeterminazione sulla posizione può essere ridotta solo riducendo la lunghezza d'onda λ , ma occorre ricordare che questa lunghezza d'onda è determinata dall'effetto Compton. Quindi l'impulso dell'elettrone in direzione x viene modificato in relazione alla formula (3.14)

$$h\nu_i = h\nu \cos \theta + cp_x \quad (7.10)$$

dove θ è l'angolo di diffusione (vedi Fig. 3.3). Dunque

$$p_x = \frac{h\nu_i}{c} \left(1 - \frac{\nu}{\nu_i} \cos \theta \right) \quad (7.11)$$

Per poter osservare il fotone diffuso, l'angolo θ dovrà essere compreso nell'intervallo

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha \quad (7.12)$$

L'impulso p_x avrà una indeterminazione data da

$$\frac{h\nu_i}{c} \left(1 - \frac{\nu}{\nu_i} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) \leq p_x \leq \frac{h\nu_i}{c} \left(1 - \frac{\nu}{\nu_i} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right) \quad (7.13)$$

segue dunque

$$\frac{h\nu_i}{c} \left(1 - \frac{\nu}{\nu_i} \sin \alpha \right) \leq p_x \leq \frac{h\nu_i}{c} \left(1 + \frac{\nu}{\nu_i} \sin \alpha \right) \quad (7.14)$$

da cui l'indeterminazione su p_x

$$\Delta p_x \approx \frac{h\nu}{c} \sin \alpha = \frac{h}{\lambda} \sin \alpha \quad (7.15)$$

Dunque tanto più si migliora la risoluzione sulla posizione riducendo λ , tanto più si aumenta l'indeterminazione sull'impulso. Infatti segue da questa relazione e dalla (7.6)

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \quad (7.16)$$

Il principio di indeterminazione può essere considerato come un caso particolare del principio di complementarità di Bohr:

I fenomeni atomici non possono essere descritti con la completezza richiesta dalla meccanica classica, alcuni degli elementi che qui si completano reciprocamente risultano incompatibili nell'ambito della meccanica quantistica.

Abbiamo già visto come la conoscenza simultanea di variabili coniugate risulti impossibile da un punto di vista quantistico. Un ulteriore esempio è la dualità onda-corpuscolo. In questo caso non è possibile, con un singolo esperimento, mettere in luce contemporaneamente l'aspetto corpuscolare e l'aspetto ondulatorio. Consideriamo un esperimento di interferenza con fotoni, illustrato in Fig. (7.4). Sullo schermo si ha interferenza con un angolo tra i due primi picchi dato da

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{a} \quad (7.17)$$

Per mettere in luce l'aspetto corpuscolare dovremmo misurare la posizione del fotone con un errore inferiore a $\Delta y = a/2$ per poter almeno determinare

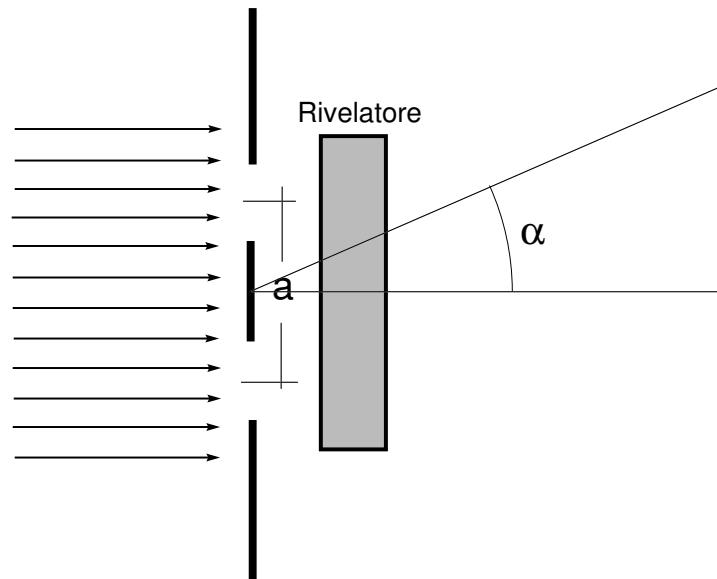


Figura 7.4: L'esperimento delle due fenditure (di Young)

da quale delle due fessure è passato il fotone. Inoltre l'impulso trasverso acquistato dal fotone all'interno del rivelatore di posizione R a causa delle collisioni subite non dovrebbe superare $p\alpha$ per non distruggere l'interferenza. Quindi si dovrebbe avere

$$\Delta y \Delta p_y < \frac{a}{2} p \alpha = \frac{a}{2} \frac{h \lambda}{a} = \frac{h}{2} \quad (7.18)$$

in contraddizione con il principio di indeterminazione.

Capitolo 8

Il Principio di Sovrapposizione

Il principio di indeterminazione permette di capire la fisica quantistica però la sua natura negativa lo rende inadatto a costruire una teoria. Più utile risulta il principio di sovrapposizione. Ricordiamo quanto abbiamo detto per i fotoni, cioè che la connessione tra il campo e.m. e la descrizione corpuscolare è tramite la relazione

$$\bar{n} = \frac{1}{h\nu} \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \quad (8.1)$$

dove \bar{n} è il numero medio di fotoni. In questa descrizione il sistema (o il suo stato) è descritto dai campi e.m. che ne descrivono l'aspetto ondulatorio e si assegnano delle regole per passare alla descrizione corpuscolare. Osserviamo che gli stati del campo e.m. si possono combinare linearmente tra loro per descrivere un altro stato, come segue dalle proprietà vettoriali dei campi. Possiamo dunque dire, generalizzando questa idea anche alla materia (ricordiamo che anche agli elettroni, secondo De Broglie si associa un'onda e quindi in definitiva un campo) che:

Lo stato di un sistema può essere considerato come la sovrapposizione di più stati

Consideriamo un esempio dall'ottica. In Fig. 8.1 è rappresentato un raggio di luce con polarizzazione rettilinea, che attraversa un cristallo polarizzante che funge quindi da analizzatore. Il polarizzatore è posto lungo l'asse y con la luce che si propaga in direzione z e polarizzata lungo una direzione che forma un angolo α con l'asse x . La legge di Malus dice che l'intensità della luce che attraversa il cristallo è una frazione pari a $\sin^2 \alpha$ dell'intensità iniziale. Inoltre dopo il polarizzatore la luce è polarizzata in direzione y . Per poter dare una interpretazione corpuscolare è necessario pensare a

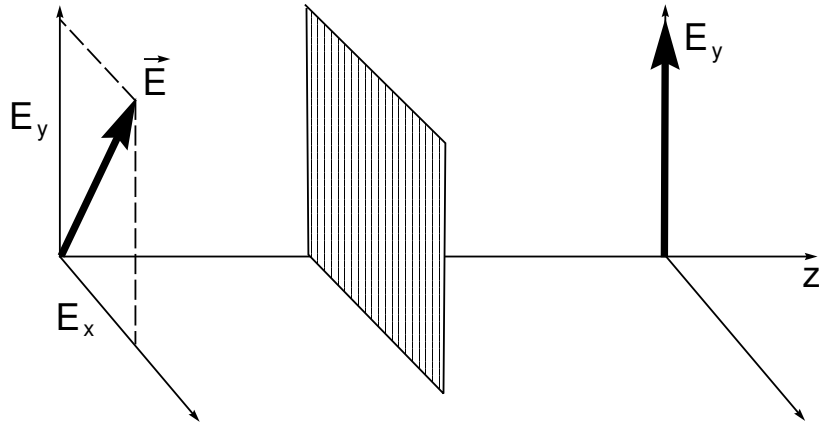


Figura 8.1: L'effetto di un polarizzatore sul campo elettrico

fotoni polarizzati, ognuno con due polarizzazioni indipendenti (come vuole la descrizione ondulatoria). Potremo dire che se il fotone è polarizzato lungo l'asse y passerà inalterato, altrimenti se è polarizzato lungo x verrà assorbito. La domanda delicata è: cosa accade se il fotone è polarizzato in una direzione intermedia? Il campo originale può essere decomposto nelle due componenti

$$\vec{E} = E(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} \quad (8.2)$$

Dato che dopo l'analizzatore si ha un'intensità proporzionale a $\sin^2 \alpha$, significa che il numero medio di fotoni è diminuito dello stesso fattore. Potremmo allora dire che il singolo fotone ha un'ampiezza di probabilità di passare attraverso l'analizzatore proporzionale a E_y , quindi a $\sin \alpha$, ed una probabilità pari a $\sin^2 \alpha$. Un modo conveniente per descrivere questa situazione è quello di associare al fotone oltre all'energia ed all'impulso nel modo che sappiamo, anche un vettore a due componenti che giace nel piano di polarizzazione. Introduciamo allora i vettori

$$\begin{aligned} (\text{fotone polarizzato lungo } x) &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |x\rangle \\ (\text{fotone polarizzato lungo } y) &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |y\rangle \end{aligned} \quad (8.3)$$

Lo stato generico di fotone è allora descritto come una sovrapposizione di due stati. La scelta di questi stati è materia di convenienza ed è fissata, in questo

caso, dall'analizzatore che definisce i due stati corrispondenti alla trasmissione totale ed all'assorbimento. Osseviamo anche che dopo l'analizzatore il fotone si trova con certezza nello stato $|y\rangle$, cioè l'analizzatore ha proiettato il fotone in uno stato tale da farlo passare con probabilità 1 attraverso un ulteriore analizzatore con la stessa polarizzazione.

Vediamo che in modo del tutto naturale emerge la possibilità di descrivere gli stati quantistici in termini di quantità che si possono combinare in modo lineare. Questo significa che gli stati di un sistema possono essere descritti in termini di uno spazio vettoriale.

Capitolo 9

Quantizzazione spaziale

Abbiamo visto nel caso dell'atomo di idrogeno che la componente del momento angolare nella direzione perpendicolare all'orbita è quantizzata con la regola $M_z = n\hbar$ con n intero. La quantizzazione del momento angolare fu verificata da Stern e Gerlach (1921-22). L'esperimento, descritto in Fig. 9.1 consiste nel far passare un fascio di atomi di argento, prodotto da un forno, attraverso le espansioni polari di un magnete, il quale ha uno dei due poli conformato ad angolo acuto, in modo da produrre un campo magnetico fortemente inhomogeneo e perpendicolare al fascio. In genere un atomo (od una molecola) che possiedono un momento angolare intrinseco, hanno anche un momento magnetico proporzionale al momento angolare

$$\vec{\mu} = a\vec{M} \quad (9.1)$$

L'energia associata ad un momento magnetico in un campo \vec{H} è data da

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{H} \quad (9.2)$$

Se, come in figura, \vec{H} punta in direzione z e dipende solo dalla variabile z , $H = H(z)$, su ogni atomo agisce una forza

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(-\vec{\mu} \cdot \vec{H}) = \mu_z \vec{\nabla}H(z) = \mu_z \frac{\partial H(z)}{\partial z} \vec{k} \quad (9.3)$$

con \vec{k} il versore dell'asse z . Questa forza produce una deviazione del fascio in direzione di z , a seconda del segno di μ_z . Gli atomi incidenti avranno una distribuzione causale per quanto riguarda la direzione di μ e quindi ci si

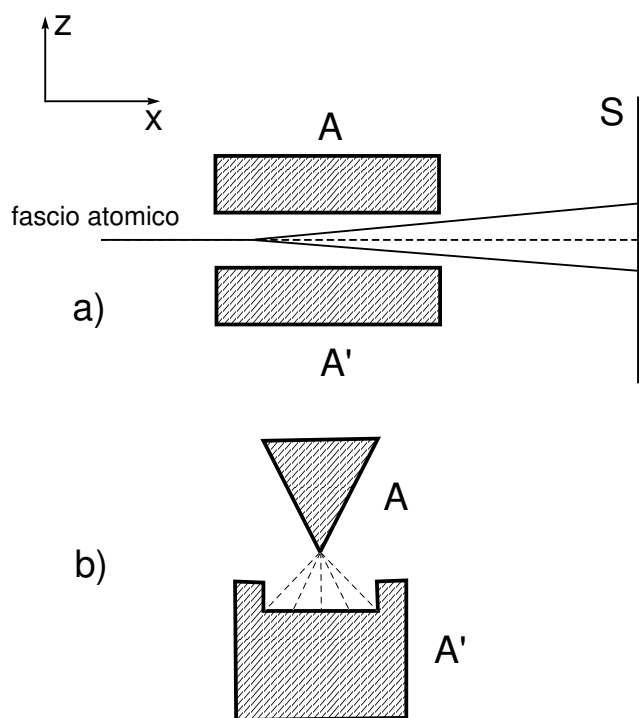


Figura 9.1: Disposizione dell'esperimento di Stern e Gerlach in figura a). In figura b) il particolare del magnete

aspetta che il fascio si allarghi lungo l'asse z . Si osserva invece che il fascio si separa in due fasci distinti di uguale intensità. Questo effetto fu chiamato di quantizzazione spaziale. L'interpretazione è appunto la quantizzazione del momento angolare intrinseco (che in genere viene chiamato spin e si indica con \vec{S}). Come vedremo in seguito, il fatto che il fascio si separa in due sole componenti, porta alla conclusione che l'atomo di argento deve avere componenti di spin lungo l'asse z , S_z^\pm date da

$$S_z^\pm = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (9.4)$$

Questa è una ulteriore novità perchè nell'atomo di Bohr il momento angolare assume valori che sono multipli interi di \hbar . In ogni caso quello che qui ci interessa è che tramite l'esperimento di Stern e Gerlach si può mostrare che lo spin sta all'atomo di argento (o meglio ad un elettrone perchè si può

mostrare che il momento angolare è in questo caso dovuto ad un singolo elettrone, mentre il momento angolare risultante da tutti gli altri elettroni è nullo) come la polarizzazione sta al fotone. Infatti, mettiamo due apparati di Stern e Gerlach identici in serie, e blocchiamo uno dei fasci in uscita, per esempio quello corrispondente a S_z^- . L'altro fascio, viene ulteriormente deviato dal secondo apparato, ma viene lasciato inalterato in intensità. Se invece orientiamo il secondo apparato lungo l'asse x , il fascio S_z^+ si separa ulteriormente in due fasci di uguale intensità S_x^\pm . L'apparato di Stern e Gerlach agisce in modo analogo al polarizzatore nel caso della luce. Dopo il primo apparato lo spin è lungo l'asse z , questo stato si può rappresentare come una combinazione lineare di due stati corrispondenti alle due componenti S_x^\pm . In questo caso le due intensità risultano la metà delle intensità iniziali. Infatti in uno spazio a due dimensioni se si assegna un vettore $(1, 0)$ allo spin lungo l'asse x ed un vettore $(0, 1)$ allo spin lungo l'asse $-x$, risulta che lo spin lungo l'asse z può essere descritto da $(1, 1)/\sqrt{2}$, dove il fattore $\sqrt{2}$ è richiesto per conservare la normalizzazione dei vettori. Questo vettore (lo stato di spin lungo l'asse z) viene analizzato dall'apparato di Stern e Gerlach diretto lungo l'asse x e proiettato nei due fasci con ampiezza di probabilità $1/\sqrt{2}$ per ogni fascio. La probabilità di trovare lo spin lungo x o $-x$ è allora $1/2$. Vediamo anche in questo caso come la descrizione dello stato del sistema in termini di vettori risulti particolarmente conveniente. Osseviamo infine che l'apparato di misura agisce sullo spazio vettoriale come un operatore lineare sullo spazio vettoriale (cioè come una matrice), dato che prende il vettore iniziale e lo proietta su un ulteriore vettore.

Capitolo 10

Analogia tra ottica geometrica e dinamica del punto

10.1 L'equazione di Hamilton-Jacobi per sistemi conservativi.

Questo paragrafo è un richiamo di nozioni di meccanica analitica necessarie per lo sviluppo dell'argomento successivo.

Consideriamo l'azione di un sistema con n gradi di libertà, descritto dalle coordinate lagrangiane q_i , $i = 1, \dots, n$, con Lagrangiana L

$$W(q, t) = \int_0^t dt' L(q(t'), \dot{q}(t')) \quad (10.1)$$

W in generale è un funzionale delle coordinate $q_i(t)$ e una funzione del tempo finale t come indica la notazione usata. Per semplicità abbiamo fissato a zero il tempo iniziale, in quanto non dovremo variarlo.

L non dipende esplicitamente dal tempo, ne dipende solo attraverso le coordinate, quindi il sistema è conservativo.

Consideriamo adesso una variazione del tempo finale t e dei valori finali delle coordinate:

$$q_i(t') \rightarrow \bar{q}_i(t') = q_i(t') + \delta_0 q_i(t') \quad (10.2)$$

dove con δ_0 abbiamo indicato la variazione di q_i a tempo fissato. Dobbiamo

infatti considerare una variazione sia dell'argomento (tempo finale) che della forma della funzione $q_i(t')$.

Per W si ha

$$\delta W(q, t) = \int_0^t \left[\frac{\partial L}{\partial q_i(t')} - \frac{d}{dt'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \right] \delta_0 q_i(t') dt' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta_0 q_i(t) + L \delta t \quad (10.3)$$

dove $\delta_0 q_i(t)$ e δt sono le variazioni di q_i e t finali.:

$$t \rightarrow \bar{t} = t + \delta t, \quad q_i(t) \rightarrow \bar{q}_i(t) = q_i(t) + \delta_0 q_i(t) \quad (10.4)$$

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} \delta_0 q_i(t) &= \bar{q}_i(t) - q_i(t) = \\ &= \bar{q}_i(\bar{t}) - q_i(t) - (\bar{q}_i(\bar{t}) - \bar{q}_i(t)) = \\ &= \bar{q}_i(\bar{t}) - q_i(t) - \bar{q}_i(t) \delta t \end{aligned}$$

dove, a meno di termini di ordine superiore, si può porre $\bar{q}_i(t) \delta t = \dot{q}_i(t) \delta t$.

Poniamo

$$\delta q_i(t) = \bar{q}_i(\bar{t}) - q_i(t) \quad (10.5)$$

che è la variazione totale, quindi

$$\delta_0 q_i(t) = \delta q_i(t) - \dot{q}_i(t) \delta t \quad (10.6)$$

Se ora si calcola l'azione W lungo le traiettorie, quando cioè le equazioni del moto

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (10.7)$$

sono soddisfatte, si ha dalla (10.3)

$$\delta W(q, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \dot{q}_i(t) - L \right] \delta t \quad (10.8)$$

e, ricordando che è

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = p_i \dot{q}_i - L \quad (10.9)$$

si ha

$$\delta W(q, t) = p_i \delta q_i - H \delta t \quad (10.10)$$

dove δq_i e δt sono variazioni dei valori finali.

Dalla (10.10) si ha

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -H(p, q) \quad (10.11)$$

o anche

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(\frac{\partial W}{\partial q}, q\right) = 0 \quad (10.12)$$

che è l'equazione di Hamilton-Jacobi.

Quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi è un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine, in generale non lineare, per l'azione W calcolata lungo le traiettorie.

Vediamo quale forma assume quest'equazione per un sistema conservativo, la cui Hamiltoniana sia

$$H(p, q) = \sum_i^n \frac{1}{2m_i} p_i^2 + V(q), \quad p_i = m_i \dot{q}_i \quad (10.13)$$

si ha

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i^n \frac{1}{2m_i} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 + V(q) = 0 \quad (10.14)$$

Poiché H non dipende da t , si può provare a separare le variabili q_i e t ponendo

$$W = -Et + S(q) \quad (10.15)$$

con E costante di separazione, da cui

$$-E + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = 0 \quad (10.16)$$

S è detta l'azione ridotta e l'equazione (10.16) equazione di Hamilton-Jacobi per i sistemi conservativi.

Nel caso (10.13) si ha, per una singola particella di massa m e $(q_i) \equiv (x, y, z)$, $(\dot{q}_i) = \vec{v}$

$$\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)^2 + V(x, y, z) = E \quad (10.17)$$

cioè

$$(\vec{\nabla}S)^2 = 2m(E - V) = 2mT \quad (10.18)$$

dove T è l'energia cinetica.

Poiché S dipende solo da x, y, z e non dipende dal tempo, le superfici $S(x, y, z) = \text{costante}$ sono fisse nello spazio e coincidono per la (10.15) con le superfici $W(x, y, z; t) = \text{costante}$ a $t = 0$.

Fissato un tempo $t \neq 0$ si avrà che la superficie $W(x, y, z; t) = c$ coinciderà con la superficie $S(x, y, z) = c + Et$, e ad un istante $t' > t$ la superficie $W(x, y, z; t') = c$ coinciderà con la superficie $S(x, y, z) = c + Et'$. Cioè la superficie $W(x, y, z; t) = c$ è un fronte d'onda che si sposta nello spazio, coincidendo istante per istante con tutta la famiglia di superfici $S = \text{costante}$, ottenuta variando questa costante. Ci possiamo chiedere qual'è la velocità di questo fronte d'onda. Si può procedere come per il calcolo della velocità di fase di un'onda con fase istantanea data da $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$; in quel caso si poneva

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \vec{k} \cdot \vec{x}' - \omega t' \quad (10.19)$$

da cui

$$\vec{v}_f = \frac{\omega}{k} \text{vers} \vec{k} \quad (10.20)$$

o anche, differenziando $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{costante}$.

Si può allora differenziare l'equazione

$$W(x, y, z; t) = -Et + S(x, y, z) = \text{costante} \quad (10.21)$$

ottenendo

$$-Edt + \vec{\nabla}S \cdot d\vec{x} = 0 \quad (10.22)$$

cioè, per uno spostamento $d\vec{x}$ perpendicolare alla superficie $S = \text{costante}$, e quindi parallelo a $\vec{\nabla}S$, si ha

$$\frac{dx}{dt} = \frac{E}{|\vec{\nabla}S|} \quad (10.23)$$

Quindi, la velocità di fase di questo fronte d'onda è

$$\vec{v}_f = \frac{E}{|\vec{\nabla}S|} \vec{n} \quad (10.24)$$

con \vec{n} versore perpendicolare alla superficie $S = \text{costante}$, e, per la (10.18)

$$v_f = \frac{E}{\sqrt{2mT}} \quad (10.25)$$

Se v indica la velocità della particella si ha $T = \frac{1}{2}mv^2$, $p = mv$ e la (10.31) si può riscrivere

$$v_f = \frac{E}{p} \quad (10.26)$$

Si ha perciò che $v_f \neq v$, ma come vettori sono paralleli. Infatti v_f ha la direzione di \vec{n} , normale alla superficie $W = \text{costante}$ e \vec{v} ha la stessa direzione poichè per la (10.11) si ha

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \vec{p} = \frac{1}{m} \vec{\nabla}W = \frac{1}{m} \vec{\nabla}S \quad (10.27)$$

Come si vede l'azione calcolata lungo le traiettorie, cioè la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi, ci fornisce una descrizione ondulatoria del moto di una particella materiale.

Si può verificare che la relazione (10.32) vale anche per una particella libera relativistica, purchè con E si intenda l'energia totale (l'energia cinetica più l'energia di riposo mc^2 , con m massa di riposo della particella).

Si ha infatti per l'Hamiltoniana di una particella libera relativistica

$$H = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad (10.28)$$

da cui per la (10.16)

$$E = \sqrt{c^2 (\vec{\nabla}S)^2 + m^2 c^4} \quad (10.29)$$

o anche

$$E^2 = c^2(\vec{\nabla}S)^2 + m^2c^4 \quad (10.30)$$

L'equazione (10.24) diventa allora

$$\vec{v}_f = \frac{E}{|\vec{\nabla}S|} \vec{n} = \frac{cE}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}} \vec{n} = \frac{E}{p} \vec{n} \quad (10.31)$$

10.2 Il limite dell'ottica geometrica.

L'equazione d'onda per una componente del campo elettromagnetico ϕ , in un mezzo con indice di rifrazione n , è

$$\nabla^2\phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.32)$$

dove $n/c = v_f$ è la velocità nel mezzo e c è la velocità nel vuoto. Una soluzione della (10.32) si può porre nella forma

$$\phi(\vec{x}, t) = A(\vec{x}) \exp[+ik_0(L(\vec{x}) - ct)] \quad (10.33)$$

dove k_0 è il numero d'onde nel vuoto (modulo del vettore di propagazione)

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} \quad (10.34)$$

e L è detta iconale. Se k è il numero d'onde nel mezzo si ha

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = nk_0 \quad (10.35)$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{n} \frac{\omega}{k_0} = \frac{c}{n} \quad (10.36)$$

Se n è costante e se ϕ è un'onda piana, si ha

$$L(\vec{x}) = n\vec{n}' \cdot \vec{x} \quad (10.37)$$

dove \vec{n}' è la direzione di propagazione. Cioè si ha

$$\text{fase} = k_0(L(\vec{x}) - ct) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t \quad (10.38)$$

Se ora si sostituisce la (10.33) nella (10.32) si ha

$$\nabla^2 A + 2ik_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} L + ik_0 A \nabla^2 L - k_0^2 A (\vec{\nabla} L)^2 + n^2 k_0^2 A = 0 \quad (10.39)$$

e, poiché A e L sono reali, si ha

$$A \vec{\nabla}^2 L + 2(\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{\nabla} L) = 0 \quad (10.40)$$

$$\vec{\nabla}^2 A - k_0^2 (\vec{\nabla} L)^2 A + k_0^2 n^2 A = 0 \quad (10.41)$$

Quanto detto finora è esatto, senza approssimazioni. Se ora supponiamo che n ed A siano lentamente variabili, o più esattamente che siano circa costanti su di uno spazio pari ad una lunghezza d'onda, che è il limite dell'ottica geometrica, allora nell'equazione (10.41) si ha che i termini in k_0^2 sono dominanti e si ha

$$(\vec{\nabla} L)^2 = n^2 \quad (10.42)$$

che è l'equazione dell'iconale. Confrontata con l'equazione (10.18) si vede che c'è un'analogia tra l'ottica geometrica e l'equazione di moto di un punto materiale. Infatti l'una equazione si trasforma nell'altra con la sostituzione

$$L \leftrightarrow S, \quad n \leftrightarrow \sqrt{2m(E - V)} \quad (10.43)$$

Sempre in questo limite si può vedere come il principio di Hamilton sia analogo al principio di Fermat. Infatti, il principio di Hamilton si può scrivere

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (10.44)$$

e, nel caso conservativo, poiché $H = \text{costante} = E$, si ha

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - E) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0 \quad (10.45)$$

o anche, poiché $dt = ds/v = ds/\sqrt{2T/m}$

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2mT} ds = 0 \quad (10.46)$$

che, nell'analogia, diventa il principio di Fermat

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} n ds = 0 \quad (10.47)$$

dove la variazione è presa mantenendo gli estremi fissati della traiettoria del raggio luminoso. Il significato di questo principio è che il raggio luminoso nell'andare da s_1 a s_2 impiega il minor tempo possibile. Infatti

$$\frac{n}{c} ds = dt \quad (10.48)$$

è il tempo impiegato a percorrere l'intervallo ds alla velocità c/n . In questa formulazione piuttosto che di onda elettromagnetica si parla di raggio luminoso ed infatti questo principio permette di ricavare il percorso di un raggio di luce.

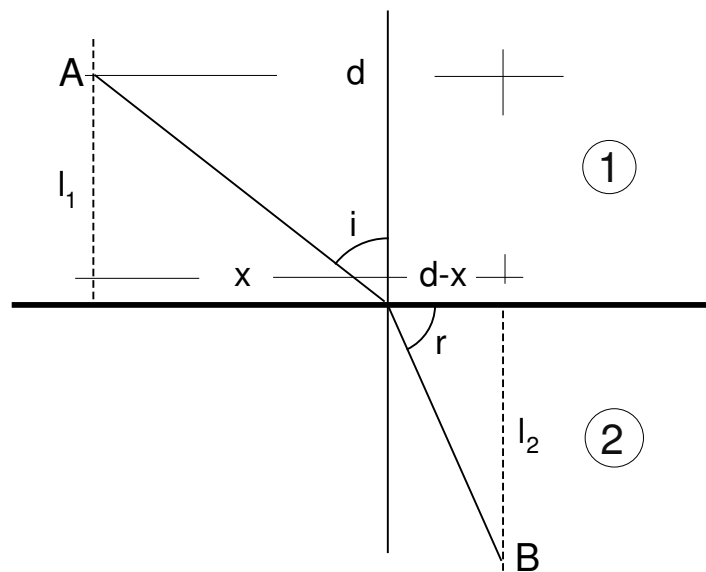


Figura 10.1: Il principio di Fermat applicato alla rifrazione della luce.

Come esempio vediamo la rifrazione della luce. Come illustrato in Fig. 10.1, se si hanno due mezzi in cui la luce si muove con velocità $v_1 = c/n_1$ e $v_2 = c/n_2$, il tempo che impiega la luce ad andare da A a B lungo il percorso indicato è pari a

$$t(x) = \frac{\sqrt{l_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{l_2^2 + (d-x)^2}}{v_2} \quad (10.49)$$

Minimizzando rispetto ad x si ha

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{d-x}{\sqrt{l_2^2 + (d-x)^2}} = 0 \quad (10.50)$$

O, introducendo gli angoli di incidenza e di rifrazione

$$\frac{\sin i}{v_1} - \frac{\sin r}{v_2} = 0 \Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (10.51)$$

che è appunto la legge di Snell. In modo analogo si ricava la legge della riflessione.

Possiamo vedere che relazione c'è tra questa descrizione e quella in termini dell'equazione iconale. Introducendo un parametro u per parametrizzare la traiettoria del raggio e considerando anche la possibilità di variare gli estremi si ha:

$$\delta I = \delta \int_{u_1}^{u_2} n \sqrt{\dot{\vec{x}}^2} du \quad (10.52)$$

La quantità sotto integrale si comporta come una lagrangiana e quindi la sua variazione sarà data da

$$\delta I = \int_{u_1}^{u_2} \left[\left(\frac{\partial(n\sqrt{\dot{\vec{x}}^2})}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{du} \frac{\partial(n\sqrt{\dot{\vec{x}}^2})}{\partial \dot{\vec{x}}^2} \right) \cdot \delta \vec{x} + \frac{d}{du} \left(\frac{\partial(n\sqrt{\dot{\vec{x}}^2})}{\partial \dot{\vec{x}}^2} \cdot \delta \vec{x} \right) \right] du \quad (10.53)$$

Pertanto se si considerano variazioni nulle agli estremi si ha

$$\sqrt{\dot{\vec{x}}^2} \vec{\nabla} n - \frac{d}{du} \left(n \frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}} \right) = 0 \quad (10.54)$$

e quindi sulla soluzione di questa equazione

$$\delta I = n \frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}} \cdot \delta \vec{x} \Big|_{u_1}^{u_2} \quad (10.55)$$

Scegliendo come parametro u l'elemento di linea si ha

$$\dot{\vec{x}}^2 = 1 \quad (10.56)$$

e quindi le equazioni (10.54) e (10.55) diventano

$$\vec{\nabla} n = \frac{d}{ds} (n \dot{\vec{x}}) \quad (10.57)$$

e

$$\delta I = n \dot{\vec{x}} \cdot \delta \vec{x} \Big|_{u_1}^{u_2} \quad (10.58)$$

L'ultima equazione implica che

$$\vec{\nabla}I(u_{1(2)}) = \mp n \dot{\vec{x}} \quad (10.59)$$

e tenuto conto che $\dot{\vec{x}}$ è un versore si ha

$$|\vec{\nabla}I|^2 = n^2 \quad (10.60)$$

Pertanto

$$I = \int_{u_1}^{u_2} n ds \quad (10.61)$$

calcolato lungo la traiettoria minimale è soluzione dell'equazione iconale. Questo mostra la equivalenza delle due formulazioni.

Nel caso particolare di indice di rifrazione costante la (10.57) ha come soluzione

$$\dot{\vec{x}} = \vec{u} \quad (10.62)$$

con \vec{u} un versore costante. Quindi

$$L = I = n\vec{u} \cdot \vec{x} \quad (10.63)$$

10.3 L'equazione d'onda di Schrödinger.

Trattando l'analogia tra ottica geometrica e meccanica del punto, abbiamo visto che l'analogo dell'indice di rifrazione in meccanica del punto è dato da

$$\frac{n}{c} \rightarrow \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{E} \quad (10.64)$$

dove

$$v_f = \frac{c}{n} \quad (10.65)$$

è la velocità di fase cui corrisponde per il punto materiale la velocità di fase

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{E}{mv} = \frac{E}{p} \quad (10.66)$$

dove v è la velocità della particella

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}} \quad (10.67)$$

Proseguendo nell'analogia allo scopo di costruire una meccanica ondulatoria, occorre avere l'analogo della lunghezza d'onda dell'onda associata alla particella. L'ipotesi di De Broglie (1923-1925) è ciò che serve a questo scopo. Secondo De Broglie, la lunghezza d'onda associata ad una particella con impulso p è data dalla relazione

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (10.68)$$

alla quale possiamo aggiungere la reazione di Planck

$$\nu = \frac{E}{h} \quad (10.69)$$

in modo che

$$\lambda\nu = \frac{E}{p} = u \quad (10.70)$$

è la velocità di fase.

In questo modo possiamo scrivere l'analogia equazione per le onde di materia, partendo da quella per le onde elettromagnetiche:

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2\psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \quad (10.71)$$

ottenendo

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x}, t) = \frac{2m(E - V)}{E^2} \frac{\partial^2\psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \quad (10.72)$$

Quest'equazione, come la (10.71), non è una vera equazione d'onda, in quanto ha una dipendenza dall'energia.

È tuttavia applicabile al caso di un'onda monoenergetica, così come la (10.71) è applicabile ad un'onda monocromatica. Infatti, in questo caso, si ha

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi = -4\pi^2\nu^2\psi = -\frac{4\pi^2E^2}{h^2}\psi = -\left(\frac{E}{\hbar}\right)^2\psi \quad (10.73)$$

e, sostituendo nell'equazione (10.72),

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x}, t) = -\frac{2m(E - V)}{\hbar^2}\psi(\vec{x}, t) \quad (10.74)$$

cioè

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V\right)\psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t) \quad (10.75)$$

Questa è la prima forma dell'equazione di Schrödinger per una particella di energia totale E . E' anche detta equazione agli autovalori per l'energia, in quanto le sue soluzioni sono autostati dell'operatore

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V \quad (10.76)$$

corrispondenti all'autovalore E .

La prima applicazione dell'equazione (10.75) fu per dedurre i livelli di energia dell'atomo d'idrogeno (Schrödinger, 1926). Così come avviene nel caso classico, anche qui saranno le condizioni al contorno (in questo caso condizioni all'infinito) su ψ che fisseranno i valori dell'energia dei livelli.

Non abbiamo fatto finora nessuna ipotesi sulla realtà della ψ . Osserviamo però che la (10.75) è lineare e che perciò potremmo considerare soluzioni complesse, salvo poi prenderne la parte reale, come si fa nel caso delle onde elettromagnetiche.

Non c'è però qui alcun motivo perchè la ψ sia reale; in realtà sarà in generale considerata complessa.

Appendice A

Unità di energia

Vogliamo vedere adesso i valori numerici di alcune quantità di interesse atomico. Consideriamo per cominciare le masse delle particelle espresse in eV (electron volts). Ricordiamo che un eV è l'energia acquistata da una particella con carica pari ad e per attraversare una differenza di potenziale di 1 *Volt*. Quindi

$$1 eV = e \cdot 1 = 1.602 \times 10^{-19} J \quad (\text{A.1})$$

Si ha, per esempio ($1 MeV = 10^6 eV$)

$$\begin{aligned} \text{elettrone : } mc^2 &= 0.511 MeV (\approx 0.5) \\ \text{protone : } Mc^2 &= 938.3 MeV (\approx 1000) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Consideriamo adesso il raggio di Bohr¹:

$$a_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} \quad (\text{A.3})$$

Per il suo calcolo conviene introdurre delle quantità intermedie quali il prodotto $\hbar c$. Si ha

$$\hbar c = 3 \cdot 10^8 \text{ mt} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec} = 3.15 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{mt} \quad (\text{A.4})$$

¹Ricordiamo che stiamo adottando le unità di misura di Heaviside e Lorentz, corrispondenti alla scelta $\epsilon_0 = 1$ e $\mu_0 = 1/c^2$. In questo sistema la legge di Gauss è $e^2/4\pi r$ e la costante di struttura fine $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c)$. Il sistema di Gauss differisce da questo per il fattore 4π

segue

$$\hbar c = \frac{3.15 \cdot 10^{-26}}{1.6 \cdot 10^{-13}} \text{ MeV} \cdot \text{mt} = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fermi} = 1973.3 \text{ eV} \cdot \text{\AA} (\approx 2000) \quad (\text{A.5})$$

dove $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$. Per quanto concerne il valore della carica elettrica conviene introdurre la **costante di struttura fine**²

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137.04} (\approx 1/137) \quad (\text{A.6})$$

Per stimare il raggio di Bohr si usa il trucco di moltiplicare e dividere per c^2

$$a_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} = \frac{4\pi\hbar c}{mc^2} \left(\frac{\hbar c}{e^2} \right) = \frac{2000 \cdot 137}{0.5 \cdot 10^6} \approx 0.55 \text{ \AA} \quad (\text{A.7})$$

Ci sono altre due importanti lunghezze associate al raggio di Bohr, la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{mc} = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = a_0\alpha \quad (\text{A.8})$$

e il raggio classico dell'elettrone

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi mc^2} = \frac{\hbar}{mc} \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \alpha\lambda_e = \alpha^2 a_0 \quad (\text{A.9})$$

²In generale la costante di struttura fine è definita $e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$

Bibliografia

- [1] E. Amaldi, R. Bizzarri, G. Pizzella, Fisica Generale (Elettromagnetismo, Relatività, Ottica), Ed. Zanichelli.