DIMOSTRAZIONE *RAZIONALE* DEL TEOREMA DI *GAUSS*

Ci proponiamo di dimostrare, mediante il solo uso dell'Analisi Matematica, senza ricorrere a varî espedienti grafici, il teorema di Gauss, usato in elettrologia (e teoria della gravitazione universale).

In generale tale teorema è applicabile per tutti i campi vettoriali ammissibili per cui

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0,$$

i cosiddetti *campi solenoidali*. In generale, tornando alla situazione fisica, è applicabile a tutte le forze centrali. Difatti, poiché queste sono conservative è possibile definire una funzione potenziale V con la seguente proprietà:

$$\nabla V=-\mathbf{E}.$$

Utilizzando la nota proprietà

$$\operatorname{div}\nabla V=0$$

possiamo dunque affermare che tutti i campi concernenti forze conservative sono solenoidali.
Passiamo alla dimostrazione, nel caso dell'elettrologia:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E})=\oint_\Sigma\langle\mathbf{E},\mathbf{n}\rangle dS=\frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Innanzi tutto diciamo che noi faremo vedere la sua validità per una carica puntiforme racchiusa all'interno della superficie. Il Principio di sovrapposizione, farà il resto. Si noti che comunque, anche nell'applicazione di questo teorema nei varî altri casi, non si perderà di generalità in quanto, non è detto che tale Principio risulti applicabile, ciò deve essere verificato sperimentalmente.
Si presentano due casi: la carica che consideriamo è esterna od interna alla superficie Σ:

- Se è **esterna**, preso un sistema di riferimento centrato sulla carica, il campo, a divergenza nulla, risulterà regolare all'interno della superficie Σ, pertanto è qui permesso l'uso del *teorema della divergenza*:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E})=\oint_\Sigma\langle\mathbf{E},\mathbf{n}\rangle dS=\iiint_V\operatorname{div}\mathbf{E}\,dV=0;$$

- Se è **interna**, prendiamo il solito sistema di riferimento centrato sulla carica, ma questa volta il teorema non è applicabile all'interno della superficie Σ, perché il campo elettrico $\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{u}_r$, non risulta definito proprio nell'origine. Prendiamo dunque una superficie sferica S interna alla superficie Σ centrata nell'origine, in maniera che l'interstizio D che si forma tra Σ ed S risulti ammissibile per il teorema della divergenza, in questo caso avremo:

$$\oint_\Sigma\langle\mathbf{E},\mathbf{n}\rangle dS-\oint_\Sigma\langle\mathbf{E},\mathbf{n}\rangle dS=\iiint_V\operatorname{div}\mathbf{E}=0$$

dove il segno meno tra i due integrali a primo membro è dovuto alla diversa orientazione delle normali, dunque

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E})=\oint_\Sigma\langle\mathbf{E},\mathbf{n}\rangle dS=\oint_S\langle\mathbf{E},\mathbf{n}\rangle dS=4\pi\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

risultato banale del calcolo del secondo integrale.