

Aberrazione stellare

Per *aberrazione della luce* (o *aberrazione stellare*) si intende lo spostamento apparente delle stelle sulla volta celeste dovuto al moto di rivoluzione della Terra e al fatto che la velocità della luce è finita. Si tratta di un fenomeno di natura ottica: una stella ci appare in un posizione diversa da quella in cui si trova realmente: in particolare, le stelle appaiono sempre proiettate *in avanti* (nel verso del moto della Terra) rispetto alla loro posizione reale.

A causa di questo effetto, quando osserviamo una stella con un telescopio dobbiamo puntare lo strumento in una direzione diversa da quella che congiunge l'osservatore alla stella: l'angolo tra la direzione apparente e quella che corrisponde alla reale posizione della stella prende il nome di *angolo di aberrazione* δ .

Per spiegare questo fenomeno dobbiamo ricordare che 1) la luce proveniente dalla stella viaggia a velocità c costante e finita; 2) la Terra si muove intorno al Sole con una velocità V non nulla. Ecco alcuni valori numerici: $c \approx 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $V \approx 30 \text{ km/s}$, $\delta < 10^{-2} \text{ rad}$.

Vogliamo vedere come varia la direzione di un raggio luminoso a causa del movimento relativo della sorgente rispetto all'osservatore; consideriamo la sorgente fissa nello spazio (immobile nel riferimento assoluto O delle stelle fisse) e osserviamo il raggio luminoso nel sistema di riferimento O' , in moto relativo rispetto ad O con velocità di modulo arbitrario V .

In Fig. 2 sono indicate le grandezze coinvolte (l'asse y non è riportato per semplicità): O è il sistema di riferimento delle stelle fisse (in cui la sorgente di luce è ferma), O' è il sistema della Terra e dell'osservatore, in movimento con velocità V rispetto ad O ; la traslazione avviene lungo gli assi x e x' , che si mantengono sempre paralleli, così come anche z e z' ; \vec{v} è il vettore *velocità di gruppo* del raggio luminoso così come è visto nel sistema O , mentre \vec{v}' è il vettore *velocità di gruppo* del raggio luminoso misurato nel sistema O' ; V , v e v' sono i moduli di tali velocità. θ è l'angolo sotto il quale apparirebbe la stella nel riferimento assoluto O rispetto all'orizzonte, mentre θ' è l'angolo sotto il quale è vista la stella nel riferimento terrestre O' rispetto all'orizzonte. Gli angoli che individuano i vettori \vec{v} e \vec{v}' nei due sistemi di riferimento sono, rispettivamente, $\pi + \theta$ e $\pi + \theta'$; l'angolo di aberrazione è $\delta = \theta' - \theta$. Se \vec{V} non fosse diretto secondo x , x' , allora θ e θ' sarebbero gli angoli fra \vec{V} e le direzioni \vec{v} e \vec{v}' rispettivamente.

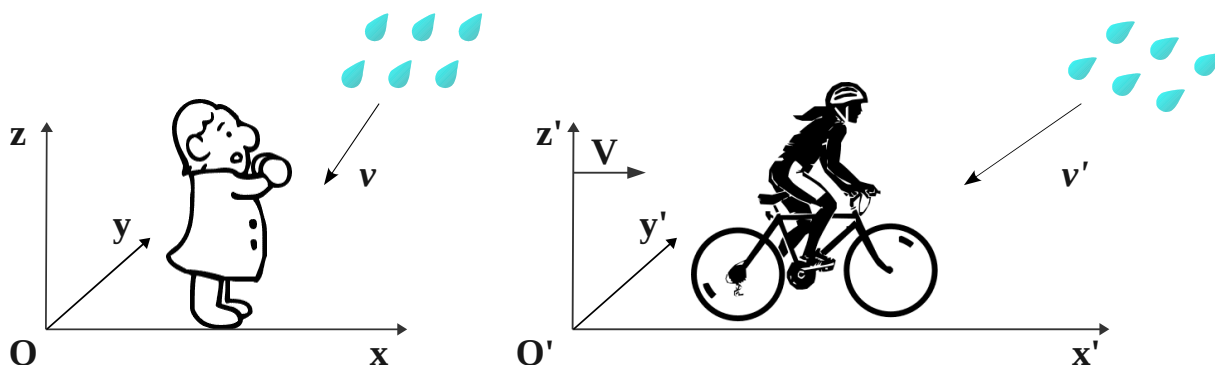


Figura 1: nel sistema di riferimento O la pioggia scende quasi verticalmente; l'osservatore nel sistema di riferimento O' , in moto con velocità V lungo x rispetto a O , vede le gocce di pioggia sotto un angolo più piccolo, come se la loro sorgente fosse proiettata in avanti.

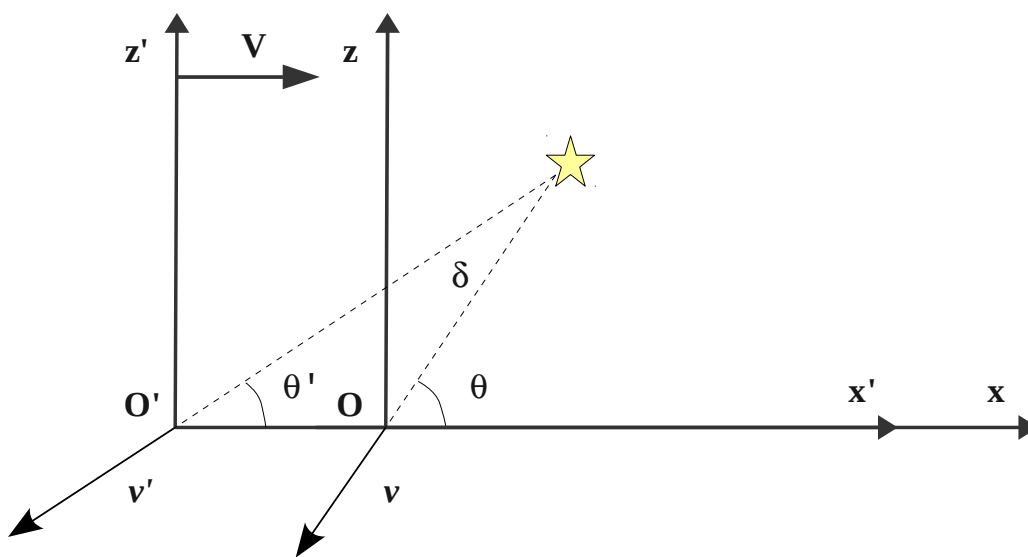
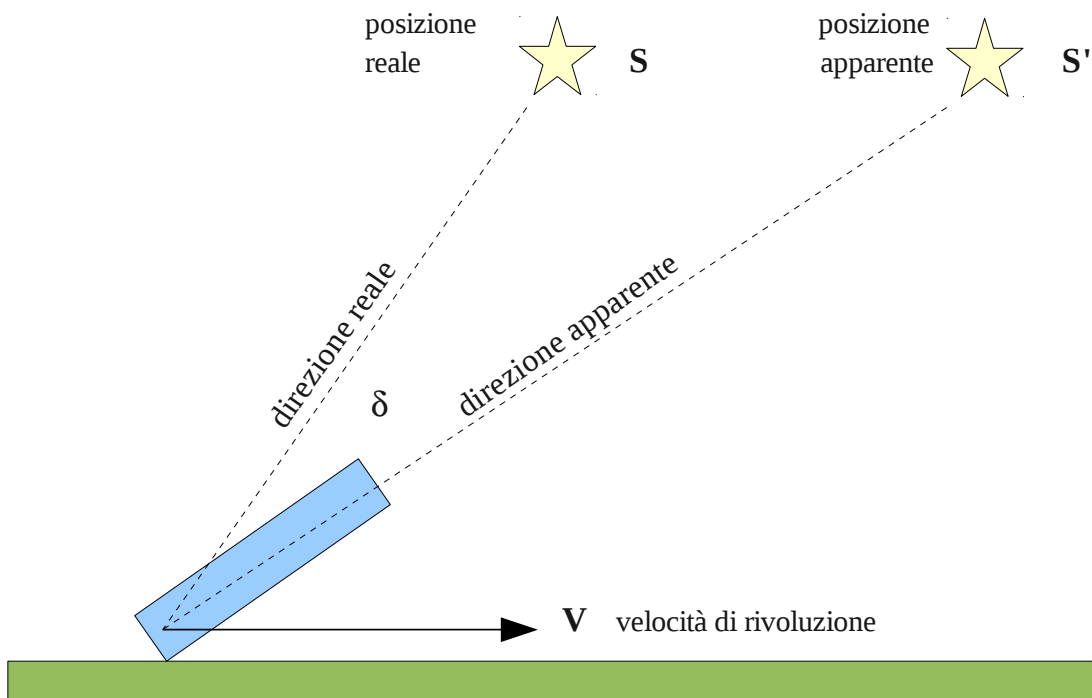


Figura 2: semplice schematizzazione del fenomeno della aberrazione stellare (sopra); vettori d'onda per i due raggi di luce coinvolti nella aberrazione stellare nel caso non relativistico (sotto). In linea di principio, la velocità della luce che ci interessa in questa trattazione è la velocità di gruppo (la velocità con cui è trasportata l'energia elettromagnetica di un pacchetto d'onda) poiché si può dimostrare che la velocità di gruppo di un segnale elettromagnetico si trasforma secondo la stessa legge di trasformazione della velocità delle particelle materiali, tanto nel caso relativistico quanto nel caso non relativistico. La velocità di fase, cioè quella con cui si propaga la fase di un'onda, non sempre ha significato fisico e in talune situazioni può essere maggiore di c (ad esempio nella "regione di dispersione anomala" di un mezzo dielettrico). Tuttavia, nel vuoto, velocità di gruppo e velocità di fase coincidono numericamente e sono pari a c .

Esaminiamo, in tutta generalità, *come varia la direzione della velocità di un oggetto fisico* (velocità cinematica di un punto materiale, velocità di gruppo di un'onda elettromagnetica) dapprima nel *caso non relativistico* ($V \ll c$) e successivamente nel *caso relativistico*, ricavandone come applicazione particolare l'aberrazione della luce nel vuoto.

Aberrazione non relativistica Scriviamo la trasformazione di Galileo per le velocità:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad (1)$$

che vale sia per la velocità cinematica di punti materiali, sia per la velocità di gruppo della luce; esempi di questa trasformazione non relativistica sono la variazione della direzione di caduta della pioggia in Fig. 1 e l'aberrazione stellare non relativistica di Fig. 2. Scomponendo nelle componenti reali (si veda Fig. 3)

$$\begin{cases} v' \cos(\pi + \theta') = v \cos(\pi + \theta) - V \cos 0 \\ v' \sin(\pi + \theta') = v \sin(\pi + \theta) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} v' \cos \theta' = v \cos \theta + V \\ v' \sin \theta' = v \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

dalla quale, dividendo membro a membro,

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/v}. \quad (4)$$

Dalla relazione (4) possiamo ricavare l'angolo θ' sotto cui l'osservatore in O' di Fig. 1 vede cadere la pioggia – noto l'angolo θ con cui la pioggia cade in O – oppure possiamo dedurre la posizione reale θ della stella di Fig. 2 – nota la sua posizione apparente espressa da θ' – invertendo l'equazione

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/c}. \quad (5)$$

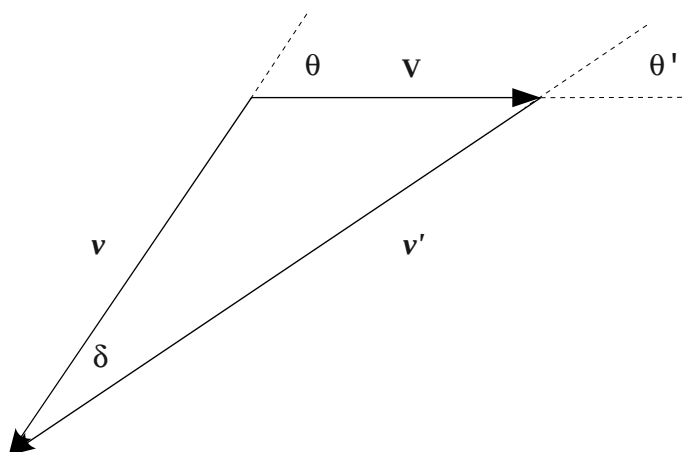


Figura 3: *composizione non relativistica delle velocità.*

Aberrazione relativistica Scriviamo la legge di composizione relativistica delle velocità:

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \\v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} \\v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}\end{aligned}\tag{6}$$

con

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\tag{7}$$

Esplicitando le componenti reali per le due equazioni di interesse (i vettori \vec{v} e \vec{v}' sono contenuti nel piano $x - z$),

$$v' \cos(\pi + \theta') = \frac{v \cos(\pi + \theta) - V}{1 - Vv \cos(\pi + \theta)/c^2}\tag{8}$$

$$v' \sin(\pi + \theta') = \frac{v \sin(\pi + \theta)}{\gamma(1 - Vv \cos(\pi + \theta)/c^2)}\tag{9}$$

che forniscono

$$v' \cos \theta' = \frac{v \cos \theta + V}{1 + Vv \cos \theta/c^2}\tag{10}$$

$$v' \sin \theta' = \frac{v \sin \theta}{\gamma(1 + Vv \cos \theta/c^2)}\tag{11}$$

dalle quali, dividendo membro a membro,

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta + V/v)}.\tag{12}$$

Si vede che questa formula differisce da quella non relativistica per il fattore γ , cioè per termini del secondo ordine in V/c . L'equazione per l'aberrazione relativistica della luce nel vuoto è dunque

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta + V/c)}.\tag{13}$$

This work is made by Marco Gabbrielli by means of free softwares *Mozilla Firefox* (for searching on the Internet), *OpenWord* (for drawing pictures) and *pdfLATEX* (for typesetting text).

It is not subject to copyright: any copy of this document for private or group interests is fully allowed for any number of copies.