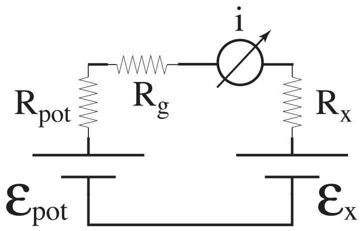
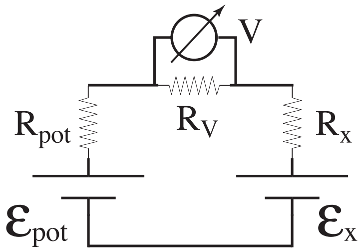
## Esperimentazioni di Fisica II B

SOLUZIONE del compito del 2 aprile 2007




**A.** Quando si usa il galvanometro come rivelatore di zero, il circuito equivalente della misura potenziometrica è quello indicato nella figura più in alto. Si ricava immediatamente

$$\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{pot} = i(R_{pot} + R_g + R_x) \simeq iR_x \qquad (A.1)$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della grandezza relativa delle resistenze. L'errore di sensibilità su $\mathcal{E}_x$ coincide con la situazione in cui $|i| = i_m$, ossia quando i arriva al limite misurabile dal galvanometro. Corrispondentemente abbiamo

$$\Delta\mathcal{E}_x \simeq i_m R_x = 1\,\mathrm{mV} \qquad (A.2)$$

Nel caso si usi il voltmetro, il circuito equivalente è quello della figura in basso. Si ha

$$V = (\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{pot})\,\frac{R_v}{R_v + R_{pot} + R_x} \simeq (\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{pot})\,\frac{R_v}{R_v + R_x} \qquad (A.3)$$

Anche in questo caso l'errore di sensibilità si ottiene considerando $|V| = V_m$; si ottiene

$$\Delta\mathcal{E}_x \simeq V_m \frac{R_v + R_x}{R_v} = 400\,\mu\mathrm{V} \qquad (A.4)$$

Si vede quindi che la misura con il multimetro è affetta da un errore di sensibilità minore rispetto a quella col galvanometro.

**B.** Come è noto, la condizione di azzeramento di un ponte è data dall'uguaglianza dei prodotti delle coppie di impedenze che si trovano sui lati opposti, ossia, nel nostro caso

$$(R_x + j\omega L_x)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) = R_1 R_3 \qquad (B.1)$$

Uguagliando le parti reali e immaginarie dell'equazione si ottiene

$$\begin{cases} RR_x + \frac{L_x}{C} = R_1 R_3 \\ \\ \omega R L_x - \frac{R_x}{\omega C} = 0 \end{cases} \qquad (B.2)$$

Ricavando $C$ dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ha

$$\begin{cases} RR_x + \frac{L_x^2 \omega^2 R}{R_x} = R_1 R_3 \\ \\ C = \frac{R_x}{\omega^2 L_x R} \end{cases} \qquad (B.3)$$

da cui si ricava la soluzione

$$\begin{cases} R = \frac{R_1 R_3}{R_x} \frac{1}{1+\frac{\omega^2 L_x^2}{R_x^2}} \\ C = \frac{L_x}{R_1 R_3} \left(1 + \frac{R_x^2}{\omega^2 L_x^2}\right) \end{cases} \tag{B.4}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $R = 5.034\,\Omega$, $C = 2.516\,\mu\text{F}$.[1]

**1.** La forma d'onda è descritta dalla formula

$$f(t) = \frac{V_0 t}{T} \qquad 0 \le t < T \tag{1.1}$$

e riprende gli stessi valori in ogni intervallo precedente e successivo. Essa può essere scomposta in serie di Fourier

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.2}$$

con i coefficienti dati da

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \; dt \qquad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \; dt \tag{1.3}$$

Calcoliamo i coefficienti della serie. Cominciamo con $b_0$

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{V_0 t}{T} \; dt = V_0 \tag{1.4}$$

$b_0$ infatti rappresenta il doppio della media della funzione su un periodo. Per un $a_k$ generico abbiamo

$$a_k = \frac{2V_0}{T^2} \int_0^T t \, \sin k\omega t \; dt \tag{1.5}$$

Operiamo un cambio della variabile d'integrazione, prendendo come nuova variabile $x = k\omega t$

$$a_k = \frac{V_0}{2k^2\pi^2} \int_0^{2k\pi} x \, \sin x \; dx \tag{1.6}$$

L'integrale in $x$ può essere agevolmente calcolato per parti

$$\int_0^{2k\pi} x \, \sin x \; dx = [-x \, \cos x]_0^{2k\pi} + \int_0^{2k\pi} \cos x \; dx = -2k\pi \tag{1.7}$$

[1] Diamo i risultati numerici con 4 cifre significative, indipendentemente da quello che sarebbe corretto nella prassi fisica, per un confronto più accurato dei calcoli. Quando i risultati sono dati con meno di 4 cifre significative, sono da considerarsi matematicamente esatti.

Per calcolare $b_k$ possiamo riutilizzare la formula (1.6), salvo sostituire il seno con il coseno

$$b_k = \frac{V_0}{2k^2\pi^2}\int_0^{2k\pi} x\,\cos x\,dx \tag{1.8}$$

Anche in questo caso operiamo per parti

$$\int_0^{2k\pi} x\,\cos x\,dx = [x\,\sin x]_0^{2k\pi} - \int_0^{2k\pi} \sin x\,dx = 0 \tag{1.9}$$

I coefficienti della serie di Fourier sono dati quindi da

$$b_0 = V_0 \qquad a_k = -\frac{V_0}{k\pi} \qquad b_k = 0 \quad \forall k > 0 \tag{1.10}$$

Il nostro sviluppo di Fourier vale quindi

$$f(t) = V_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\omega t\right) \tag{1.11}$$

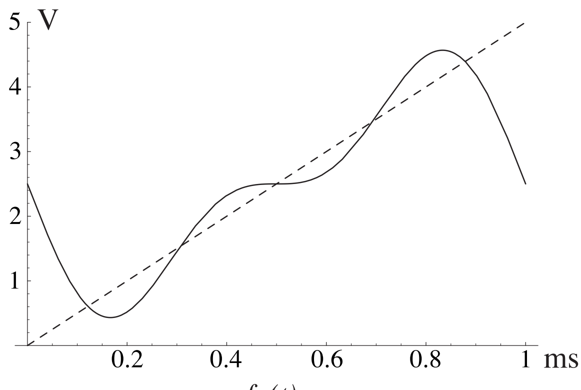
La frequenza della fondamentale è 1 KHz e le armoniche successive sono a $(2, 3, 4, \ldots)$ KHz. Il filtro trasmette il segnale inalterato fino all'armonica con $k = 2$ e taglia completamente le successive, per cui in uscita dal filtro avremo

$$f_o(t) = V_0\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t\right)\right] \tag{1.12}$$

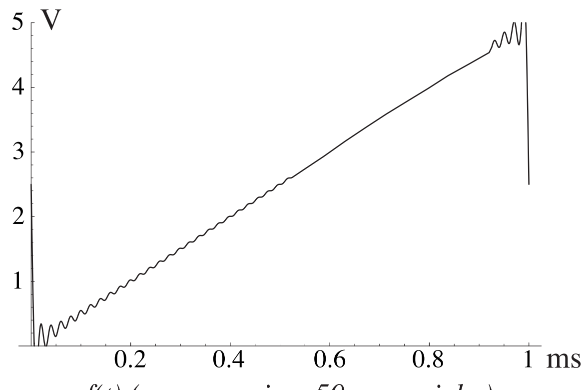
Infine, per $t = T/6$ sarà

$$f_o\left(\frac{T}{6}\right) = V_0\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right] = V_0\left[\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right] = 0.4325\,\mathrm{V} \tag{1.13}$$

Nella figura sottostante sono rappresentate $f_o(t)$ e la somma delle prime 50 armoniche di $f(t)$ secondo la (1.11)




*$f_O(t)$*




*f(t) (somma prime 50 armoniche)*

**2.** L'impedenza del circuito risonante parallelo si calcola facilmente partendo dal reciproco

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L} \tag{2.1}$$

Dalla (2.1) si ricava il valore di $z$ che poi razionalizziamo per facilitare il calcolo della fase (si ricordi che in generale razionallizare un'espressione complessa nei calcoli che si svolgono per i circuiti in corrente alternata serve solo a perdere tempo e complicare le formule, ma in questo caso, come si vedrà, è la procedura da preferire)

$$z = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{R + j[\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \tag{2.2}$$

La fase dell'impedenza si calcola facilmente come

$$\phi(z) = \arctan \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C}{R} \tag{2.3}$$

Dato che la funzione arcotangente è monotona positiva, il suo massimo coincide con quello dell'argomento, e, nel caso specifico, dato che il denominatore è costante, a quello del numeratore. Per trovare l'espressione di $\omega_M$ uguagliamo a 0 l'espressione della derivata del numeratore della (2.3) rispetto a $\omega$

$$L(1 - \omega_M^2 LC) - 2\omega_M^2 L^2 C - R^2 C = 0 \tag{2.4}$$

Risolvendo la (2.4) rispetto a $\omega_M$ abbiamo

$$\omega_M^2 = \frac{L - R^2 C}{3L^2 C} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right) = \frac{1}{3}\omega_r^2 \tag{2.5}$$

dove $\omega_r$ è la frequenza di risonanza del circuito. Abbiamo quindi dimostrato incidentalmente che il massimo della fase dell'impedenza del risonante parallelo si raggiunge per $\omega_M = \omega_r/\sqrt{3}$.

L'impedenza $Z_r$ alla risonanza risulta come noto

$$Z_r = RQ_0^2 = \frac{L}{RC} \tag{2.6}$$

Ricavando $C$ dalla (2.6) e inserendolo nella (2.5) si ottiene

$$3\omega_M^2 = \left(\frac{RZ_r}{L^2} - \frac{R^2}{L^2}\right) \tag{2.7}$$

Dalla (2.7) si ricava immediatamente $L$ in funzione delle grandezze note

$$L = \frac{1}{\omega_M}\sqrt{\frac{R(Z_r - R)}{3}} \tag{2.8}$$

Inserendo il valore della (2.8) nella (2.6) si ricava anche $C$

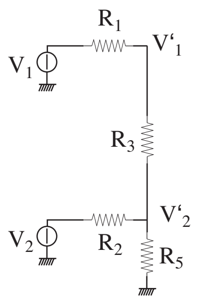
$$C = \frac{1}{\omega_M Z_r}\sqrt{\frac{Z_r - R}{3R}} \tag{2.9}$$

Gli errori su $L$ e $C$ si possono determinare agevolmente utilizzando il metodo della derivata logaritmica

$$\begin{cases} \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}\left|\frac{1-2\frac{R}{Z_r}}{1-\frac{R}{Z_r}}\right| \frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{1-\frac{R}{Z_r}}\right| \frac{\Delta Z_r}{Z_r} + \frac{\Delta\omega_M}{\omega_M} \\ \\ \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{1-\frac{R}{Z_r}}\right| \frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{2}\left|\frac{1-2\frac{R}{Z_r}}{1-\frac{R}{Z_r}}\right| \frac{\Delta Z_r}{Z_r} + \frac{\Delta\omega_M}{\omega_M} \end{cases} \tag{2.10}$$

Inserendo i valori numerici abbiamo infine

$$\begin{cases} L = 50.00\,\mathrm{mH} \qquad \frac{\Delta L}{L} = 0.1848\% \qquad \Delta L = 92.40\,\mu\mathrm{H} \\ \\ C = 0.2000\,\mu\mathrm{F} \qquad \frac{\Delta C}{C} = 0.1851\% \qquad \Delta C = 0.3701\,\mathrm{nF} \end{cases} \tag{2.11}$$




**3.** Per ricavare le uscite dei primi due amplificatori occorre calcolare le tensioni $V_1'$ e $V_2'$ nei punti siti, rispettivamente, all'estremo comune di $R_1$ e $R_4$ e all'estremo comune di $R_2$ e $R_5$. Possiamo tracciare il circuito equivalente di quello visto dai generatori $V_1$ e $V_2$ in ingresso ai due amplificatori, ricordandoci che la configurazione non invertente ha un'impedenza d'ingresso molto più alta delle altre resistenze in gioco, per cui l'ingresso si può considerare un circuito aperto, mentre l'ingresso negativo della configurazione invertente costituisce la cosiddetta massa virtuale. Le tensioni $V_1'$ e $V_2'$ si possono calcolare facilmente utilizzando il principio di sovrapposizione, ossia come somma delle tensioni che si avrebbero nei punti corrispondenti sostituendo a turno uno dei due generatori $V_1$ e $V_2$ con un corto circuito. Questi contributi si calcolano utilizzando la formula del partitore: il contributo di $V_1$ a $V_1'$ è dato dalla partizione formata dalla serie di $R_3$ con il parallelo di $R_2$ e $R_5$, rispetto all'intero partitore che comprende anche $R_1$. Il contributo di $V_2$ è dato dalla partizione sulla resistenza risultante dal parallelo di $R_5$ con la somma di $R_1$ e $R_3$, rispetto all'intero partitore che contiene anche $R_2$, quantità che è il contributo di $V_2$ a $V_2'$, a sua volta partita su $R_1$ rispetto alla somma di $R_1$ e $R_3$. Quindi

$$V_1' = \frac{R_3 + \frac{R_2R_5}{R_2+R_5}}{R_1 + R_3 + \frac{R_2R_5}{R_2+R_5}}\,V_1 + \frac{\frac{(R_1+R_3)R_5}{R_1+R_3+R_5}}{R_2 + \frac{(R_1+R_3)R_5}{R_1+R_3+R_5}}\,\frac{R_1}{R_1+R_3}\,V_2 \tag{3.1}$$

Il contributo di $V_1$ a $V_2'$ è la partizione sul parallelo di $R_2$ e $R_5$ rispetto al partitore contenente anche la serie di $R_1$ e $R_3$, mentre il contributo di $V_2$ a $V_2'$ l'abbiamo già calcolato sopra. In totale

$$V_2' = \frac{\frac{R_2R_5}{R_2+R_5}}{R_1 + R_3 + \frac{R_2R_5}{R_2+R_5}}\,V_1 + \frac{\frac{(R_1+R_3)R_5}{R_1+R_3+R_5}}{R_2 + \frac{(R_1+R_3)R_5}{R_1+R_3+R_5}}\,V_2 \tag{3.2}$$

Conoscendo $V_1'$ e $V_2'$ si determinano immediatamente le tensioni $V_3$ e $V_4$ rispettivamente all'uscita degli amplificatori in configurazione non invertente ed invertente. Dato che l'impedenza d'uscita degli amplificatori è trascurabile rispetto alle altre impedenze in gioco, le tensioni calcolate utilizzando le note formule per l'amplificazione reazionata, che valgono in assenza di carico, si mantengono invariate anche in presenza del circuito a valle. Abbiamo perciò

$$V_3 = \frac{R_6 + R_7}{R_7}\,V_1' \qquad V_4 = -\frac{R_8}{R_5}\,V_2' \tag{3.3}$$

L'ultima parte del circuito, costituita dalle resistenze $R_9$ e $R_{10}$ e dall'amplificatore invertente, funziona come sommatore e si può scrivere immediatamente

$$V_o = -\left(\frac{R_{11}}{R_9}\,V_3 + \frac{R_{11}}{R_{10}}\,V_4\right) \tag{3.4}$$

Le equazioni scritte risolvono il problema. Nel passare al calcolo numerico, calcoliamo prima i fattori di amplificazione e partizione dati dai rapporti di resistenze, senza introdurre i valori numerici delle tensioni. La (3.1) dà

$$V_1' = \frac{10\,\mathrm{K\Omega} + \frac{4\,(\mathrm{K\Omega})^2}{5\,\mathrm{K\Omega}}}{11\,\mathrm{K\Omega} + \frac{4\,(\mathrm{K\Omega})^2}{5\,\mathrm{K\Omega}}}\,V_1 + \frac{\frac{44\,(\mathrm{K\Omega})^2}{15\,\mathrm{K\Omega}}}{1\,\mathrm{K\Omega} + \frac{44\,(\mathrm{K\Omega})^2}{15\,\mathrm{K\Omega}}}\,\frac{1\,\mathrm{K\Omega}}{11\,\mathrm{K\Omega}}\,V_2 = \frac{54}{59}\,V_1 + \frac{4}{59}\,V_2 \tag{3.5}$$

Dalla (3.2), tenendo anche conto di quanto già calcolato, si ha

$$V_2' = \frac{\frac{4}{5}\,\mathrm{K\Omega}}{\left(11+\frac{4}{5}\right)\,\mathrm{K\Omega}}\,V_1 + \frac{\frac{44}{15}\,\mathrm{K\Omega}}{\left(1+\frac{44}{15}\right)\,\mathrm{K\Omega}}\,V_2 = \frac{4}{59}\,V_1 + \frac{44}{59}\,V_2 \tag{3.6}$$

Dalle (3.3) si ha

$$V_2 = 5\,V_1' \qquad V_4 = -2\,V_2' \tag{3.7}$$

Utilizzando questo risultato nella (3.4) abbiamo

$$V_o = -(15\,V_1' - 8\,V_2') \tag{3.8}$$

Inserendo nella (3.8) i valori calcolati in (3.5) e (3.6) abbiamo infine

$$V_o = -\left[\left(\frac{15\cdot 54}{59} - \frac{32}{59}\right)\,V_1 + \left(\frac{60}{59} - \frac{44\cdot 8}{59}\right)\,V_2\right] = -\frac{2}{59}\,[389\,V_1 - 146\,V_2] \tag{3.9}$$

Osservando i valori dati per $V_1$ e $V_2$ è immediato dedurre che il risultato finale è $V_o = 0$.