Esperimentazioni II A

SOLUZIONE del compito del 17 dicembre 2007

1. Nel momento in cui si mette l'interruttore nella posizione a si realizza il semplice circuito in cui un generatore di tensione continua carica un condensatore attraverso una resistenza. Questo circuito è stato studiato durante il corso e si potrebbero assumere direttamente le relazioni che intercorrono fra le grandezze fisiche e ne descrivono l'andamento, ma preferiamo comunque ricavarle. Se scriviamo la legge delle maglie per il circuito otteniamo

$$V - iR - \frac{q_1}{C_1} = 0 \tag{1.1}$$

dove $i = dq_1/dt$ è la corrente (considerata positiva se scorre nella resistenza da sinistra a destra) e q_1 rappresenta la carica sulle armature di C_1. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione si ricava facilmente come

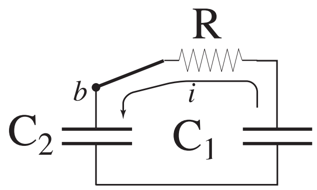
$$q_1(t) = C_1 V + A\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} \qquad \text{dove} \qquad \tau_1 = RC_1 \tag{1.2}$$

La costante A si determina dalle condizioni iniziali, $q(0) = 0$, e quindi risulta

$$q_1(t) = C_1 V \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \qquad \text{ossia} \qquad V_{C_1}(t) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \tag{1.3}$$

Al tempo t_1 la tensione ai capi di C_1 sarà

$$V_{C_1}(t_1) = V_{10} = V \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}\right) \tag{1.4}$$



Studiamo adesso il comportamento del circuito dopo il tempo t_1, con l'interruttore nella posizione b. Per fare questo è molto comodo cambiare l'origine dei tempi all'istante t_1, scrivendo tutto in funzione di $t' = t - t_1$. Consideriamo il circuito in figura, in cui prendiamo come verso positivo della corrente quello per cui essa scorre nella resistenza da destra a sinistra. Possiamo scrivere l'equazione della maglia

$$\frac{q_1}{C_1} - iR - \frac{q_2}{C_2} = 0 \tag{1.5}$$

dove q_1 e q_2 rappresentano la carica sulle armature dei condensatori 1 e 2, rispettivamente. A questo punto occorre fare attenzione alle relazioni che esistono fra le due cariche e la corrente i: una corrente positiva nel verso che abbiamo scelto comporta in un intervallo dt' una diminuzione della carica su C_1, $dq_1 = -i\, dt'$ e un aumento corrispondente della carica su C_2, $dq_2 = i\, dt'$. Corrispondentemente avremo

$$\frac{dq_1}{dt'} = -i \qquad \frac{dq_2}{dt'} = i \tag{1.6}$$

Se deriviamo la (1.5) rispetto a t' avremo

$$R\,\frac{di}{dt'} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0 \tag{1.7}$$

La (1.7) si risolve con lo stesso metodo della (1.1) e dà come soluzione

$$i(t') = B\, e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \qquad \text{con} \qquad \tau_2 = R\overline{C} \qquad \text{e} \qquad \overline{C} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{1.8}$$

dove B è una costante da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Questo si può fare facilmente considerando che per $t' = 0$ $V_{C_1} = V_{10}$ e $V_{C_2} = 0$, per cui $R\, i(0) = V_{10}$. Avremo

$$i(t') = \frac{V_{10}}{R}\, e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \tag{1.9}$$

Restano da calcolare le cariche sulle armature dei condensatori in funzione del tempo, cosa che si ottiene integrando le (1.6)

$$\begin{aligned} q_1(t') =& q_1(0) - V_{10}/R \int_0^{t'} e^{-\frac{t'}{\tau_2}}\, dt' = V_{10} \left[C_1 - \overline{C} \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right) \right] \\ q_2(t') =& q_2(0) + V_{10}/R \int_0^{t'} e^{-\frac{t'}{\tau_2}}\, dt' = V_{10}\, \overline{C} \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Corrispondentemente le differenze di potenziale sui condensatori sono date da

$$\begin{aligned} V_{C_1}(t') =& V_{10} \left[1 - \frac{\overline{C}}{C_1} \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right) \right] \\ V_{C_2}(t') =& V_{10} \frac{\overline{C}}{C_2} \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

La tensione su C_1 al tempo $t_1 + t_2$ vale quindi

$$V_{C_1}(t_1 + t_2) = V \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} \right) \left[1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_2}} \right) \right] \tag{1.12}$$

Le differenze di potenziale asintotiche sui due condensatori sono

$$\begin{aligned} V_{1f} =& V_{10} \left[1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right] = V_{10} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \\ V_{2f} =& V_{10} \frac{\overline{C}}{C_2} = V_{10} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Come c'era da aspettarsi, le tensioni finali sui due condensatori sono uguali. Il fenomeno dal tempo t_1 in poi è analogo al raggiungimento dell'equilibrio idrostatico in due vasi comunicanti, dove i livelli del liquido sono gli analoghi delle tensioni e le quantità di liquido nei recipienti corrispondono alle cariche.

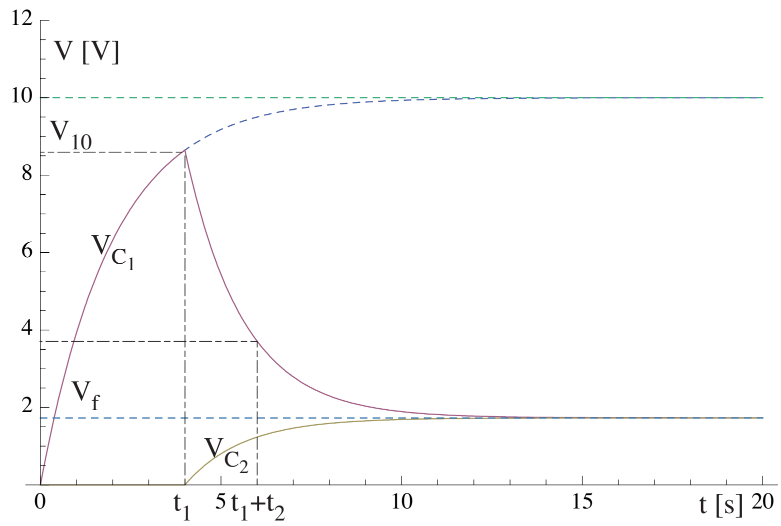
Resta da calcolare l'energia dissipata nella resistenza durante la seconda fase. Ciò si può fare integrando la potenza istantanea che si ricava dalla (1.9)

$$E_d = \int_0^\infty i^2(t') R\, dt' = \frac{V_{10}^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t'}{\tau_2}}\, dt' = \frac{1}{2} \overline{C}\, V_{10}^2 \tag{1.14}$$

Alternativamente, l'energia dissipata si può ricavare come differenza fra l'energia immagazzinata inizialmente sul primo condensatore e quella immagazzinata in entrambi nelle condizioni asintotiche

$$E_d = E_{C_1}(0) - E_{C_1 f} - E_{C_2 f} = \frac{1}{2} C_1 V_{10}^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V_{10}^2 \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2} \overline{C}\, V_{10}^2 \quad (1.15)$$

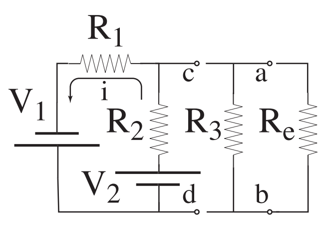
Inserendo i valori numerici abbiamo $V_{C_1}(t_1 + t_2) = 3.711\,\mathrm{V}$, $V_{1f} = V_{2f} = 1.729\,\mathrm{V}$, $E_d = 2.991 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$.[2] Il grafico delle tensioni sui condensatori è dato qui di seguito



2. Si può rispondere alla domanda in modo semplice una volta che si è determinato il circuito equivalente di Thévenin visto dai capi di R_e. La resistenza equivalente si calcola a vista, e risulta il parallelo delle tre resistenze R_1, R_2 e R_3

$$R_{ab} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} R_3}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (2.1)$$

Il calcolo della tensione equivalente si può fare per gradi.



Come primo passo calcoliamo il circuito equivalente visto dai punti c e d in figura. La tensione equivalente V_{cd} è data da

$$V_{cd} = V_2 - iR_2 \qquad \text{dove} \qquad i = \frac{V_2 + V_1}{R_1 + R_2} \quad (2.2)$$

Risulta

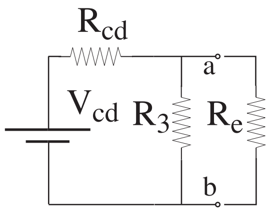
$$V_{cd} = \frac{V_2 R_1 - V_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.3)$$

[2] Diamo i risultati numerici con 4 cifre significative, indipendentemente da quello che sarebbe corretto nella prassi fisica, per un confronto più accurato dei calcoli.

Alla (2.3) si può giungere anche semplicemente utilizzando il principio di sovrapposizione e considerando i due generatori uno alla volta, dopo aver sostituito l'altro con un corto circuito. I contributi di tensione ai capi di c e d si possono calcolare con la formula del partitore. Si veda in appendice come si possono effettuare controlli di plausibilità su una formula come questa.

La resistenza equivalente R_{cd} si calcola immediatamente come

$$R_{cd} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.4}$$



La tensione del generatore equivalente V_{ab}, visto fra a e b, si determina immediatamente come

$$V_{ab} = V_{cd} \frac{R_3}{R_3 + R_{cd}} = \frac{(V_2 R_1 - V_1 R_2) R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{2.5}$$

A questo punto si può sfruttare una nota proprietà, secondo cui la potenza trasferita su R_e sarà massima, al variare di R_e stessa, quando $R_e = R_{ab}$, quindi la resistenza $\overline{R}_e$ corrispondente alla massima potenza vale

$$\overline{R}_e = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{2.6}$$

In queste condizioni la corrente attraverso $\overline{R}_e$ è data da $V_{ab}/(2\overline{R}_e)$ e infine

$$W_{\overline{R}_e} = \frac{1}{4} \frac{V_{ab}^2}{\overline{R}_e} = \frac{(V_2 R_1 - V_1 R_2)^2 R_3}{4 R_1 R_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)} \tag{2.7}$$

Introducendo i valori numerici si ottiene $\overline{R}_e = 187.5\,\Omega$, $W_{\overline{R}_e} = 2.521\,\mathrm{mW}$.

3. L'energia immagazzinata all'istante t nel condensatore è data da

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C\, V_C^2(t) \tag{3.1}$$

dove $V_C(t) = V_{0C} \cos(\omega t + \phi_C)$. L'energia massima $\overline{E}_C$ corrisponde quindi a

$$\overline{E}_C = \frac{1}{2} C\, V_{0C}^2 \tag{3.2}$$

ossia è funzione dell'ampiezza della tensione sinusoidale ai capi di C. Per calcolare questa tensione utilizziamo il formalismo complesso e iniziamo indicando con tre simboli le impedenze nei tre rami del circuito: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L$, $Z_3 = 1/(j\omega C)$. Vogliamo calcolare il circuito equivalente di Thévenin visto dal condensatore. Si procede in modo del tutto analogo a quanto fatto per il circuito della domanda precedente. La tensione equivalente $\mathcal{V}_{eq}$ e l'impedenza equivalente Z_{eq} risultano

$$\mathcal{V}_{eq} = \frac{\mathcal{V}_1 Z_2 + \mathcal{V}_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{3.3}$$

La tensione $\mathcal{V}_C$ ai capi del condensatore è data quindi, sempre nel formalismo complesso, da

$$\mathcal{V}_C = \frac{\mathcal{V}_{eq} Z_3}{Z_3 + Z_{eq}} = \frac{(\mathcal{V}_1 Z_2 + \mathcal{V}_2 Z_1) Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{(\mathcal{V}_1 Z_2 + \mathcal{V}_2 Z_1)}{\frac{Z_1 Z_2}{Z_3} + Z_1 + Z_2} \tag{3.4}$$

dove l'ulima forma di scrittura risulta più conveniente, data l'espressione di Z_3. V_{0C} non è altro che $|\mathcal{V}_C|$ e quindi

$$V_{0C} = \frac{|\mathcal{V}_1 Z_2 + \mathcal{V}_2 Z_1|}{\left|\frac{Z_1 Z_2}{Z_3} + Z_1 + Z_2\right|} \tag{3.5}$$

Il quesito impone di rendere più piccola possibile l'energia massima immagazzinata, in funzione dell'ampiezza e della fase di $V_2(t)$. Questo corrisponde a minimizzare il numeratore della (3.5), che indichiamo col simbolo γ e scriviamo introducendo i valori espliciti di Z_1 e Z_2, ricordando che $\mathcal{V}_1 = V_{10}\, e^{j\omega t}$ e $\mathcal{V}_2 = V_{20}\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi} = V_{20}\, e^{j\omega t}\, (\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$$\begin{aligned} \gamma &= \left|V_{10}\, e^{j\omega t}\, (R_2 + j\omega L) + V_{20}\, e^{j\omega t}\, (\cos\varphi + j\sin\varphi) R_1\right| = \\ &= \sqrt{(V_{10} R_2 + V_{20} R_1 \cos\varphi)^2 + (V_{10}\omega L + V_{20} R_1 \sin\varphi)^2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Scegliendo opportunamente V_{20} e φ è possibile annullare γ, e questo rappresenta il minimo valore possibile. A questo scopo occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} V_{20} R_1 \cos\varphi = -V_{10} R_2 \\ \\ V_{20} R_1 \sin\varphi = -V_{10}\omega L \end{cases} \tag{3.7}$$

Dalle (3.7) si ricavano due equazioni, rispettivamente dividento membro a membro la seconda per la prima, e sommando membro a membro dopo aver elevato al quadrato

$$\begin{cases} \tan\varphi = \frac{\omega L}{R_2} \\ \\ V_{20}^2 R_1^2 = V_{10}^2 (R_2^2 + \omega^2 L^2) \end{cases} \tag{3.8}$$

Le (3.8) forniscono come soluzione

$$\begin{cases} \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_2}\right) + k\pi \\ \\ V_{20} = V_{10} \frac{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L^2}}{R_1} \end{cases} \tag{3.9}$$

La seconda delle (3.9) ammette algebricamente anche la soluzione col segno "$-$", ma la scartiamo perché le ampiezze vengono prese, per convenzione, sempre positive. Lo sfasamento si misura da $-\pi$ a π e con $k = 0$ corrisponde a un angolo nel primo quadrante. Per risolvere le (3.7) occorre che siano $\cos\varphi < 0$ e $\sin\varphi < 0$: questo avviene se scegliamo $k = -1$, per cui φ risulta nel terzo quadrante. Introducendo i valori numerici si ottiene $V_{20} = 2.500\,\mathrm{V}$, $\varphi = -2.678\,\mathrm{rad}$.

Per determinare l'energia immagazzinata per valori dati di V_{20} e φ, esplicitiamo l'espressione (3.5) con i valori delle impedenze

$$V_{0C} = \frac{|V_{10}\,(R_2 + j\omega L) + V_{20}\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) R_1|}{|R_1 (R_2 + j\omega L)\, j\omega C + R_1 + R_2 + j\omega L|} \tag{3.10}$$

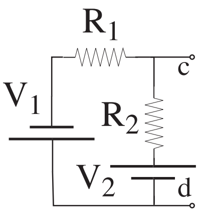
Introducendo il valore di V_{0C} nella (3.2) abbiamo infine

$$\overline{E}_C = \frac{1}{2} C \, \frac{(V_{10}\, R_2 + V_{20}\, R_1 \cos\varphi)^2 + (V_{10}\, \omega L + V_{20} R_1 \sin\varphi)^2}{\left[R_1(1-\omega^2 LC) + R_2\right]^2 + \omega^2 (R_1 R_2 C + L)^2} \tag{3.11}$$

Introducendo i valori numerici si ottiene $\overline{E}_C = 4.154 \cdot 10^{-6}$ J.

Appendice: controlli di plausibilità su una formula

Un certo numero degli studenti che hanno svolto questo compito, fra i vari errori commessi, ha scritto formule che già a prima vista, o con un minimo di controllo, si potevano individuare come sbagliate. Questo comportamento, che è sicuramente contario a qualsiasi criterio di professionalità, trova la sua origine in un sistema scolastico che da svariati decenni ha rinunciato ad insegnare come fare le cose "a regola d'arte" e si accontenta di una più o meno discutibile comprensione "culturale" delle materie. Il risultato è che gli studenti non sono più abituati a *controllare passo a passo* quello che stanno facendo e mettono nero su bianco qualsiasi cosa, fino al caso di chi ha scritto, nel test di autovalutazione dei nuovi iscritti, che un jet supersonico ha una velocità massima di 25 cm/h!



Non è certo possibile fare qualcosa qui per cambiare lo stato di cose, ma almeno vorremmo ricordare alcuni semplici metodi che si possono e **si devono** usare per controllare il proprio operato mentre si lavora alla risoluzione di un problema. Per farlo prenderemo ad esempio la formula (2.3), che riportiamo qui insieme alla figura del relativo circuito:

$$V_{cd} = \frac{V_2 R_1 - V_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{A.1}$$

Per verificare, se non l'esattezza, almeno la plausibilità di una formula come questa, abbiamo a disposizione un certo numero di criteri:

1. **Controllo dimensionale**: questo è il primo e fondamentale tipo di controllo da effettuare sempre. Non dovrebbe esserci alcun bisogno di spiegare come effettuarlo.

2. **Controlli di forma e struttura**: le formule che si ottengono nella risoluzione di un problema fisico rispecchiano una qualche realtà naturale e le leggi fisiche che governano il fenomeno. Spesso è possibile determinare se esiste una rispondenza fra le espressioni trovate e ciò che un'analisi anche solo qualitativa del sistema fisico detta come risultato. In particolare si può controllare:

   2.1 **Rispetto delle condizioni fisiche**: nel caso preso ad esempio, sappiamo che il sistema si comporta in modo lineare, per cui dobbiamo aspettarci che V_{cd} sia una combinazione lineare di V_1 e V_2 del tipo

$$V_{cd} = A\,V_1 + B\,V_2 \tag{A.2}$$

Se l'espressione di V_{cd} contenesse altri termini sarebbe sicuramente errata.

2.1 **Rispetto delle simmetrie**: le formule devono rispecchiare le eventuali simmetrie presenti nei sistemi fisici a cui si riferiscono. Nel nostro caso i due rami del corcuito che contengono, rispettivamente, V_1 e V_2, visti dai punti c e d hanno esattamente la stessa struttura, anche per la corrispondenza degli indici, salvo il fatto che i due generatori sono orientati in modo opposto. Ci possiamo aspettare quindi che la formula sia invariante per scambio degli indici $1 \leftrightarrow 2$ e scambio dei segni di V_1 e V_2, come in effetti risulta. La cosa è ancora più evidente se riscriviamo la formula come

$$V_{cd} = \frac{V_2 R_1 + V_1' R_2}{R_1 + R_2} \qquad V_1' = -V_1 \tag{A.3}$$

3. **Controllo dei casi–limite**: molto spesso è possibile calcolare "a vista" il risultato di una formula quando si mandano alcune delle grandezze fisiche implicate a dei valori–limite. Nel nostro caso:

   a. per $R_1 \to 0$ il generatore V_1 risulta direttamente applicato fra i punti c e d, per cui deve essere $V_{cd} = -V_1$.

   b. per $R_1 \to \infty$ il ramo del generatore V_1 risulta come se fosse staccato. Nel ramo restante, quello di V_2, non circola corrente (stiamo considerando una situazione in cui il circuito fra c e d è aperto). Pertanto $V_{cd} = V_2$.

   c. per $V_1 \to 0$ il circuito visto da c e d è un partitore di tensione e risulta immediatamente $V_{cd} = V_2\,R_1/(R_1 + R_2)$. Questa considerazione corrisponde all'utilizzo del principio di sovrapposizione, come già ricordato a pag. 4.

Considerazioni del tutto analoghe si possono fare per R_2 e V_2.