Esperimentazioni di Fisica II B

SOLUZIONE del compito del 5 aprile 2006

A. Nel circuito scorrerà una corrente i che avrà in generale la forma $i = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, i cui parametri i_0 e φ si calcolano con il metodo delle impedenze complesse:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{R + j\omega L} \qquad i_0 = |\mathcal{I}| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad \varphi = -\arctan\frac{\omega L}{R} \tag{A.1}$$

La potenza media erogata dal generatore corrisponde a quella dissipata sulla resistenza (durante ogni ciclo si ha un trasferimento d'energia anche fra il generatore e il campo magnetico generato dall'induttanza, ma il risultato netto è nullo). Sulla resistenza avremo per la legge di Ohm una caduta di potenziale $V_R = V_{R0}\cos(\omega t + \varphi)$ dove $V_{R0} = i_0 R$. Si noti che i e V_R sono sfasate di φ rispetto alla tensione del generatore, ma in fase fra loro. A questo punto applichiamo la formula della potenza media in corrente alternata: $\overline{W} = V_{\text{eff}}\, i_{\text{eff}}\, \cos\phi$ con $i_{\text{eff}} = i_0/\sqrt{2}$, $V_{\text{eff}} = V_{R0}/\sqrt{2}$ e $\phi = 0$. Avremo quindi

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\, i_0^2 R = \frac{1}{2}\, \frac{V_0^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{A.2}$$

Con i valori numerici[1]

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\, \frac{100\, V^2 \cdot 10\,\Omega}{100\,\Omega^2 + (2\pi\, 50\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \cdot 10^{-1}\,\mathrm{H})^2} = \frac{5}{1+\pi^2}\,\mathrm{W} = 0.4600\,\mathrm{W} \tag{A.3}$$

B. I valori dell'induttanza e della resistenza incognite sono dati dalle espressioni note

$$L_x = R_1 R_3 C \qquad R_x = \frac{R_1 R_3}{R} \tag{B.1}$$

I relativi errori sono ovviamente

$$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta C}{C} \qquad \frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R}{R} \tag{B.2}$$

Nel valutare questi errori occorre tener presente che la componente di taratura si applica a tutti gli elementi, mentre quella di sensibilità, anche se è stata rilevata su ogni componente del circuito, deve essere applicata solo a tanti elementi indipendenti quanti è necessario variare finemente per azzerare il ponte, ossia, nel caso, a R e C. Introducendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{aligned} R_x &= 103.71\,\Omega \quad \frac{\Delta R_x}{R_x} = 8.457\cdot 10^{-4} \quad \Delta R_x = 0.08771\,\Omega \\ L_x &= 50.14\,\mathrm{mH} \quad \frac{\Delta L_x}{L_x} = 5.544\cdot 10^{-3} \quad \Delta L_x = 0.2780\,\mathrm{mH} \end{aligned} \tag{B.3}$$

[1] Tutti i risultati sono dati con 4 cifre significative per rendere più stretto il controllo dei calcoli.

Per quanto riguarda l'ammettenza, è data da

$$Y_x = \frac{1}{R_x + j\omega L_x} = \frac{R_x - j\omega L_x}{R_x^2 + \omega^2 L_x^2} \tag{B.4}$$

Per la parte reale abbiamo

$$Q = \mathcal{R}e(Y_x) = \frac{R_x}{R_x^2 + \omega^2 L_x^2} = \frac{1}{R_1 R_3 R\left(\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2\right)} \tag{B.5}$$

L'errore si può determinare utilizzando l'artificio della derivata logaritmica. È fondamentale in ogni caso propagare l'errore sull'ultima espressione di Q in $(B.5)$, in cui compaiono le quantità misurate in modo indipendente. Avremo

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \left|\frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right| \frac{\Delta R}{R} + \left|\frac{2\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right| \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{\Delta C}{C}\right) \tag{B.6}$$

Con i valori numerici

$$Q = 9.428 \cdot 10^{-4}\,\Omega^{-1} \qquad \frac{\Delta Q}{Q} = 0.01168 \qquad \Delta Q = 1.102 \cdot 10^{-5}\,\Omega^{-1} \tag{B.7}$$

1. Il primo punto da tener presente è il fatto che se $\boldsymbol{B}$ è il campo magnetico e noi misuriamo con la sonda orientata nella direzione del versore $\boldsymbol{u}$ quello che otterremo sarà $B_u = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}$. Dato che abbiamo misurato $\boldsymbol{B}$ in due direzioni ortogonali, che abbiamo fatto coincidere con gli assi cartesiani x e y di un sistema di riferimento, potremo scrivere

$$\boldsymbol{B} = B_1\,\boldsymbol{i} + B_2\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

dove B_1 e B_2 sono le nostre misure, mentre B_z è la componente di $\boldsymbol{B}$ lungo l'asse z, che vogliamo determinare. La terza misura è stata fatta lungo un versore $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k} \tag{1.2}$$

Quindi sarà

$$B_3 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} = B_1 \sin\theta\cos\varphi + B_2 \sin\theta\sin\varphi + B_z\cos\theta \tag{1.3}$$

La (1.3) ci permette di ricavare B_z

$$B_z = \frac{B_3}{\cos\theta} - B_1\tan\theta\cos\varphi - B_2\tan\theta\sin\varphi \tag{1.4}$$

Dobbiamo determinare adesso l'errore su B_z. Gli errori dati sui vari B_i non contengono il contributo dell'1.6% dovuto all'indeterminazione su k_{B_H}. Per valutare come inserire anche questa fonte di errore in B_z possiamo procedere nel modo seguente. Possiamo considerare le componenti date B_i come se contenessero il valore di k_{B_H} effettivo, non affetto da errore, e introdurre le componenti "reali", che chiameremo B'_i, in cui invece si considera anche l'errore su k_{B_H}. Questo si può ottenere ponendo

$$B'_i = \alpha \, B_i \qquad \text{dove} \qquad \alpha = 1, \quad \Delta\alpha = 0.016 \tag{1.5}$$

Se nella (1.4) sostituiamo le B_i con le B'_i abbiamo

$$B_z = \alpha \left(\frac{B_3}{\cos\theta} - B_1 \tan\theta \cos\varphi - B_2 \tan\theta \sin\varphi \right) \tag{1.6}$$

A questo punto la propagazione dell'errore si può eseguire sulla (1.6), usando gli errori ΔB_i dati nel testo e ricordando che

$$\frac{\partial B_z}{\partial\alpha} = \frac{B_z}{\alpha} = B_z \tag{1.7}$$

dato che $\alpha = 1$. Svolgendo i calcoli e ponendo quindi dovunque $\alpha = 1$ si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta B_z = {} & |B_z| \, \Delta\alpha + \left| \frac{1}{\cos\theta} \right| \Delta B_3 + |\tan\theta\cos\varphi| \; \Delta B_1 + |\tan\theta\sin\varphi| \; \Delta B_2 \\ & + \left| \frac{B_3 \sin\theta - B_1\cos\varphi - B_2 \sin\varphi}{\cos^2\theta} \right| \Delta\theta + |\tan\theta(B_1\sin\varphi - B_2\cos\varphi)| \; \Delta\varphi \end{aligned} \tag{1.8}$$

Inserendo i dati numerici si ottiene

$$B_z = (0.9989 \pm 0.2322) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T} \tag{1.9}$$

2. Se chiamiamo ω_r la pulsazione alla risonanza, possiamo scrivere che

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \tag{2.1}$$

Da questa relazione si ricava immediatamente

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \tag{2.2}$$

L'errore su C si determina facilmente con il metodo della derivata logaritmica

$$\frac{\Delta C}{C} = \left| \frac{1 - \frac{R^2}{\omega_r^2 L^2}}{1 + \frac{R^2}{\omega_r^2 L^2}} \right| \frac{\Delta L}{L} + \left| \frac{2\frac{R^2}{\omega_r^2 L^2}}{1 + \frac{R^2}{\omega_r^2 L^2}} \right| \frac{\Delta R}{R} + \left| \frac{2}{1 + \frac{R^2}{\omega_r^2 L^2}} \right| \frac{\Delta\omega_r}{\omega_r} \tag{2.3}$$

Introducendo i valori numerici si ottiene

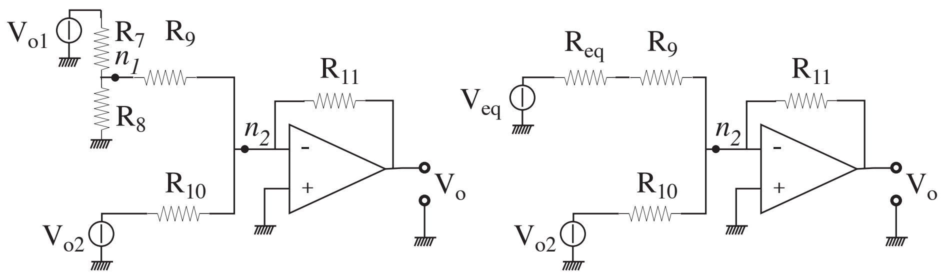
$$C = 99.86\,\mathrm{nF} \qquad \frac{\Delta C}{C} = 2.912 \cdot 10^{-3} \qquad \Delta C = 0.2908\,\mathrm{nF} \tag{2.4}$$

3. Data la linearità del circuito, avremo comunque $V_o = A_2 V_2 + A_1 V_1$. Per soddisfare le condizioni richieste dovrà essere $-A_1 = A_2 = A$. Utilizzando il principio di sovrapposizione, possiamo calcolare separatamente A_1 e A_2 sostituendo rispettivamente V_2 e V_1 con un corto circuito. Per calcolare A_1 determiniamo il circuito equivalente del primo stadio di amplificazione. Considerando l'uscita dello stadio non invertente come un generatore ideale (approssimazione più che giustificata nel contesto), possiamo calcolarne la tensione come

$$V_{o1} = V_1 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \tag{3.1}$$

Proseguiamo a semplificare il circuito sostituendo il circuito a monte del nodo n_1 in figura con il suo equivalente di Thévenin, in cui

$$V_{eq} = V_{o1} \frac{R_8}{R_7 + R_8} \qquad R_{eq} = \frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8} \tag{3.2}$$



A questo punto notiamo che, essendo il nodo n_2 la massa virtuale o nodo di somma dell'ultimo stadio, possiamo calcolare il valore di V_o quando $V_2 = 0$ considerando semplicemente la tensione V_{eq} applicata tramite una resistenza $R_{eq} + R_9$, senza che la presenza di R_{10} e del circuito a monte abbia alcun effetto

$$V_o[V_2 = 0] = -V_{eq} \frac{R_{11}}{R_{eq} + R_9} \tag{3.3}$$

Avremo quindi

$$A_1 = \frac{V_o[V_2 = 0]}{V_1} = -\frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{R_8}{R_7 + R_8} \frac{R_{11}}{\frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8} + R_9} \tag{3.4}$$

Analogamente determiniamo A_2. Possiamo sostituire ai primi due stadi un generatore ideale V_{o2}

$$V_{o2} = -V_2 \frac{R_3 + R_4}{R_4} \frac{R_6}{R_5} \tag{3.5}$$

La tensione V_{o2} si può pensare applicata all'ultimo stadio tramite la resistenza R_{10} e possiamo calcolare la tensione d'uscita senza dover considerare il ramo di R_9

$$V_o[V_1 = 0] = -V_{o2} \frac{R_{11}}{R_{10}} \tag{3.6}$$

Possiamo quindi determinare A_2

$$A_2 = \frac{V_o[V_1 = 0]}{V_2} = \frac{R_3 + R_4}{R_4} \, \frac{R_6}{R_5} \, \frac{R_{11}}{R_{10}} \tag{3.7}$$

Imponiamo adesso la condizione $A_2 = -A_1$

$$\frac{R_3 + R_4}{R_4} \, \frac{R_6}{R_5} \, \frac{R_{11}}{R_{10}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \, \frac{R_8}{R_7 + R_8} \, \frac{R_{11}}{\frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8} + R_9} \tag{3.8}$$

Fra i due membri della (3.8) si può semplificare R_{11} e quindi ricavare R_9

$$R_9 = \frac{R_8}{R_7 + R_8} \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} \, \frac{R_5 R_{10}}{R_6} \, \frac{R_1 + R_2}{R_2} - R_7 \right) \tag{3.9}$$

La seconda condizione si impone uguagliando A_2 con A

$$\frac{R_3 + R_4}{R_4} \, \frac{R_6}{R_5} \, \frac{R_{11}}{R_{10}} = A \tag{3.10}$$

da cui si ricava R_{11}

$$R_{11} = A \, \frac{R_4}{R_3 + R_4} \, \frac{R_5 R_{10}}{R_6} \tag{3.11}$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$\begin{aligned} R_9 &= \frac{2\,\mathrm{K\Omega}}{5\,\mathrm{K\Omega}} \left(\frac{2\,\mathrm{K\Omega}}{4\,\mathrm{K\Omega}} \, \frac{2\,\mathrm{K\Omega} \cdot 2\,\mathrm{K\Omega}}{4\,\mathrm{K\Omega}} \, \frac{10\,\mathrm{K\Omega}}{1\,\mathrm{K\Omega}} - 3\,\mathrm{K\Omega} \right) = \frac{4}{5}\,\mathrm{K\Omega} = 800\,\Omega \\ R_{11} &= 2\,\frac{2\,\mathrm{K\Omega}}{4\,\mathrm{K\Omega}} \, \frac{2\,\mathrm{K\Omega} \cdot 2\,\mathrm{K\Omega}}{4\,\mathrm{K\Omega}} = 1\,\mathrm{K\Omega} \end{aligned} \tag{3.12}$$