Esperimentazioni II A

SOLUZIONE del compito del 10 gennaio 2008

1. L'equazione del circuito è in generale data da

$$V(t) - i\,R - \frac{q}{C} = 0 \tag{1.1}$$

dove i è considerata positiva quando scorre attraverso R dal generatore al condensatore, per cui $i = dq/dt$. Nel tratto crescente della rampa di tensione la (1.1) diventa

$$iR + \frac{q}{C} = \alpha t \tag{1.2}$$

La soluzione generale dell'omogenea associata vale

$$q(t) = \gamma\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{con} \qquad \tau = RC \tag{1.3}$$

dove γ è una costante da determinarsi in base alle condizioni iniziali. La soluzione particolare può essere cercata, senza eccessivi sforzi di fantasia, come un polinomio di ordine 1 in t

$$q(t) = A + B\,t \qquad \text{da cui} \qquad i(t) = B \tag{1.4}$$

Sostituiamo la (1.4) nella (1.2) e otteniamo

$$\left(B\,R + \frac{A}{C}\right) + \left(\frac{B}{C} - \alpha\right)\, t = 0 \tag{1.5}$$

Perché la (1.4) sia soluzione dell'equazione differenziale occorre che i coefficienti del polinomio di primo grado (1.5) siano entrambi nulli per cui

$$\begin{cases} B\,R + \frac{A}{C} = 0 \\ \\ \frac{B}{C} - \alpha = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} B = C\,\alpha \\ \\ A = -R\,C^2\,\alpha \end{cases} \tag{1.6}$$

La soluzione generale dell'equazione è data dunque da

$$q(t) = \gamma\, e^{-\frac{t}{\tau}} - R\,C^2\,\alpha + C\,\alpha\, t \tag{1.7}$$

Resta solo da determinare il coefficiente γ in base alle condizioni iniziali, che sono $q(0) = 0$. Risulta infine

$$q(t) = R\,C^2\,\alpha\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) + C\,\alpha\, t \qquad 0 \le t \le t_1 \tag{1.8}$$

Conseguentemente avremo per $V_C(t) = q(t)/C$

$$V_C(t) = \alpha\,\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) + \alpha\, t \qquad 0 \le t \le t_1 \tag{1.9}$$

Il secondo termine della (1.9) non è che la tensione del generatore $V(t)$, mentre il primo è nullo inizialmente e tende asintoticamente a un valore $-\tau\,\alpha$. Il valore asintotico di $V_C(t)$ vale infatti

$$V_C(t) \simeq \alpha\, t - \alpha\,\tau = \alpha(t - \tau) \qquad t \gg \tau \tag{1.10}$$

L'andamento di $V_C(t)$ è visualizzato nel grafico più sotto. La (1.10) mostra che per $t \gg \tau$ la tensione sul condensatore cresce linearmente nella stessa misura di quella del generatore e che fra le due tensioni si mantiene una differenza costante. Il fatto si spiega qualitativamente in modo facile se consideriamo che per ogni incremento infinitesimo di tempo dt l'incremento corrispondente di tensione sul condensatore $dV_C(t)$ vale

$$dV_C(t) = \frac{i\,dt}{C} = \frac{V(t) - V_C(t)}{RC}\,dt \tag{1.11}$$

Per $t = 0$ $V(0)$ e $V_C(0)$ sono entrambe nulle, per cui $i(0) = 0$ e istantaneamente il condensatore non si carica; al crescere di $V(t)$ cresce la differenza $V(t) - V_C(t)$ e il condensatore si carica sempre più velocemente. Il fenomeno tende asintoticamente a una situazione in cui la differenza $V(t) - V_C(t)$ ha raggiunto un valore tale per cui la tensione sul condensatore sale con la stessa velocità con cui cresce $V(t)$. Questo si ha se $dV_C(t) = dV(t)$ ossia se

$$\frac{V(t) - V_C(t)}{RC}\,dt = \alpha\,dt \qquad \text{ossia} \qquad V_C(t) = V(t) - \tau\,\alpha \tag{1.12}$$

che corrisponde esattamente al risultato della (1.10).

Veniamo adesso ad analizzare la situazione per $t > t_1$. L'equazione del circuito diventa

$$iR + \frac{q}{C} = 2\alpha\,t_1 - \alpha t \tag{1.13}$$

Risolviamo l'equazione con lo stesso procedimento già usato. Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $q(t) = D + E\,t$. Si ottiene

$$\left(E\,R + \frac{D}{C} - 2\alpha\,t_1\right) + \left(\frac{E}{C} + \alpha\right) t = 0 \tag{1.14}$$

da cui si ricava $E = -C\,\alpha$, $D = 2\,C\,\alpha\,t_1 + R\,C^2\,\alpha$. La soluzione generale della (1.13) è data quindi da

$$q(t) = \delta\,e^{-\frac{t}{\tau}} + 2\,C\,\alpha\,t_1 + R\,C^2\,\alpha - C\,\alpha\,t \tag{1.15}$$

Il coefficiente δ si calcola dalle condizioni iniziali, imponendo che $q(t_1)$ calcolato con la (1.15) coincida con il valore ottenuto dalla (1.8) per $t = t_1$. Infatti dalla (1.11) si ricava che la tensione sul condensatore, e quindi la carica, non possono variare di una quantità finita in un tempo infinitesimo. Svolgendo il calcolo si ottiene

$$q(t) = R\,C^2\,\alpha\left(1 - 2\,e^{\frac{t_1}{\tau}}\right)\,e^{-\frac{t}{\tau}} + 2\,C\,\alpha\,t_1 + R\,C^2\,\alpha - C\,\alpha\,t \qquad t \geq t_1 \tag{1.16}$$

Conseguentemente

$$V_C(t) = \alpha\,\tau\left(1 - 2\,e^{\frac{t_1}{\tau}}\right)\,e^{-\frac{t}{\tau}} + 2\,\alpha\,t_1 + \alpha\,\tau - \alpha\,t \qquad t \geq t_1 \tag{1.17}$$

Il massimo di $V_C(t)$ si avrà quando $dq(t)/dt = 0$, ossia quando si annullerà la corrente $i(t)$. Abbiamo, derivando la (1.16) rispetto al tempo,

$$i(t) = C\,\alpha\left[\left(2\,e^{\frac{t_1}{\tau}} - 1\right)\,e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right] \tag{1.18}$$

Si può facilmente verificare che $i(t_1) > 0$, ossia che il condensatore seguita a caricarsi immediatamente dopo t_1. Uguagliando la (1.18) a 0 otteniamo il valore $\bar{t}$ per cui si ha la massima tensione sul condensatore

$$\bar{t} = \tau \log\left(2\, e^{\frac{t_1}{\tau}} - 1\right) \tag{1.19}$$

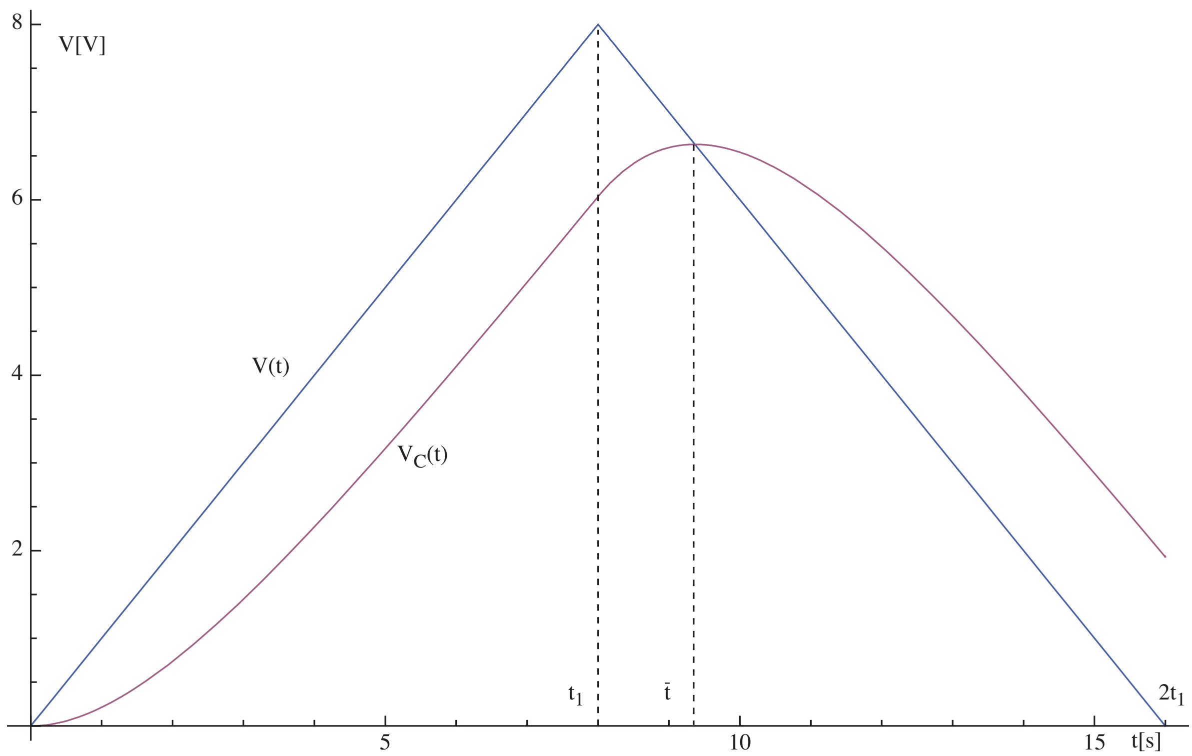
Si può verificare che $\bar{t} > t_1$, come deve essere affinché la soluzione abbia significato fisico. Inserendo il valore dato dalla(1.19) nella (1.17) si trova

$$V_C(\bar{t}) = \alpha\,\tau \frac{1 - 2\, e^{\frac{t_1}{\tau}}}{2\, e^{\frac{t_1}{\tau}} - 1} + 2\,\alpha\, t_1 + \alpha\,\tau - \alpha\,\bar{t} = 2\,\alpha\, t_1 - \alpha\,\bar{t} = V(\bar{t}) \tag{1.20}$$

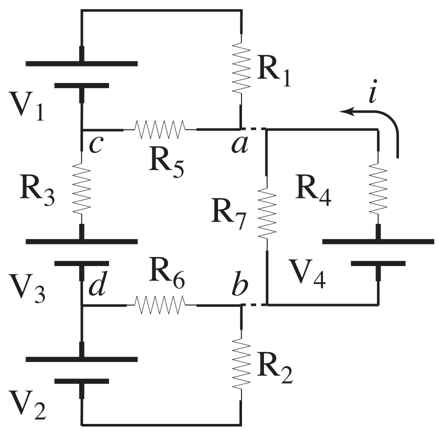
Il massimo della tensione sul condensatore si ha nel momento in cui questa uguaglia la tensione del generatore. Il risultato si poteva prevedere dalla (1.11), da cui si vede che i si annulla quando la tensione del generatore e quella sul condensatore sono uguali. Calcoliamo infine $V_C(2t_1)$

$$V_C(2t_1) = \alpha\,\tau\left(1 - 2\, e^{\frac{t_1}{\tau}}\right) e^{-\frac{2t_1}{\tau}} + \alpha\,\tau = \alpha\,\tau\left(1 - 2\, e^{-\frac{t_1}{\tau}} + e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\right) = \alpha\,\tau\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)^2 \tag{1.21}$$

Si vede che $V_C(t_1)$ è comunque positiva (salvo il caso limite $t_1 = 0$ in cui il generatore eroga sempre tensione nulla e il condensatore resta scarico). Questo è ancora deducibile dalla (1.11): per $t > \bar{t}$ il circuito si comporta in modo esattamente simmetrico a quello della rampa crescente; la differenza $V(t) - V_C(t)$, inizialmente nulla, diventa negativa e tende asintoticamente, come si vede dalla (1.17), a $-\alpha\,\tau$. Quindi per $t = 2t_1$, quando si annulla $V(t)$, $V_C(t)$ è ancora positivo. Riportiamo in grafico l'andamento di $V(t)$ e $V_C(t)$.



Inserendo i valori numerici si ottiene $\bar{t} = 9.368\,\text{s}$, $V_C(\bar{t}) = 6.632\,\text{V}$, $V_C(2t_1) = 1.927\,\text{V}$.[1]



2. La corrente richiesta può essere calcolata convenientemente applicando ripetutamente il teorema di Thévenin per semplificare il circuito. Come primo passo, possiamo separare il circuito come mostrato in figura e calcolare tensione e resistenza equivalenti della parte che si trova a sinistra della separazione, vista dai punti a e b. La tensione equivalente V_{eq} si può scrivere come somma delle cadute

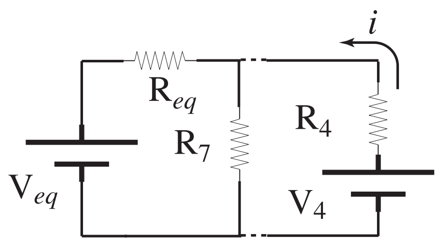
$$V_{eq} = V_a - V_b = (V_a - V_c) + (V_c - V_d) + (V_d - V_b) \quad (2.1)$$

$V_a - V_c$ e $V_d - V_b$ si calcolano facilmente con la regola del partitore; per quanto riguarda $V_c - V_d$, basta osservare che in queste condizioni attraverso R_3 non passa corrente e quindi $V_c - V_d = V_3$. Si avrà pertanto

$$V_{eq} = V_1 \frac{R_5}{R_1 + R_5} + V_2 \frac{R_6}{R_6 + R_2} + V_3 \quad (2.2)$$

La resistenza equivalente vista fra a e b si calcola molto semplicemente

$$R_{eq} = \frac{R_1\,R_5}{R_1 + R_5} + \frac{R_2\,R_6}{R_2 + R_6} + R_3 \quad (2.3)$$



Usando il circuito equivalente arriviamo alla configurazione in figura. Possiamo semplificarla ancora staccando V_4 e R_4 e determinando il circuito equivalente della maglia formata da V_{eq}, R_{eq} e R_7. Questo non è che un partitore di tensione, per cui

$$V'_{eq} = V_{eq} \frac{R_7}{R_7 + R_{eq}} \qquad R'_{eq} = \frac{R_7\,R_{eq}}{R_7 + R_{eq}} \quad (2.4)$$

Con questi risultati i si calcola semplicemente dall'equazione della maglia

$$i = \frac{V_4 - V'_{eq}}{R_4 + R_{eq}} \quad (2.5)$$

A questo punto sarebbe buona prassi sostituire nella (2.5) i risultati della (2.4), (2.3) e (2.2), cercando di ottenere un'espressione semplificata. Tuttavia, in questo caso non

[1] Diamo i risultati numerici con 4 cifre significative, indipendentemente da quello che sarebbe corretto nella prassi fisica, per un confronto più accurato dei calcoli. Valori riportati con meno di 4 cifre sono da considerarsi esatti.

arriveremmo ad un'espressione più semplice, per cui può risultare vantaggioso eseguire il calcolo numerico nello stesso ordine in cui si sono trovate via via le quantità

$$\begin{aligned} V_{eq} &= 10\,\mathrm{V}\frac{4\,\mathrm{K}\Omega}{5\,\mathrm{K}\Omega} + 5\,\mathrm{V}\frac{3\,\mathrm{K}\Omega}{5\,\mathrm{K}\Omega} + 9\,\mathrm{V} = 20\,\mathrm{V} \\ R_{eq} &= \frac{4\,[\mathrm{K}\Omega]^2}{5\,\mathrm{K}\Omega} + \frac{6\,[\mathrm{K}\Omega]^2}{5\,\mathrm{K}\Omega} + 6\,\mathrm{K}\Omega = 8\,\mathrm{K}\Omega \end{aligned} \tag{2.6}$$

da cui

$$V'_{eq} = 20\,\mathrm{V}\frac{8\,\mathrm{K}\Omega}{16\,\mathrm{K}\Omega} = 10\,\mathrm{V} \qquad R'_{eq} = \frac{64\,[\mathrm{K}\Omega]^2}{16\,\mathrm{K}\Omega} = 4\,\mathrm{K}\Omega \tag{2.7}$$

e infine

$$i = \frac{15\,\mathrm{V} - 10\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{K}\Omega + 4\,\mathrm{K}\Omega} = 1\,\mathrm{mA} \tag{2.8}$$

3. Per calcolare la tensione ai capi di R_2, all'uscita del circuito, conviene anzitutto indicare le quattro impedenze con nomi generici: $Z_1 = j\omega L$, $Z_2 = R_1$, $Z_3 = 1/j\omega C$, $Z_4 = R_2$. Calcoliamo quindi l'equivalente di Thévenin del circuito costituito da $\mathcal{V}_1$, Z_1 e Z_2 visto fra il capo a sinistra del condensatore e il capo comune. Si tratta di un partitore, per cui

$$\mathcal{V}_{eq} = \mathcal{V}_1\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad Z_{eq} = \frac{Z_1\,Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{3.1}$$

Se applichiamo il circuito equivalente al posto di quello dato, otteniamo, visto da R_2, di nuovo un partitore, per cui la tensione $\mathcal{V}_2$ si calcola come

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \mathcal{V}_{eq}\frac{Z_4}{Z_{eq} + Z_3 + Z_4} = \mathcal{V}_1\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{Z_4}{\frac{Z_1\,Z_2}{Z_1+Z_2} + Z_3 + Z_4} = \\ &= \mathcal{V}_1\frac{Z_2\,Z_4}{Z_1\,Z_2 + (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Avremo perciò per $\mathcal{A}(\omega)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\omega) &= \frac{R_1\,R_2}{j\omega L\,R_1 + (R_1 + j\omega L)\left(R_2 - \frac{j}{\omega C}\right)} = \frac{1}{\frac{j\omega L}{R_2} + \left(1 + \frac{j\omega L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{j}{\omega R_2 C}\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{L}{R1\,R_2\,C} + j\left[\omega L\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{\omega R_2 C}\right]} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nell'ultima espressione si sono separate, al denominatore, la parte reale e quella immaginaria. Si noti che non si è effettuata alcuna razionalizzazione del numero complesso: la razionalizzazione in questi contesti quasi sempre complica solo i calcoli. Si può ora scrivere facilmente l'espressione del modulo

$$|\mathcal{A}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{L}{R1\,R_2\,C}\right)^2 + \left[\omega L\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{\omega R_2 C}\right]^2}} \tag{3.4}$$

Dobbiamo massimizzare l'espressione (3.4) rispetto a ω: questo corrisponde a minimizzare il denominatore, ossia il termine in radice quadrata, che è dato dalla somma di due quadrati. Il primo quadrato non dipende da ω, per cui la massimizzazione si riduce a minimizzare il termine al quadrato in parentesi quadre. Trattandosi di un quadrato, il minimo valore possibile è 0, e si raggiunge quando

$$\omega L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{\omega R_2 C} = 0 \tag{3.5}$$

Sarà dunque

$$\omega_M^2 = \frac{1}{C\, R_2\, L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \qquad \text{da cui} \qquad \omega_M = \sqrt{\frac{1}{L\, C} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \tag{3.6}$$

Corrispondentemente

$$\mathcal{A}(\omega_M) = \frac{1}{1 + \frac{L}{R1\, R_2\, C}} \tag{3.7}$$

Alla pulsazione corrispondente al valore massimo del modulo, $\mathcal{A}(\omega)$ risulta reale, per cui il modulo corrisponde al valore stesso e la fase è nulla. Con i valori numerici si ottiene $\omega_M = 8165\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $\mathcal{A}(\omega_M) = 0.9901$.

Notiamo infine che se poniamo $1/(R_2\, C) = \omega_2$, $R/L = \omega_1$, $R_p = R_1\, R_2/(R_1 + R_2)$, $R_p/L = \omega_p$ possiamo scrivere la (3.3) e la (3.6) in una forma particolarmente compatta

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} + j \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)} \qquad \omega_M = \sqrt{\omega_p \omega_2} \tag{3.8}$$