Esperimentazioni di Fisica II A

SOLUZIONE del compito del 9 gennaio 2009

1. Assumiamo convenzionalmente nella maglia del circuito una corrente i scorrente in senso orario e scriviamo l'equazione di Kirchhoff

$$V - L\frac{di}{dt} - R\,i - \frac{q}{C} = 0 \tag{1.1}$$

dove q è la carica sul condensatore, presa positiva quando $V_C > 0$. Con le convenzioni prese per q e i le due grandezze sono legate dalla relazione $i = dq/dt$.[1] Tenendo conto di ciò possiamo scrivere la (1.1) come equazione differenziale del secondo ordine in $q(t)$, lineare a coefficienti costanti

$$L\,\ddot{q} + R\,\dot{q} + \frac{1}{C}\,q = V \tag{1.2}$$

La soluzione generale della (1.2) è data dalla somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'omogenea associata, in cui si pone a 0 il secondo membro. La soluzione particolare si determina banalmente nella forma

$$q_{\mathrm{part}} = C\,V \tag{1.3}$$

Per la soluzione generale dell'omogenea associata occorre risolvere l'equazione algebrica

$$L\,\gamma^2 + R\,\gamma + \frac{1}{C} = 0 \qquad \gamma = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} \tag{1.4}$$

Il tipo di soluzioni dipende dal segno del discriminante $\Delta = R^2 - 4L/C$. Con i nostri valori

$$\Delta = 25\,\Omega^2 - 4\,\frac{10^{-1}\,\mathrm{H}}{10^{-5}\,\mathrm{F}} = -39975\,\Omega^2 \tag{1.5}$$

Il discriminante negativo implica radici complesse coniugate per la (1.4) che si traducono in una soluzione oscillante per q

$$q_{\mathrm{om}}(t) = e^{-\alpha t}\,(A\cos\beta\,t + B\sin\beta\,t) \qquad \text{dove} \qquad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2L} \tag{1.6}$$

dove A e B sono costanti arbitrarie. Si avrà quindi come soluzione della (1.2)

$$q(t) = e^{-\alpha t}\,(A\cos\beta\,t + B\sin\beta\,t) + CV \tag{1.7}$$

[1] Nello studiare i circuiti abbiamo la libertà di scegliere il verso che consideriamo positivo per le correnti e quale armatura di un condensatore è a potenziale più positivo per una data carica q Non si deve però dare per scontato che se in una maglia scorre una corrente i e si trova un condensatore con carica q su una delle armature (e quindi $-q$ sull'altra) valga sempre $i = dq/dt$. Occorre valutare se, con le convenzioni scelte, una i positiva porta a un aumento o a una diminuzione di q nel tempo e scegliere coerentemente il segno nella relazione.

Determiniamo le costanti A e B in base alle condizioni iniziali $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$. Per fare ciò calcoliamo $\dot{q}(t)$

$$\dot{q}(t) = e^{-\alpha t}\, \left[\beta\,(-A \sin \beta\, t + B \cos \beta\, t) - \alpha\,(A \cos \beta\, t + B \sin \beta\, t)\right] \tag{1.8}$$

Sostituendo le condizioni iniziali nella (1.7) e (1.8) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A + CV = 0 \\ \beta\, B - \alpha\, A = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} A = -CV \\ B = -\frac{\alpha}{\beta}\, CV \end{cases} \tag{1.9}$$

Sostituendo i valori trovati delle costanti nella (1.7) e nella (1.8) abbiamo

$$\begin{aligned} q(t) &= CV \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \beta\, t + \frac{\alpha}{\beta}\, \sin \beta\, t\right)\right] \\ \dot{q}(t) &= CV\, e^{-\alpha t}\, \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta}\, \sin \beta\, t \end{aligned} \tag{1.10}$$

La tensione V_C è data da $V_C = q/C$ per cui risulta

$$\begin{aligned} V_C(t) &= V \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \beta\, t + \frac{\alpha}{\beta}\, \sin \beta\, t\right)\right] \\ \dot{V}_C(t) &= V\, e^{-\alpha t}\, \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta}\, \sin \beta\, t \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dalle (1.11) risulta immediatamente che i massimi/minimi relativi di $V_C(t)$ si hanno quando $\sin \beta\, t = 0$ ossia ai tempi

$$t_k = \frac{k\pi}{\beta} \qquad k = 1, 2 \ldots \tag{1.12}$$

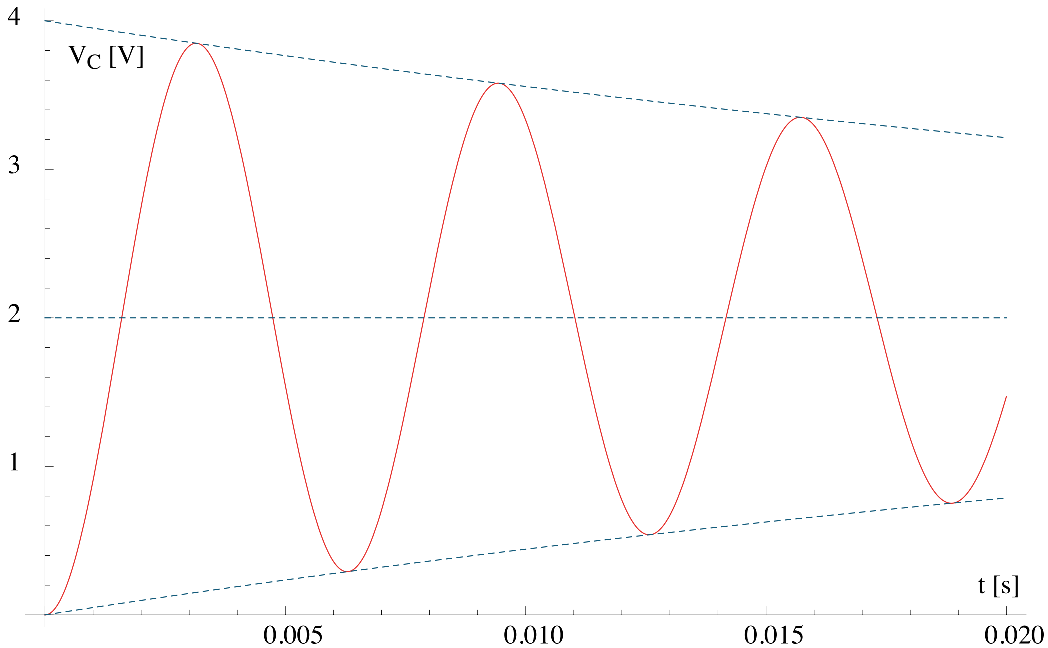
I valori corrispondenti per la tensione sono

$$V_C(t_k) = V\, \left[1 - (-1)^k\, e^{-k\pi \frac{\alpha}{\beta}}\right] \tag{1.13}$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$$\alpha = 25\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \beta = 25\sqrt{1599}\,\mathrm{s}^{-1}, \quad t_k = \frac{k\pi}{25\sqrt{1599}}\,\mathrm{s}, \quad V_C(t_k) = 2\, \left[1 - (-1)^k\, e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{1599}}}\right]\,\mathrm{V} \tag{1.14}$$

Ossia $t_1 = 3.143\,\mathrm{ms}$, $t_2 = 6.285\,\mathrm{ms}$, $t_3 = 9.428\,\mathrm{ms}$, $V_C(t_1) = 3.849\,\mathrm{V}$, $V_C(t_1) = 0.2908\,\mathrm{V}$, $V_C(t_1) = 3.580\,\mathrm{V}$.



In figura è rappresentato l'andamento di $V_C(t)$: si nota che per $t = 0$ è nulla sia la funzione che la derivata, corrispondentemente alle condizioni iniziali. Si nota anche che, come indicato dalla (1.13), i punti di massimo e minimo relativo delle oscillazioni si trovano sulle due esponenziali tratteggiate, rispettivamente $V(1 + e^{-\alpha t})$ e $V(1 - e^{-\alpha t})$.

2. Per risolvere il problema dobbiamo innanzitutto calcolare la corrente i che scorre nel galvanometro in funzione della forza elettromotrice e delle resistenze date. A questo scopo determiniamo l'equivalente di Thévenin del ponte come viene visto dal ramo che contiene il galvanometro. La tensione equivalente V_{eq} si può calcolare semplicemente come differenza delle tensioni esistenti fra ciascun punto di attacco del galvanometro e il capo negativo della batteria. Le due differenze di potenziale risultano semplicemente dalla formula del partitore e si ha:

$$V_{\text{eq}} = V \left(\frac{R}{R + R_x} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \tag{2.1}$$

La resistenza equivalente R_{eq} si calcola sostituendo il generatore con un corto–circuito. In queste condizioni, le resistenze R e R_x risultano fra loro in parallelo, così come R_1 e R_2, e si ha

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_x R}{R_x + R} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.2}$$

A questo punto risulta banale calcolare la corrente che fluisce nel galvanometro

$$i = \frac{V_{\text{eq}}}{R_g + R_{\text{eq}}} \tag{2.3}$$

Per determinare l'errore di sensibilità su R_x possiamo supporre che il ponte si trovi in condizione di azzeramento perfetto, per cui la corrente nel galvanometro è nulla, e che quindi R_x vari di una piccola quantità ΔR_x. Questo provocherà una corrente non nulla nel circuito, che sarà però rivelata solo se superiore, in valore assoluto a i_m. Per calcolare questa corrente possiamo sviluppare i fino al primo ordine in R_x nella condizione di azzeramento

$$i \simeq i_{\text{azz}} + \left.\frac{\partial i}{\partial R_x}\right|_{\text{azz}} \Delta R_x \;=\; \left.\frac{\partial i}{\partial R_x}\right|_{\text{azz}} \Delta R_x \tag{2.4}$$

dove ΔR_x è la variazione di R_x rispetto al valore per cui il ponte è azzerato e si è tenuto conto che, per definizione di azzeramento, $i_{\text{azz}} = 0$. Calcoliamo la derivata nella (2.4)

$$\frac{\partial i}{\partial R_x} = \frac{\frac{\partial V_{\text{eq}}}{\partial R_x}}{R_g + R_{\text{eq}}} - \frac{V_{\text{eq}}}{(R_g + R_{\text{eq}})^2}\,\frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial R_x} \tag{2.5}$$

La derivata deve essere calcolata all'azzeramento del ponte, per cui il fattore V_{eq} nel secondo termine risulta nullo e quindi rimane da calcolare solo il primo termine. Si ha

$$\frac{\partial V_{\text{eq}}}{\partial R_x} = -\frac{VR}{(R + R_x)^2} \tag{2.6}$$

Calcoliamo adesso la (2.2) e la (2.6) nelle condizioni di azzeramento. Questo è dato quando $R = R_x \cdot R_2/R_1$. È conveniente introdurre il parametro $\alpha = R_2/R_1$ e esprimere le quantità in funzione di V, R_x, R_1 e α.

$$R_{\text{eq}} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\,(R_x + R_1) \qquad \frac{\partial V_{\text{eq}}}{\partial R_x} = -\frac{V}{R_x}\,\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \tag{2.7}$$

Introducendo questi valori nella (2.5) si ottiene

$$\left.\frac{\partial i}{\partial R_x}\right|_{\text{azz}} = -\frac{V}{R_x}\,\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{1}{(1+\alpha)R_g + \alpha(R_x + R_1)} \tag{2.8}$$

La (2.4) esprime la corrente nel galvanometro per una variazione di R_x intorno al valore di azzeramento. Il limite di sensibilità per R_x sarà dato dalla variazione per cui i raggiunge, in valore assoluto, la corrente minima che il galvanometro può discriminare da 0, ossia

$$\left|\frac{\partial i}{\partial R_x}\right|_{\text{azz}} \Delta R_x = i_m \tag{2.9}$$

L'errore relativo di sensibilità cercato è quindi

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{i_m}{\left|\frac{\partial i}{\partial R_x}\right|_{\text{azz}} R_x} \tag{2.10}$$

Introducendo il valore trovato nella (2.8) si ha

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{i_m\,(1+\alpha)}{V}\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}R_g + R_x + R_1\right) \tag{2.11}$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{3\cdot 10^{-9}\,\text{A}}{10\,\text{V}}\left(\frac{30}{2} + 10 + 1\right)\cdot 10^2\,\Omega = 78\cdot 10^{-8} = 0.78 \text{ p.p.m.} \tag{2.12}$$

3. Il circuito, grazie alla sua linearità, può essere studiato utilizzando il principio di sovrapposizione, ossia calcolando separatamente le tensioni che si avrebbero sul condensatore considerando attivo via via uno solo dei generatori, mentre gli altri sono sostituiti da corti–circuiti, e sommando i tre risultati. Per il generatore di tensione continua, a regime il condensatore risulta carico alla tensione stessa del generatore (come si determina anche dalla soluzione del primo esercizio) per cui

$$V_{c0} = V_0 \tag{3.1}$$

Gli altri due generatori presentano un'identica situazione, salvo che per il valore della frequenza, per cui conviene eseguire il calcolo per una frequenza generica e sostituire dopo i valori particolari. Il circuito si presenta come un semplice partitore per cui, utilizzando il formalismo delle impedenze complesse, abbiamo

$$\mathcal{V}_{ci} = \mathcal{V}_{gi}\,\frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = \mathcal{V}_{gi}\,\frac{1}{1 - \omega_i^2 LC + j\,\omega_i RC} \tag{3.2}$$

dove $\mathcal{V}_{gi}$ è la tensione complessa del generatore considerato. A questa espressione corrisponde per la tensione reale

$$V_{ci}(t) = V_{ci0}\cos(\omega_i t + \phi_i) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} V_{ci0} = \dfrac{V_{i0}}{\sqrt{\left(1-\omega_i^2 LC\right)^2 + \omega_i^2 R^2 C^2}} \\ \phi_i = -\arctan(1 - \omega_i^2 LC\ ,\ \omega_i RC) \end{cases} \tag{3.3}$$

Nella (3.3) si è usata la versione “completa” della funzione arctan, nella forma $\arctan(x, y)$, che tiene conto separatamente del segno del termine in ascissa e di quello in ordinata e fornisce l'angolo corrispondente corretto in tutti e quattro i quadranti, a differenza dell'usuale arctangente, limitata fra $-\pi/2$ e $\pi/2$.[2] Quindi in totale la tensione ai capi del condensatore può essere scritta come

$$V_c(t) = V_0 + V_{c10}\cos(\omega_0 t + \phi_1) + V_{c20}\cos(2\omega_0 t + \phi_2) \tag{3.4}$$

dove

$$\begin{aligned} V_{c10} &= \frac{V_{10}}{\sqrt{\left(1-\omega_0^2 LC\right)^2 + \omega_0^2 R^2 C^2}} \qquad & \phi_1 &= -\arctan(1 - \omega_0^2 LC\ ,\ \omega_0 RC) \\ V_{c20} &= \frac{V_{20}}{\sqrt{\left(1-4\omega_0^2 LC\right)^2 + 4\omega_0^2 R^2 C^2}} \qquad & \phi_2 &= -\arctan(1 - 4\omega_0^2 LC\ ,\ 2\omega_0 RC) \end{aligned} \tag{3.5}$$

L'energia accumulata nel condensatore all'istante t è data da

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\,C V_c^2(t) \tag{3.6}$$

Dato che $V_c(t)$ è una funzione periodica con periodo $T = 2\pi/\omega_0$, per ottenere l'energia media occorre mediare la (3.6) su un tempo T

$$\overline{E_c} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,C V_c^2(t)\,dt \tag{3.7}$$

[2] La funzione $arctan(x, y)$ è implementata in tutti i linguaggi di programmazione matematica; dovendo operare a mano o con un calcolatore tascabile occorre, dopo aver calcolato $arctan(y/x)$, valutare e correggere il risultato in base ai segni delle due componenti, eventualmente aggiungendo o togliendo π.

Osserviamo che il quadrato della tensione su C si ottiene, dalla (3.4), come somma dei quadrati dei tre termini che la compongono e dei tre doppi prodotti fra le coppie diverse di termini. I doppi prodotti che contengono il termine V_0 hanno un andamento sinusoidale e quindi la loro media su uno o due periodi è nulla. Per l'ultimo doppio prodotto possiamo usare la formula di prostaferesi $\cos\alpha\cos\beta = (1/2)[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$$\begin{aligned} &2\,V_{c10}\cos(\omega_0 t + \phi_1)\,V_{c20}\cos(2\omega_0 t + \phi_2) = \\ &= V_{c10}\,V_{c20}\,[\cos(3\omega_0 + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\omega_0 + \phi_2 - \phi_1)] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Abbiamo quindi la somma di due termini sinusoidali di nuovo a media nulla. Quindi, gli unici termini che nel quadrato della (3.4) danno un contributo non nullo alla media sono i quadrati dei tre elementi. Il termine costante V_0 dà ovviamente come media se stesso, mentre negli altri due termini si ha la media della funzione $\cos^2$ su uno o due periodi, che vale 1/2 (lo si comprende elementarmente se si considera che su un periodo o multiplo di periodo le medie di $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$ danno lo stesso risultato e che la somma delle due vale ovviamente 1). Avremo allora

$$\overline{E_c} = \frac{1}{2}\,C\left[V_0^2 + \frac{1}{2}\,V_{c10}^2 + \frac{1}{2}\,V_{c20}^2\right] \tag{3.9}$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$$\begin{aligned} V_{c10} &= \frac{2\,\mathrm{V}}{\sqrt{(1 - 10^8\,\mathrm{rad}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot 10^{-1}\,\mathrm{H}\cdot 10^{-7}\,\mathrm{F})^2 + 10^8\,\mathrm{rad}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot 10^6\,\Omega^2\cdot 10^{-14}\,\mathrm{F}^2}} = 2\,\mathrm{V} \\ \phi_1 &= -\arctan(0,1) = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} \\ V_{c20} &= \frac{4\,\mathrm{V}}{\sqrt{(1-4)^2 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{13}}\,\mathrm{V} = 1.109\,\mathrm{V} \\ \phi_2 &= -\arctan(-3,2) = -(\pi - \arctan\frac{2}{3}) = \arctan\frac{2}{3} - \pi = -2.554\,\mathrm{rad} \\ \overline{E_c} &= \frac{1}{2}\,10^{-7}\,\mathrm{F}\cdot\left[1 + 2 + \frac{8}{13}\right]\,\mathrm{V}^2 = \frac{47}{26}\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J} = 1.808\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{3.10}$$