Esperimentazioni di Fisica II A

SOLUZIONE del compito del 10 gennaio 2007

1. Per $0 < t \leq t_1$ il circuito è costituito da una maglia contenente il generatore, la resistenza R_1 e il condensatore. L'equazione della medesima è

$$V - i\,R_1 - \frac{q}{C} = 0 \qquad R_1\,i + \frac{q}{C} = V \tag{1.1}$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti. La sua soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare, nel nostro caso $q = CV$, e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata. La soluzione dell'omogenea associata è del tipo $q(t) = A\,e^{\alpha t}$ dove α è soluzione dell'equazione algebrica $R_1\,\alpha + \frac{1}{C} = 0$, con A costante da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Abbiamo perciò

$$q(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau_1}} + CV \qquad \text{con} \qquad \tau_1 = R_1 C \tag{1.2}$$

Essendo $q(0) = 0$, risulta

$$q(t) = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \tag{1.3}$$

La (1.3) esprime l'andamento della carica fino a $t = t_1$. Conseguentemente la differenza di potenziale ai capi del condensatore al tempo t_1 vale

$$V_{C1} = V\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}\right) \tag{1.4}$$

Al tempo $t = t_1$ viene inserita la resistenza R_2. Il miglior metodo per trovare l'andamento della carica consiste nel calcolare il circuito equivalente di Thévenin visto dal condensatore. Esso risulta analogo a quello precedente, formato però da un generatore V_{eq} e una resistenza R_{eq} dati da

$$V_{eq} = V\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{1.5}$$

Per calcolare l'andamento di $q(t)$ si possono utilizzare ancora le equazioni (1.1) e (1.2), sostituendo i valori delle (1.5) a V e R_1

$$q(t) = B\,e^{-\frac{t}{\tau}} + CV_{eq} \qquad \text{con} \qquad \tau = R_{eq} C \tag{1.6}$$

Le condizioni iniziali in questo caso sono $q(t_1) = CV_{C1}$, da cui si ricava l'andamento di $q(t)$ per $t > t_1$

$$q(t) = C\left[(V_{C1} - V_{eq})\,e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} + V_{eq}\right] \tag{1.7}$$

La tensione V_{C2} al tempo $t = t_1 + t_2$ è data quindi da

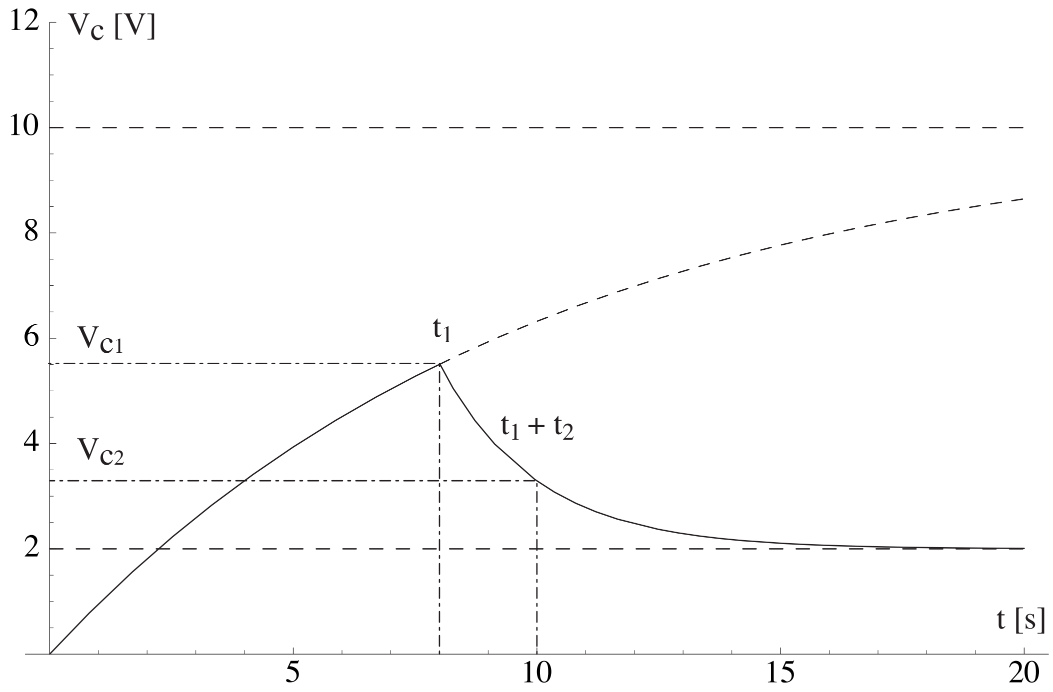
$$V_{C2} = (V_{C1} - V_{eq})\,e^{-\frac{t_2}{\tau}} + V_{eq} \tag{1.8}$$

Introducendo i valori numerici abbiamo[1]

$$\tau_1 = 10\,\mathrm{s} \quad V_{eq} = 2\,\mathrm{V} \quad R_{eq} = 200\,\mathrm{K\Omega} \quad \tau = 2\,\mathrm{s} \quad V_{C1} = 5.507\,\mathrm{V} \quad V_{C2} = 3.290\,\mathrm{V} \tag{1.9}$$

[1] Diamo i risultati numerici con 4 cifre significative, indipendentemente da quello che sarebbe corretto nella prassi fisica, per un confronto più accurato dei calcoli. Quando i risultati sono dati con meno di 4 cifre significative, sono da considerarsi matematicamente esatti.

Dalla (1.3) e dalla (1.7), osservando i risultati numerici, è possibile tracciare il grafico dell'andamento di $V_C(t)$. Per $0 < t \leq t_1$ la tensione ai capi del condensatore tende asintoticamente a V partendo da 0, con costante di tempo τ_1; per $t > t_1$ la tensione tende asintoticamente a V_{eq} partendo da V_{C1} con costante di tempo τ.



2. Se chiamiamo Z_s e Z_p le impedenze dei rami dove condensatore e resistenza si trovano, rispettivamente, in serie e in parallelo, all'azzeramento del ponte avremo

$$Z_s R_2 = Z_p R_1 \qquad \text{da cui} \qquad Z_s \frac{1}{Z_p} = \frac{R_1}{R_2} \tag{2.1}$$

Inserendo i valori di Z_s e $1/Z_p$ si ottiene

$$\left(R_s + \frac{1}{j\omega C_s}\right)\left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p\right) = \frac{R_1}{R_2} \tag{2.2}$$

Uguagliando le parti reali e immaginarie delle espressioni al primo e al secondo membro si ottengono le due relazioni che devono essere verificate per l'azzeramento

$$\begin{cases} \frac{R_s}{R_p} + \frac{C_p}{C_s} = \frac{R_1}{R_2} \\ \\ \omega^2 = \frac{1}{C_s R_s C_p R_p} \end{cases} \tag{2.3}$$

Per ottenere le espressioni di R_p e C_p ricaviamo R_p dalla seconda delle (2.3)

$$R_p = \frac{1}{\omega^2 C_s R_s C_p} \tag{2.4}$$

e lo sostituiamo nella prima, ottenendo

$$C_p = C_s \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{1 + \omega^2 C_s^2 R_s^2} \tag{2.5}$$

Sostituendo il valore della (2.5) nella (2.4) abbiamo anche la soluzione per R_p

$$R_p = R_s \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + \omega^2 C_s^2 R_s^2}{\omega^2 C_s^2 R_s^2} \tag{2.6}$$

Per ricavare i valori numerici di C_p e R_p calcoliamo $\omega C_s R_s$

$$\omega C_s R_s = 5 \cdot 10^3 \,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1} \ \cdot \ 10^{-6} \,\mathrm{F} \ \cdot \ \frac{5}{2} \cdot 10^2 \,\Omega = \frac{5}{4} \tag{2.7}$$

Da cui

$$\begin{cases} C_p = 1 \,\mu\mathrm{F} \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{1+\frac{25}{16}} = \frac{8}{41} \,\mu\mathrm{F} = 0.1951 \,\mu\mathrm{F} \\ \\ R_p = 250 \,\Omega \ \cdot 2 \cdot \frac{1+\frac{25}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{500 \cdot 41}{25} \,\Omega = 820 \,\Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

Per determinare l'errore su R_p propaghiamo dall'espressione (2.6) usando il metodo della derivata logaritmica. I calcoli si semplificano se indichiamo

$$\gamma = \omega C_s R_s \qquad \beta = 1 + \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{così che} \quad R_p = R_s \frac{R_2}{R_1} \beta \tag{2.9}$$

e calcoliamo preventivamente $d\beta/\beta$

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{-\frac{2}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{\gamma}}{1 + \frac{1}{\gamma^2}} = -\frac{2}{1+\gamma^2} \frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{2}{1+\gamma^2} \left(\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dC_s}{C_s} + \frac{dR_s}{R_s} \right) \tag{2.10}$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} \frac{dR_p}{R_p} &= \frac{dR_s}{R_s} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1} - \frac{2}{1+\gamma^2} \left(\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dC_s}{C_s} + \frac{dR_s}{R_s} \right) = \\ &= \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1} - \frac{2}{1+\gamma^2} \left(\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dC_s}{C_s} \right) + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} \frac{dR_s}{R_s} \end{aligned} \tag{2.11}$$

da cui

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{2}{1+\gamma^2} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{\Delta C_s}{C_s} \right) + \left| \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} \right| \frac{\Delta R_s}{R_s} \tag{2.12}$$

Sostituendo i valori numerici si ha

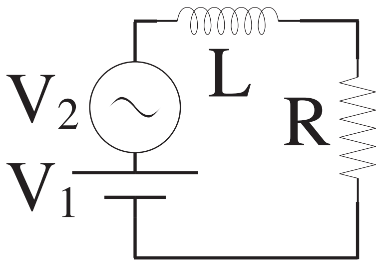
$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = \left(0.02 + 0.02 + \frac{32}{41} \left(0.1 + 0.05 \right) + \frac{9}{41} \, 0.04 \right) \% = 0.1659 \,\% \tag{2.13}$$

3. La forma d'onda del generatore dato non può essere trattata direttamente con il formalismo delle impedenze complesse, che è riservato a segnali rigorosamente sinusoidali. Tuttavia la si può facilmente trasformare utilizzando l'identità trigonometrica

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \qquad 1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{3.1}$$

Applicando questo risultato al nostro caso, possiamo scrivere la tensione $V(t)$ come

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2} \cos(2\omega t + \pi) \tag{3.2}$$



dove la fase π della componente sinusoidale compensa il segno negativo nella (3.1), consentendo di considerare positivo il termine d'ampiezza, come da convenzione. Il nostro circuito equivale quindi a uno in cui si trovano due generatori in serie, uno di tensione continua e uno di tensione alternata con pulsazione 2ω. La potenza istantanea $W(t)$ dissipata su R è data da

$$W(t) = i^2(t)R \tag{3.3}$$

Dove $i(t)$ è la corrente totale che scorre nella maglia. Per la linearità del circuito, essa può essere calcolata utilizzando il principio di sovrapposizione, come somma dei contributi dovuti ai due generatori. Dovendo calcolare poi la potenza media, ci riferiremo al funzionamento del circuito *a regime*, ossia quando i generatori sono in azione da un tempo sufficientemente lungo da poter considerare esauriti i transienti dovuti a entrambi. Per il generatore V_1 avremo, a regime,

$$i_1(t) = \frac{V_1(t)}{R} = \frac{V_0}{2R} \tag{3.4}$$

Per il generatore sinusoidale usiamo il formalismo dei numeri complessi, indicando $\mathcal{V} = (V_0/2)\, e^{j\pi}\, e^{j2\omega t}$ e con $\mathcal{I}$ la corrente corrispettiva. Avremo

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{R + j2\omega L} \tag{3.5}$$

Si noti il fattore 2 nel termine dell'impedenza dell'induttanza, dovuto al fatto che la nostra pulsazione vale 2ω. Dalla (3.5) si ricava facilmente l'espressione per la corrente reale

$$i_2(t) = \frac{V_0}{2\sqrt{R^2 + 4\omega^2 L^2}} \cos(2\omega t + \phi) \qquad \text{dove} \qquad \phi = \pi - \arctan\left(\frac{2\omega L}{R}\right) \tag{3.6}$$

Dalla (3.3) avremo quindi

$$W(t) = \left(i_1(t) + i_2(t)\right)^2\, R \tag{3.7}$$

Si noti che la potenza, non essendo una grandezza lineare, *non* è uguale alla somma delle dissipazioni dovute a ciascun generatore preso separatamente. Dobbiamo calcolare adesso la potenza media $\overline{W}$. Dato che la funzione $i(t)$ è periodica con periodo $T = \pi/\omega$, dovremo mediare la (3.7) su un periodo

$$\begin{aligned}\overline{W} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(i_1(t) + i_2(t)\right)^2\, R\, dt = \frac{R}{T}\int_0^T \Bigg(\frac{V_0^2}{4R^2} + \\ + \frac{V_0^2}{4(R^2 + 4\omega^2 L^2)} \cos^2(2\omega t + \phi) + \frac{V_0^2}{2R\sqrt{R^2 + 4\omega^2 L^2}} \cos(2\omega t + \phi)\Bigg)\, dt\end{aligned} \tag{3.8}$$

Il primo dei tre termini che costituiscono l'integrazione è costante e quindi concide con la propria media temporale. Il secondo termine contiene, a parte la costante moltiplicativa, la media su un periodo di $\cos^2(2\omega t + \phi)$, che vale $1/2$, come noto dalla teoria generale della potenza in c.a.; il terzo termine, infine, contiene la media su un periodo di una funzione sinusoidale e quindi vale 0. L'azzeramento del termine derivante dalla media di $2i_1(t)i_2(t)$ porta come risultato che la potenza media, nonostante non sia una grandezza lineare, risulta ancora dalla somma delle potenze dovute a ciascun generatore preso da solo. Avremo quindi

$$\overline{W} = \frac{V_0^2}{4R} + \frac{V_0^2 R}{8(R^2 + 4\omega^2 L^2)} = \frac{V_0^2}{4R}\left[1 + \frac{1}{2\left(1 + \frac{4\omega^2 L^2}{R^2}\right)}\right] \tag{3.9}$$

Inserendo i valori numerici abbiamo

$$\begin{aligned}\overline{W} =& \frac{10^2\,\mathrm{V}^2}{8 \cdot 10^3\,\Omega}\left[1 + \frac{1}{2\left[1 + \left(\frac{2\cdot 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot 10^{-1}\,\mathrm{H}}{2\cdot 10^3\Omega}\right)^2\right]}\right] = \\ =& \frac{1}{80}\,\mathrm{W}\left[1 + \frac{1}{2(1+1)}\right] = \frac{1}{80}\cdot\frac{5}{4}\,\mathrm{W} = \frac{1}{64}\,\mathrm{W} = 15.62\,\mathrm{mW}\end{aligned} \tag{3.10}$$