**Esperimentazioni di Fisica II B**

SOLUZIONE del compito del 17 aprile 2007

**A.** Utilizziamo un sistema cartesiano con l'asse $x$ orientato come il fascio prima della deflessione e l'asse $y$ perpendicolare ai piani delle placchette. Gli elettroni che si trovano fra le placchette sono soggetti al campo elettrico dovuto alla tensione di deflessione, dato da:

$$\mathbf{E} = \frac{V_d}{h}\,\mathbf{j} \tag{A.1}$$

(supponiamo che la placchetta a ordinata positiva sia quella a potenziale più negativo, cosa che siamo liberi di fare, visto che non è specificato il verso della deflessione e quindi interessa conoscere solo l'angolo in valore assoluto). Le equazioni di moto di un elettrone fra le placchette sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = \frac{eV_d}{h} \end{cases} \tag{A.2}$$

dove $m$ è la massa dell'elettrone. Le condizioni iniziali sono: per $t = 0$ $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, con $v_0$ velocità degli elettroni accelerati. Quindi la velocità degli elettroni rimane costante in direzione $x$ e cresce linearmente nel tempo in direzione $y$

$$\dot{y}(t) = \frac{eV_d}{mh}\,t \tag{A.3}$$

L'elettrone impiega ad attraversare le placchette un tempo $\bar{t} = l/v_0$, quindi la componente $y$ della velocità all'uscita dalle placchette vale

$$\dot{y}(\bar{t}) = \frac{eV_d\,l}{mv_0\,h} \tag{A.4}$$

Dopo $\bar{t}$ l'elettrone procede lungo una linea retta il cui coefficiente angolare, corrispondente alla tangente dell'angolo di deflessione, è dato da

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(\bar{t})}{\dot{x}(\bar{t})} = \frac{eV_d\,l}{mv_0^2\,h} \tag{A.5}$$

A questo punto occorre ricordare che se l'elettrone è stato accelerato da fermo per mezzo di una differenza di potenziale $V_a$, per la conservazione dell'energia $\frac{1}{2}mv_0^2 = e\,V_a$.[1] Inserendo questa relazione nella (1.5) si ottiene

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\,\frac{l}{h}\,\frac{V_d}{V_a} \tag{A.6}$$

Inserendo i valori numerici infine si ha[2]

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = 0.1244\,\mathrm{rad} \tag{A.7}$$

[1] Questo naturalmente considerando che alle velocità risultanti con il potenziale di accelerazione dato gli effetti relativistici sono completamente trascurabili.

[2] Diamo i risultati numerici con 4 cifre significative, indipendentemente da quello che sarebbe corretto nella prassi fisica, per un confronto più accurato dei calcoli. Quando i risultati sono dati con meno di 4 cifre significative, sono da considerarsi matematicamente esatti.

Possiamo infine assicurarci che questa deflessione non porti il fascio a colpire una delle placchette. Dato che, come è noto dalla teoria, se si prolunga all'indietro la traiettoria rettilinea del fascio uscito dalle placchette, questa interseca la direzione originale a metà della lunghezza $l$, la massima deflessione ottenibile è data da

$$\tan\theta_M = \frac{h}{l} = \frac{1}{5} \tag{A.8}$$

**B.** Il circuito è un normale circuito $RC$ in fase di carica. Se la tensione del generatore è $V$, la tensione $V_c$ ai capi del condensatore ha l'espressione

$$V_c(t) = V\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{B.1}$$

dove $\tau = RC$. Conoscendo l'espressione dell'energia accumulata in un condensatore possiamo scrivere

$$E_c(\bar{t}) = \frac{1}{2}CV_c^2(\bar{t}) = \frac{1}{2}CV^2\left(1 - e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right)^2 \tag{B.2}$$

Sempre dalla teoria del circuito $RC$ abbiamo che la corrente è data da

$$i(t) = \frac{V}{R}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{B.3}$$

Corrispondentemente l'energia dissipata sulla resistenza si calcola come

$$E_r = \int_0^{\bar{t}} W_r\, dt = \int_0^{\bar{t}} i^2 R\, dt = \int_0^{\bar{t}} \frac{V^2}{R}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}\, dt = \frac{1}{2}CV^2\left(1 - e^{-\frac{2\bar{t}}{\tau}}\right) \tag{B.4}$$

Il rapporto $\rho$ cercato vale quindi

$$\rho = \frac{\left(1 - e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right)^2}{1 - e^{-\frac{2\bar{t}}{\tau}}} \tag{B.5}$$

Possiamo verificare facilmente la plausibilità della formula. Se $\bar{t} \ll \tau$ dalla (B.5) si ha $\rho = \frac{1}{2}\frac{\bar{t}}{\tau}$. In questo caso $V_c \ll V$, $i(t) \simeq V/R$. Quindi $E_r \simeq i^2 R\bar{t}$ e $E_c = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \simeq \frac{1}{2}\frac{i^2\bar{t}^2}{C}$; il rapporto risulta quello calcolato con la (B.5). Per $\bar{t} \to \infty$ secondo la (B.5) $\rho \to 1$ e questo concorda con la teoria, secondo cui nella carica completa del condensatore l'energia prodotta dal generatore viene equamente dissipata sulla resistenza e accumulata nel condensatore. Inserendo i valori numerici si ottiene $\rho = 0.2449$.

**1.** Indichiamo con $\mathbf{u}_i$ i versori delle tre direzioni. Avremo

$$\mathbf{u}_i = \cos\theta_i\, \mathbf{i} + \sin\theta_i\, \mathbf{j} \tag{1.1}$$

Se $\mathbf{B} = B_x\, \mathbf{i} + B_y\, \mathbf{j}$, le misure $B_1$, $B_2$ e $B_3$ risultano

$$B_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_i = B_x \cos\theta_i + B_y \sin\theta_i \tag{1.2}$$

Dalle espressioni di $B_1$ e $B_2$ possiamo ricavare $B_x$ e $B_y$ tramite il sistema

$$\begin{cases} B_x \cos\theta_1 + B_y \sin\theta_1 = B_1 \\ B_x \cos\theta_2 + B_y \sin\theta_2 = B_2 \end{cases} \tag{1.3}$$

che si può risolvere facilmente con il metodo di Cramer, ottenendo

$$\begin{cases} B_x = \frac{B_1 \sin\theta_2 - B_2 \sin\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)} \\ \\ B_y = \frac{B_2 \cos\theta_1 - B_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_2-\theta_1)} \end{cases} \tag{1.4}$$

Inserendo $B_x$ e $B_y$ dati dalla (1.4) nella (1.3) scritta per $B_3$ si ottiene

$$B_3 = \frac{B_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) + B_2 \sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \tag{1.5}$$

Il modo più semplice per verificare la consistenza delle misure è determinare dalla (1.5) una quantità che debba essere nulla e verificare questa proprietà. La quantità cercata è

$$g = B_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) + B_2 \sin(\theta_3 - \theta_1) + B_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{1.6}$$

Si noti la perfetta simmetria della (1.6) rispetto ai tre indici, come avremmo dovuto aspettarci date le condizioni del problema.

Un modo alternativo, matematicamente più elegante, per ricavare la (1.6) consiste nel considerare che devono essere vere tutte e tre le relazioni (1.2) e quindi

$$\begin{cases} B_x \cos\theta_1 + B_y \sin\theta_1 = B_1 \\ B_x \cos\theta_2 + B_y \sin\theta_2 = B_2 \\ B_x \cos\theta_3 + B_y \sin\theta_3 = B_3 \end{cases} \tag{1.7}$$

Le (1.7) costituiscono un sistema di tre equazioni in due incognite ($B_x$, $B_y$). È noto dall'algebra lineare che questo sistema può avere soluzioni solo se è nullo il determinante

$$\begin{Vmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & B_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & B_2 \\ \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & B_3 \end{Vmatrix} \tag{1.8}$$

Il determinante si calcola facilmente con la regola di Sarrus e uguagliandolo a 0 si ottiene la condizione (1.6).

La consistenza delle misure si ha se $\Delta g > |g|$. Il calcolo dell'errore è immediato

$$\begin{aligned} \Delta g = {} & |\sin(\theta_2 - \theta_3)|\, \Delta B_1 + |\sin(\theta_3 - \theta_1)|\, \Delta B_2 + |\sin(\theta_1 - \theta_2)|\, \Delta B_3 + \\ & + |B_3 \cos(\theta_1 - \theta_2) - B_2 \cos(\theta_3 - \theta_1)|\, \Delta\theta_1 + \\ & + |B_1 \cos(\theta_2 - \theta_3) - B_3 cos(\theta_1 - \theta_2)|\, \Delta\theta_2 + \\ & + |B_2 \cos(\theta_3 - \theta_1) - B_1 \cos(\theta_2 - \theta_3)|\, \Delta\theta_3 \end{aligned} \tag{1.9}$$

A questo punto occorre tener presente che gli errori dati sui $B_i$ contengono anche il contributo di $\Delta k_{BH}$ che costituisce un errore sistematico su tutti e quindi si elide nella (1.6) (l'errore su $k_{BH}$ è un fattore moltiplicativo uguale per tutti e tre i termini). Per scorporare questo errore dai $B_i$ si può notare che

$$B_i = k_{BH}\, W_i \tag{1.10}$$

dove i $W_i$ contengono le tensioni di Hall rilevate durante la misura e la taratura e le correnti nella bobine di Helmholtz. Da quanto specificato nel testo, i $W_i$ risultano da misure indipendenti e quindi anche i loro errori sono indipendenti fra loro. Per ogni direzione vale ovviamente

$$\frac{\Delta B_i}{B_i} = \frac{\Delta W_i}{W_i} + \frac{\Delta k_{BH}}{k_{BH}} \tag{1.11}$$

Gli errori da inserire nella (1.9) al posto dei $\Delta B_i$ sono quindi

$$\frac{\Delta' B_i}{B_i} = \frac{\Delta W_i}{W_i} = \frac{\Delta B_i}{B_i} - \frac{\Delta k_{BH}}{k_{BH}} \tag{1.12}$$

Inserendo i valori numerici si ottiene $g = 1.186 \cdot 10^{-5}$ T, $\Delta g = 7.221 \cdot 10^{-6}$ T, per cui le misure non risultano consistenti.

**2.** A titolo esemplificativo, affrontiamo il problema in due modi diversi. Il primo modo consiste nel calcolare direttamente la potenza dissipata su $R_1$. Per fare questo dobbiamo calcolare la caduta di tensione sul parallelo di $R_1$ e $C$. Se chiamiamo l'impedenza del parallelo $z_p$ abbiamo

$$z_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + j\omega C} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C} \tag{2.1}$$

La tensione $\mathcal{V}_p$ sul parallelo è data semplicemente dalla formula del partitore

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{V}\frac{z_p}{z_p + R + j\omega L} = \mathcal{V}\frac{\frac{R_1}{1+j\omega R_1 C}}{\frac{R_1}{1+j\omega R_1 C} + R + j\omega L} = \mathcal{V}\frac{R_1}{R + R_1 - \omega^2 LCR_1 + j\omega(L + RR_1C)} \tag{2.2}$$

Se introduciamo nella (2.2) il fatto che $\omega$ è quello di risonanza, $\omega = 1/\sqrt{LC}$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{V}\frac{R_1}{R + +j(\sqrt{\frac{L}{C}} + RR_1\sqrt{\frac{C}{L}})} \tag{2.3}$$

Conoscendo la caduta di tensione su $R_1$ possiamo calcolare la potenza media dissipata sulla resistenza come

$$W = \frac{1}{2}\frac{|\mathcal{V}_p|^2}{R_1} = \frac{1}{2}|\mathcal{V}|^2\frac{R_1}{R^2 + \frac{L}{C} + R^2R_1^2\frac{C}{L} + 2RR_1} \tag{2.4}$$

La potenza sarà massima quando si annulla la derivata rispetto a $R_1$ dell'espressione fratta che compare nella (2.4)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dR_1}\left(\frac{R_1}{R^2 + \frac{L}{C} + R^2R_1^2\frac{C}{L} + 2RR_1}\right) = \\
&= \frac{R^2 + \frac{L}{C} + R^2R_1^2\frac{C}{L} + 2RR_1 - R_1\left(2R_1R^2\frac{C}{L} + 2R\right)}{\left[R^2 + \frac{L}{C} + R^2R_1^2\frac{C}{L} + 2RR_1\right]^2} = \\
&= \frac{R^2 + \frac{L}{C} - R^2R_1^2\frac{C}{L}}{\left[R^2 + \frac{L}{C} + R^2R_1^2\frac{C}{L} + 2RR_1\right]^2}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

La (2.5) si annulla quando

$$R_1 = \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{1}{R^2}\frac{L^2}{C^2}} = R\,Q_0^2\sqrt{1 + \frac{1}{Q_0^2}} \tag{2.6}$$

Dalla (2.5) si vede che quando $R_1$ è inferiore al valore di annullamento la derivata è positiva, e negativa in caso contrario. Questo ci assicura che si tratti effettivamente di un massimo. Inserendo i valori numerici si ottiene $R_1 = 21.43\,\mathrm{K\Omega}$.

Un metodo alternativo consiste nel considerare il circuito eqvuivalente visto dalla resistenza $R_1$. Il risultato è noto dalla teoria del risonante serie: si tratta di un circuito con una tensione equivalente pari a $-j\,Q_0\,\mathcal{V}$ e un'impedenza equivalente uguale a quella del circuito risonante parallelo con gli stessi componenti

$$\mathcal{V}_{eq} = -j\,Q_0\,\mathcal{V} \qquad Z_{eq} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \tag{2.7}$$

Se introduciamo la condizione di essere alla risonanza del circuito serie avremo

$$Z_{eq} = \frac{R + j\sqrt{\frac{L}{C}}}{jR\sqrt{\frac{C}{L}}} = R(Q_0^2 - j\,Q_0) \tag{2.8}$$

Durante il corso è stato trattato il problema generale del massimo trasferimento di potenza media, in corrente alternata, su un carico esterno: vogliamo trattare il caso particolare in cui il carico suddetto è puramente resistivo. Consideriamo quindi un generatore di tensione $\mathcal{V}$ con un'impedenza in serie $Z_i = R + jX$ e un carico esterno $R_e$. La potenza media dissipata su $R_e$ è data da

$$W_e = \frac{1}{2}\,|\mathcal{I}|^2\,R_e \qquad \text{dove} \qquad |\mathcal{I}| = \frac{|\mathcal{V}|}{\sqrt{(R_e + R)^2 + X^2}} \tag{2.9}$$

Quindi

$$W_e = \frac{1}{2}\,|\mathcal{V}|^2\,\frac{R_e}{(R_e + R)^2 + X^2} \tag{2.10}$$

Per trovare il massimo di $W_e$ si deve uguagliare a 0 la derivata

$$\frac{d}{dR_e}\left(\frac{R_e}{(R_e + R)^2 + X^2}\right) = \frac{R^2 + X^2 - R_e^2}{[(R_e + R)^2 + X^2]^2} \tag{2.11}$$

La condizione di massimo è dunque

$$R_e = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{2.12}$$

ossia la resistenza di carico deve uguagliare il modulo dell'impedenza interna. Se sostituiamo nella (2.12) i valori della parte reale e immaginaria di $Z_{eq}$ ricavati dalla (2.8) otteniamo di nuovo il risultato della (2.6). Inserendo il valore di $R_1$ trovato con la (2.6) nell'espressione della potenza (2.4), dopo qualche calcolo si ottiene

$$W_{max} = \frac{1}{4}\frac{|\mathcal{V}|^2}{R}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{Q_0^2}}} \tag{2.13}$$

che si può confrontare con la potenza $\frac{1}{2}\frac{|\mathcal{V}|^2}{R}$ dissipata su $R$ alla risonanza, in assenza di $R_1$.

**3.** Chiariamo subito che il circuito presentato in pratica difficilmente potrebbe funzionare correttamente, in quanto il primo stadio non invertente ha un'amplificazione che cresce con la frequenza, fino a superare le condizizoni per il regime reazionato, e quindi creerebbe problemi in presenza di disturbi o armoniche del segnale d'ingresso a frequenza alta. Contemporaneamente, lo stadio invertente è un integratore in cui, in presenza di una qualsiasi componente di continua all'ingresso, generata fuori dell'amplificatore o all'interno di esso (come sarà spiegato nel modulo C del corso), l'uscita si sposterebbe gradualmente fino a raggiungere uno dei limiti di saturazione, inferiore o superiore. Tuttavia, nelle condizioni ideali del quesito, il comportamento segue i canoni della teoria svolta durante il corso. In particolare, nel funzionamento a regime con segnali sinusoidali, valgono le espressioni note del guadagno reazionato, generalizzate alle impedenze. La tensione $\mathcal{V}_2$ all'uscita dello stadio non invertente vale quindi

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_i \frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C_1}} = \mathcal{V}_i\,(1 + j\omega R_1 C_1) \tag{3.1}$$

Corrispondentemente, all'uscita dello stadio invertente si ha la tensione $\mathcal{V}_3$ data da

$$\mathcal{V}_3 = -\mathcal{V}_i \frac{1}{j\omega R_2 C_2} \tag{3.2}$$

La tensione $\mathcal{V}_4$ all'uscita dello stadio invertente che ha $\mathcal{V}_2$ in ingresso vale

$$\mathcal{V}_4 = -\mathcal{V}_2 \frac{R_4}{R_3} = -\mathcal{V}_i \frac{R_4}{R_3}\,(1 + j\omega R_1 C_1) \tag{3.3}$$

L'ultimo stadio è un sommatore e la tensione d'uscita vale

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_o &= -\mathcal{V}_i R_7 \left(\frac{\mathcal{V}_4}{R_5} + \frac{\mathcal{V}_3}{R_6}\right) = \mathcal{V}_i R_7 \left[\frac{R_4}{R_3 R_5}(1 + j\omega R_1 C_1) + \frac{1}{j\omega R_2 C_2 R_6}\right] = \\ &= \mathcal{V}_i R_7 \left[\frac{R_4}{R_3 R_5} + j\left(\frac{\omega R_1 C_1 R_4}{R_3 R_5} - \frac{1}{\omega R_2 C_2 R_6}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

La parte reale dell'espressione in parentesi quadre corrisponde a una tensione in fase con quella d'ingresso, mentre la parte immaginaria si riferisce alla componente in quadratura. Per ottemperare alle condizioni del problema deve essere

$$\frac{R_7 R_4}{R_3 R_5} = \alpha \qquad \text{da cui} \qquad R_5 = \frac{R_7 R_4}{R_3 \alpha} \tag{3.5}$$

Contemporaneamente deve essere

$$\frac{\omega R_1 C_1 R_4}{R_3 R_5} - \frac{1}{\omega R_2 C_2 R_6} = 0 \qquad \text{da cui} \qquad R_6 = \frac{R_3 R_5}{\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 R_4} \tag{3.6}$$

Sostituendo nella (3.6) il valore di $R_5$ dalla (3.5) si trova l'espressione finale per $R_6$

$$R_6 = \frac{R_7}{\alpha \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2} \tag{3.7}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{cases} R_5 = \frac{8\,\mathrm{K\Omega}^2}{10\,\mathrm{K\Omega}} = 800\,\Omega \\ R_6 = \frac{4\,\mathrm{K\Omega}}{10 \cdot 10^8\,\mathrm{rad}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F} \cdot 10^3\,\Omega \cdot 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}} = 100\,\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$