Esperimentazioni di Fisica II B

SOLUZIONE del compito del 29 marzo 2004

1. Dalla nota relazione trigonometrica $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ si ricava immediatamente che $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. Quindi $V_i(t)$ può essere scritto come somma di una costante e di una funzione sinusoidale:

$$V_i(t) = \frac{V_{i0}}{2} - \frac{V_{i0}}{2} \cos 2\omega_1 t \qquad 1.1$$

A questo stesso risultato si sarebbe arrivati, con maggior fatica, applicando le formule per i coefficienti della serie di Fourier. Il filtro passa–basso ha una funzione di trasferimento complessa che può essere posta nella forma

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \quad \text{dove} \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \qquad 1.2$$

La componente continua di $V_i(t)$ viene completamente eliminata dal filtro, mentre la componente con pulsazione $2\omega_1$ dà in uscita una tensione che possiamo scrivere con il formalismo complesso:

$$\mathcal{V}_o = -\frac{V_{i0}}{2} e^{2j\omega_1 t} \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{2\omega_1}} \qquad 1.3$$

La differenza di potenziale in uscita dal filtro, $V_o(t)$, avrà la forma

$$V_o(t) = V_{o0} \cos(2\omega_1 t + \phi_o) \quad \text{dove} \quad V_{o0} = |\mathcal{V}_o| \quad , \quad \phi_o = \phi(\mathcal{V}_o) \qquad 1.4$$

Dalla 1.3 si ricava immediatamente

$$V_{o0} = \frac{V_{i0}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{4\omega_1^2}}} \qquad \phi_o = \pi + \arctan\left(\frac{\omega_c}{2\omega_1}\right) \qquad 1.5$$

Introducendo i valori numerici si ottiene:[1]

$$V_{o0} = 0.2236\,\mathrm{V} \qquad \phi_o = 3.605\,\mathrm{rad} \qquad 1.6$$

[1] Si daranno tutti i risultati con più cifre significative di quanto sarebbe corretto per i risultati di misure, allo scopo di permettere un controllo più stringente dei medesimi.

2. Il vettore–campo cercato ha come espressione cartesiana $\mathbf{B} = B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j}$ dove ovviamente $B_x = B_1$. Se $\mathbf{u}$ è il versone relativo a B_2, $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$. Si ha ovviamente

$$B_2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{u} = B_x\cos\theta + B_y\sin\theta \tag{2.1}$$

Risulta immediatamente la seconda componente cartesiana

$$B_y = \frac{B_2 - B_1\cos\theta}{\sin\theta} \tag{2.2}$$

Dalle componenti cartesiane si ricava[2] il modulo di $\mathbf{B}$

$$|\mathbf{B}| = \frac{\sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\theta}}{\sin\theta} = \frac{k_{BH}}{\alpha}\,\frac{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta}}{\sin\theta} \tag{2.3}$$

Per economia nei calcoli indicheremo $A = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta$; le derivate parziali di $|\mathbf{B}|$ risultano

$$\begin{aligned}
\frac{\partial|\mathbf{B}|}{\partial V_1} &= \frac{k_{BH}}{\alpha}\,\frac{V_1 - V_2\cos\theta}{A^{1/2}\sin\theta}\\
\frac{\partial|\mathbf{B}|}{\partial V_2} &= \frac{k_{BH}}{\alpha}\,\frac{V_2 - V_1\cos\theta}{A^{1/2}\sin\theta}\\
\frac{\partial|\mathbf{B}|}{\partial\theta} &= \frac{k_{BH}}{\alpha}\,\frac{V_1V_2\sin^2\theta - A\cos\theta}{A^{1/2}\sin^2\theta}\\
\frac{\partial|\mathbf{B}|}{\partial k_{BH}} &= \frac{|\mathbf{B}|}{k_{BH}}\\
\frac{\partial|\mathbf{B}|}{\partial\alpha} &= -\frac{|\mathbf{B}|}{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Di conseguenza, l'errore relativo su $|\mathbf{B}|$ risulta

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta|\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} = {}& \frac{|V_1 - V_2\cos\theta|}{A}\Delta V_1 + \frac{|V_2 - V_1\cos\theta|}{A}\Delta V_2 +\\
&+ \frac{|V_1V_2\sin^2\theta - A\cos\theta|}{A\sin\theta}\Delta\theta + \frac{\Delta k_{BH}}{k_{BH}} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Introducendo i valori numerici si ottiene

$$|\mathbf{B}| = 12.48\,\mathrm{mT} \qquad \frac{\Delta|\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} = 2.46\% \qquad \Delta|\mathbf{B}| = 0.307\,\mathrm{mT} \tag{2.6}$$

Per quanto riguarda l'angolo ϕ, si ottiene[3]

$$\phi = \arctan\frac{V_2 - V_1\cos\theta}{V_1\sin\theta} \tag{2.7}$$

[2] Si noti come l'espressione del modulo contenga il modulo del vettore differenza $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1|$. Può essere interessante cercare di spiegare la formula da un punto di vista geometrico.

[3] Dal momento che il denominatore, proporzionale alla componente x del vettore, è positivo, si può utilizzare la funzione arctangente del rapporto.

Se indichiamo

$$q = \frac{V_2 - V_1\cos\theta}{V_1\sin\theta} \quad \text{si ha} \quad \frac{d\arctan q}{dq} = \frac{1}{1+q^2} = \frac{V_1^2\sin^2\theta}{A} \qquad 2.8$$

Sfrtuttando la 2.8 si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial V_1} &= \frac{V_2\sin\theta}{A} \\ \frac{\partial\phi}{\partial V_2} &= \frac{V_1\sin\theta}{A} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} &= \frac{V_1(V_1 - V_2\cos\theta)}{A} \end{aligned} \qquad 2.9$$

Dalle 2.9 risulta immediatamente

$$\Delta\phi = \frac{V_2\sin\theta}{A}\Delta V_1 + \frac{V_1\sin\theta}{A}\Delta V_2 + \frac{V_1|V_1 - V_2\cos\theta|}{A}\Delta\theta \qquad 2.10$$

I calcoli numerici danno come risultato

$$\phi = 0.6980\,\text{rad} \qquad \Delta\phi = 0.00851\,\text{rad} \qquad 2.11$$

3. La funzione di trasferimento del filtro coincide con il coefficiente d'amplificazione (complesso) dell'operazionale, dato dal rapporto delle impedenze cambiato di segno

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{(R_1 + j\omega L)\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)} \qquad 3.1$$

L'espressione precedente può essere messa nella forma

$$\mathcal{A} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\left(1 + j\frac{\nu}{\nu_1}\right)\left(1 + j\frac{\nu}{\nu_2}\right)} \quad \text{dove} \quad \nu_1 = \frac{R_1}{2\pi L} \quad , \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C} \qquad 3.2$$

Si osserva che $L/R_1 = R_2C = 10^{-4}\,$s per cui $\nu_1 = \nu_2 = \nu_s$ e la 3.2 può essere scritta nella forma

$$\mathcal{A} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\left(1 + j\frac{\nu}{\nu_s}\right)^2} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_s^2} + 2j\frac{\nu}{\nu_s}\right)} \qquad 3.3$$

Si tratta di un filtro passa–basso; per $\nu \ll \nu_s$ $|\mathcal{A}| = R_2/R_1 = 10$ ossia $|\mathcal{A}|_{[\text{dB}]} = 20$. Per trovare ν_c occorre trovare il valore di ν per cui $|\mathcal{A}| = (R_2/R_1)\cdot(1/\sqrt{2})$. Ciò corrisponde ad imporre che

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_s^2}\right)^2 + 4\frac{\nu^2}{\nu_s^2} = 2 \qquad 3.4$$

Se indichiamo $x = \nu^2/\nu_s^2$ otteniamo l'equazione $x^2 + 2x - 1 = 0$; l'unica soluzione positiva è $x = \sqrt{2} - 1$. La frequenza richiesta è quindi

$$\nu_c = \nu_s \sqrt{\sqrt{2} - 1} \qquad \nu_c = 1024\,\mathrm{Hz} \tag{3.5}$$

La fase di $\mathcal{A}$ si ricava facilmente dalla 3.3:

$$\phi\left(\mathcal{A}(\nu)\right) = \pi - 2\arctan\left(\frac{\nu}{\nu_s}\right) \qquad \phi\left(\mathcal{A}(\nu_c)\right) = 1.998\,\mathrm{rad} \tag{3.6}$$

. Infine, se $\nu \gg \nu_c$ il valore di $|\mathcal{A}|$ risulta

$$|\mathcal{A}|_{[\mathrm{dB}]} \simeq 20\log_{10}\left(\frac{R_2}{R_1}\frac{\nu_s^2}{\nu^2}\right) = \mathrm{cost.} - 40\log_{10}\left(\frac{\nu_{[\mathrm{Hz}]}}{1\,\mathrm{Hz}}\right) \tag{3.7}$$

Dalla 3.7 risulta che al raddoppiare di ν corrisponde una diminuzione di $|\mathcal{A}|_{[\mathrm{dB}]}$ pari a $40\log_{10} 2$ e quindi la pendenza del filtro per $\nu \gg \nu_c$ è $-12\,\mathrm{dB}/8^a$.

4. Studiamo il circuito di amplificazione partendo dalla sorgente e andando verso l'uscita. Prima di tutto determiniamo la tensione immediatamente a valle di R_1, dove sono collegate R_2 e R_5: l'altro capo di R_2 si connette all'ingresso dello stadio non invertente, che ha un'impedenza molti ordini di grandezza maggiore di tutte le altre in gioco, tanto da poterla considerare infinita. Quindi possiamo considerare nulla la corrente attraverso R_2. R_5 si connette invece alla massa virtuale dello stadio invertente, ovviamente a potenziale nullo; R_1 e R_5 formano dunque un partitore e la tensione a valle di R_1 vale

$$V_i' = V_i \frac{R_5}{R_1 + R_5} \tag{4.1}$$

A questo punto è banale determinare la tensione V_2 all'uscita dello stadio non invertente e V_3 all'uscita dell'operazionale invertente (nel fare questo teniamo presente che l'impedenza di uscita di entrambi gli stadi è molto minore di tutte le resistenze a valle e quindi possiamo trascurare il circuito a valle nella determinazione delle tensioni di uscita, e considerare gli amplificatori come generatori ideali):

$$V_2 = V_i' \frac{(R_3 + R_4)}{R_4} \qquad V_3 = -V_i' \frac{R_6}{R_5} = -V_i \frac{R_6}{R_1 + R_5} \tag{4.2}$$

Il passo successivo consiste nel calcolare il circuito equivalente della parte a monte del circuito visto dall'ultimo stadio (resistenza R_9 e operazionale invertente). Esso consiste dei generatori V_2, V_3 e delle resistenze R_7, R_8. Chiamando i la corrente nella maglia (positiva se uscente da V_2) si ha

$$i = \frac{V_2 - V_3}{R_7 + R_8} \tag{4.3}$$

La tensione V_{eq} che cerchiamo risulta

$$V_{eq} = V_3 + iR_8 = \frac{V_2 R_8 + V_3 R_7}{R_7 + R_8} \tag{4.4}$$

La resistenza equivalente è ovviamente il parallelo di R_7 e R_8:

$$R_{eq} = \frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8} \tag{4.5}$$

Nel primo caso, in cui l'elemento di reazione dell'ultimo stadio è costituito da R_{10}, si avrà

$$V_{o1} = -V_{eq} \frac{R_{10}}{R_{eq} + R_9} \tag{4.6}$$

Nel caso dell'integratore di Miller la derivata della tensione d'uscita vale

$$\frac{dV_{o2}}{dt} = -V_{eq} \frac{1}{C(R_{eq} + R_9)} \tag{4.7}$$

I calcoli numerici possono essere ugualmente svolti con facilità seguendo lo stesso percorso:

$$V_i' = V_i \frac{4 \cdot 10^2\,\Omega}{5 \cdot 10^2\,\Omega} = V_i \frac{4}{5} \tag{4.8}$$

$$V_2 = V_i \frac{4}{5} \cdot \frac{2\,\mathrm{k}\Omega}{1\,\mathrm{k}\Omega} = V_i \frac{8}{5} \qquad V_3 = -V_i \frac{4}{5} \cdot \frac{1000\,\Omega}{400\,\Omega} = -2V_i \tag{4.9}$$

$$V_{eq} = V_i \frac{\left(\frac{8}{5} \cdot 2 - 2 \cdot 1\right)\,\mathrm{k}\Omega}{3\,\mathrm{k}\Omega} = V_i \frac{2}{5} \qquad R_{eq} = \frac{2}{3}\,\mathrm{k}\Omega \tag{4.10}$$

$$V_{o1} = -V_i \frac{2}{5} \cdot \frac{10\,\mathrm{k}\Omega}{\left(2 + \frac{2}{3}\right)\,\mathrm{k}\Omega} = -V_i \frac{3}{2} \qquad \frac{dV_{o2}}{dt} = -V_i \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10^{-5}\,\mathrm{F} \cdot \frac{8}{3} \cdot 10^3\,\Omega} = -15 V_i \cdot \mathrm{s}^{-1} \tag{4.11}$$

Da cui i risultati numerici $V_{o1} = -0.15\,\mathrm{V}$, $dV_{o2}/dt = -1.5\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.