Esperimentazioni II B

SOLUZIONE del compito dell'11 aprile 2008

A. Se indichiamo rispettivamente con Z_s e Z_p le impedenze dei rami superiori del ponte, risultanti dalla serie e dal parallelo di una resistenza e un condensatore, possiamo scrivere la condizione di azzeramento come

$$Z_s\,R_2 = Z_p\,R_1 \qquad \frac{Z_s}{Z_p} = \frac{R_1}{R_2} \tag{A.1}$$

dove

$$Z_s = R_s + \frac{1}{j\omega C_s} \qquad \frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p \tag{A.2}$$

Inserendo le (A.2) nella seconda delle (A.1) e separando le parti reale e immaginaria si determina un sistema di equazioni reali

$$\begin{cases} \frac{R_s}{R_p} + \frac{C_p}{C_s} = \frac{R_1}{R_2} \\ \\ \omega^2 R_s C_s R_p C_p = 1 \end{cases} \tag{A.3}$$

Si ricava R_p dalla seconda delle (A.3)

$$R_p = \frac{1}{\omega^2 R_s C_s C_p} \tag{A.4}$$

e si sostituisce nella prima, ricavando C_p

$$C_p = C_s\,\frac{R_1}{R_2}\,\frac{1}{1+\omega^2 R_s^2 C_s^2} \tag{A.5}$$

che dà il valore di C_p in funzione dei termini noti. Sostituendo l'espressione (A.5) nella (A.4) si ottiene anche la soluzione per R_p

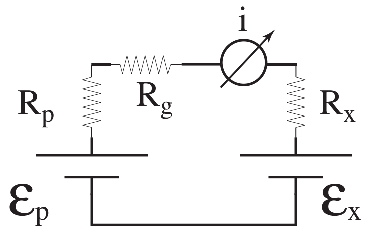
$$R_p = R_s\,\frac{R_2}{R_1}\,\frac{1+\omega^2 R_s^2 C_s^2}{\omega^2 R_s^2 C_s^2} \tag{A.6}$$

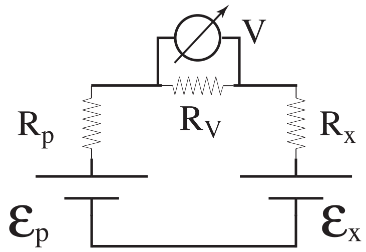
Per il calcolo numerico conviene determinare preventivamente la quantità $\omega^2 R_s^2 C_s^2$

$$\omega^2 R_s^2 C_s^2 = 4\pi^2 \cdot 10^6\,\mathrm{rad}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \;\cdot\; 25 \cdot 10^4\,\Omega^2 \;\cdot\; 4 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{F}^2 = 4\pi^2 \cdot 10^{-2} \tag{A.7}$$

Corrispondentemente[1]

$$\begin{cases} C_p = \frac{0.2\,\mu\text{F}\cdot 2}{1+4\pi^2\cdot 10^{-2}} = 0.2868\,\mu\text{F} \\ \\ R_p = 500\,\Omega\,\frac{1}{2}\,\frac{1+4\pi^2\cdot 10^{-2}}{4\pi^2\cdot 10^{-2}} = 883.3\,\Omega \end{cases} \tag{A.8}$$





B. I circuiti equivalenti per le misure effettuate usando il galvanometro e il voltmetro come rivelatori di zero sono quelli in figura. Per il galvanometro si ha

$$i = \frac{\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p}{R_p + R_g + R_x} \tag{B.1}$$

Dato che il galvanometro non riesce a discriminare da zero valori di corrente minori di i_m, non potremo misurare differenze fra la tensione incognita ($\mathcal{E}_x$) e quella rilevata dal potenziometro ($\mathcal{E}_p$) al di sotto di un dato valore

$$\left|\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p\right|_i = i_m\,(R_p + R_g + R_x) \tag{B.2}$$

Questo valore costituisce l'errore di sensibilità dovuto al rivelatore di zero. Analogamente per il circuito che utilizza il voltmetro la tensione letta V_v vale

$$V_v = (\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p)\,\frac{R_v}{R_p + R_v + R_x} \tag{B.3}$$

La differenza di tensione minima rilevabile vale allora

$$\left|\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p\right|_v = V_m\,\frac{R_p + R_v + R_x}{R_v} \simeq V_m\,\frac{R_v + R_x}{R_v} \tag{B.4}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $R_p \ll R_v$. Vediamo subito che quando $R_x \lesssim (R_p, R_g)$ $\left|\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p\right|_i \simeq 5\,\mu\text{V}$ mentre $\left|\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p\right|_v \simeq 100\,\mu\text{V}$. Questo significa che la situazione di equivalenza si verificherà per $R_x \gg (R_p, R_g)$. Uguagliamo la (B.2) e la (B.4) in queste condizioni

$$i_m\,R_x = V_m\,\frac{R_v + R_x}{R_v} \qquad \text{da cui} \qquad R_x = \frac{V_m}{i_m - \frac{V_m}{R_v}} \tag{B.5}$$

Si vede che si potrà avere una situazione di equivalenza solo se $i_m > V_m/R_v$, disuguaglianza che nel nostro caso è ampiamente verificata, al punto da poter trascurare V_m/R_v rispetto a i_m. L'ordine di grandezza di R_x che cerchiamo vale quindi

$$R_x \simeq \frac{V_m}{i_m} = \frac{10^{-4}\,\text{V}}{2\cdot 10^{-9}\,\text{A}} = 50\,\text{K}\Omega \tag{B.6}$$

[1] Diamo i risultati numerici con 4 cifre significative, indipendentemente da quello che sarebbe corretto nella prassi fisica, per un confronto più accurato dei calcoli. Valori riportati con meno di 4 cifre sono da considerarsi esatti.

1. Durante l'intervallo di tempo $\bar{t}$ in cui il condensatore C_1 viene caricato dalla f.e.m. incognita, raggiunge una carica

$$Q_1 = C_1 \mathcal{E}_x \left(1 - e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right) \qquad \text{dove} \qquad \tau = R_x C_1 \tag{1.1}$$

Quando si sposta s_1 nella posizione c il condensatore si scarica sull'integratore, con una costante di tempo RC_1. La carica che era su C_1 si trasferisce su C_2; se C_1 era caricato ad una tensione positiva, C_2 si carica in modo da avere la polarità positiva dalla parte dell'ingresso e risulta

$$V_o = -\frac{Q_1}{C_2} = -\mathcal{E}_x \frac{C_1}{C_2} \left(1 - e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right) \tag{1.2}$$

Si noti che il valore della resistenza R non influisce su V_o, ma nondimeno il componente è necessario: la sua funzione è di limitare la corrente i_- all'ingresso negativo dell'amplificatore entro i limiti del funzionamento lineare (nel nostro caso risulta $i_- \leq 10\,\mathrm{mA}$). Allo stesso tempo R non può essere troppo grande perché: a) la discarica di C_1 richiederebbe un tempo eccessivo, che renderebbe la misura meno pratica e anche meno precisa, a causa della "corrente di bias" dell'amplificatore (questo argomento è trattato nel modulo C del corso); b) se R diventasse paragonabile alla resistenza di fuga di C_1 non potremmo più trascurare la corrente che, durante la scarica, passerebbe attraverso quest'ultima e non fluirebbe nell'integratore.

Durante la prima misura il condensatore è caricato per un tempo $\bar{t}_1 \simeq 20\,\tau$ e quindi si può considerare il condensatore completamente carico al termine di $\bar{t}_1$. Durante la seconda misura, invece, $\bar{t}_2 \simeq \tau$ e il termine esponenziale non è trascurabile. Avremo quindi, per le due misure

$$\begin{cases} V_{o1} = -\mathcal{E}_x \frac{C_1}{C_2} \\ \\ V_{o2} = -\mathcal{E}_x \frac{C_1}{C_2} \left(1 - e^{-\frac{\bar{t}_2}{\tau}}\right) \end{cases} \tag{1.3}$$

Dalla prima delle (1.3) si ricava immediatamente $\mathcal{E}_x$, mentre dividendo membro a membro le due equazioni si ottiene

$$\frac{V_{o2}}{V_{o1}} = \left(1 - e^{-\frac{\bar{t}_2}{\tau}}\right) \tag{1.4}$$

Dalla (1.4) si ricava l'espressione di R_x in termini di quantità note. Avremo quindi

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x = -V_{o1} \frac{C_2}{C_1} \\ \\ R_x = -\frac{\bar{t}_2}{C_1 \log\left(1 - \frac{V_{o2}}{V_{o1}}\right)} \end{cases} \tag{1.5}$$

Si noti che il logaritmo nella seconda della (1.5) è negativo, per cui R_x risulta positiva, come dovuto. Possiamo ottenere gli errori su $\mathcal{E}_x$ e R_x propagando l'errore relativo

$$\begin{cases} \frac{\Delta \mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_x} = \frac{\Delta V_{o1}}{V_{o1}} + \frac{\Delta C_1}{C_1} + \frac{\Delta C_2}{C_2} \\ \\ \frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta \bar{t}_2}{\bar{t}_2} + \frac{\Delta C_1}{C_1} + \left| \frac{\frac{V_{o2}}{V_{o1}}}{\left(1 - \frac{V_{o2}}{V_{o1}}\right) \log\left(1 - \frac{V_{o2}}{V_{o1}}\right)} \right| \left(\frac{\Delta V_{o1}}{|V_{o1}|} + \frac{\Delta V_{o2}}{|V_{o2}|}\right) \end{cases} \tag{1.6}$$

Introducendo i valori numerici si ha $\mathcal{E}_x = (9.952 \pm .1025\,\mathrm{V})$ $(\Delta\mathcal{E}_x/\mathcal{E}_x = 1.030\,\%)$, $R_x = (98.83 \pm 0.7055)\,\mathrm{M\Omega}$ $(\Delta R_x/R_x = 0.7139\,\%)$.

Non sarebbe stato possibile effettuare la misura con i condensatori scambiati perché: a) la misura con carica di 100 s avrebbe portato a un'uscita di $\sim 9.5\,\mathrm{V}$, possibile o meno senza saturazione a seconda della tensione di alimentazione dell'operazionale, ma la misura con 2000 s avrebbe dato un'uscita di $\sim 90\,\mathrm{V}$, decisamente impossibile con le normali tensioni di alimentazione; b) se anche fosse stato possibile eseguire le misure senza andare in saturazione, per la prima misura avremmo avuto $\bar{t}_1 \simeq 2\,\tau$ e quindi non avremmo potuto trascurare il termine esponenziale nella (1.2), il che avrebbe complicato molto la determinazione delle quantità cercate.

2. Si può scrivere facilmente l'espressione dell'ammettenza vista fra gli estremi a e b:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \tag{2.1}$$

Con ovvi passaggi algebrici si ricava

$$Z = \frac{(R_1 - \omega^2 L R_2 C) + j\omega\,(L + R_1 R_2 C)}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega C\,(R_1 + R_2)} \tag{2.2}$$

Dobbiamo determinare le condizioni per cui Z può assumere un valore reale. Conviene generalizzare il problema al caso in cui

$$Z = \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta} \tag{2.3}$$

dove α, β, γ, δ sono reali e γ e δ non sono contemporaneamente nulli. Se si razionalizza la (2.3) si ottiene

$$Z = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + j\,(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma^2 + \delta^2} \tag{2.4}$$

La condizione per cui Z risulta reale è quindi

$$Z \quad \text{reale} \quad \Leftrightarrow \quad \beta\gamma = \alpha\delta \tag{2.5}$$

Supponiamo adesso che sia $\gamma \neq 0$ e scriviamo la (2.4) con le condizioni (2.5)

$$Z_{\text{reale}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma^2 + \beta\gamma\delta}{\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} = \frac{\alpha(\gamma^2 + \delta^2)}{\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} = \frac{\alpha}{\gamma} \tag{2.6}$$

Se $\delta \neq 0$ si può manipolare la (2.4) in modo analogo moltiplicando numeratore e denominatore per δ e si ottiene

$$Z_{\text{reale}} = \frac{\beta}{\delta} \tag{2.7}$$

Abbiamo quindi determinato la condizione (2.5) per cui Z risulta reale e due possibili espressioni per Z in queste condizioni. Allo stesso risultato si può arrivare studiando le fasi del numeratore e del denominatore della (2.3), ma in questo modo si eliminano le possibili ambiguità legate al fatto che la funzione arctangente è definita solo fra $-\pi/2$ e $\pi/2$.

Nel nostro caso la (2.5) implica

$$\omega\,(L + R_1 R_2 C)\,(1 - \omega^2 LC) = \omega C\,(R_1 + R_2)\,(R_1 - \omega^2 L R_2 C) \tag{2.8}$$

La (2.8) ha una soluzione $\omega = 0$, analogamente a quanto avviene per il normale circuito risonante parallelo, e inoltre

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}\,\frac{L - R_1^2 C}{L - R_2^2 C} = \frac{1}{LC}\,\frac{1 - \frac{1}{Q_{01}^2}}{1 - \frac{1}{Q_{02}^2}} \tag{2.9}$$

dove i fattori adimensionali Q_{0i} sono i fattori di merito di circuiti risonanti costituiti da L, C e R_1 o R_2, rispettivamente. La (2.9) ammette una soluzione reale positiva per ω

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L - R_1^2 C}{L - R_2^2 C}} \qquad \text{se} \qquad \begin{array}{c} R_1 > \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{e} \quad R_2 > \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \text{oppure} \\ R_1 < \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{e} \quad R_2 < \sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \tag{2.10}$$

Nel caso che esista ω_r, il valore corrispondente di Z, Z_r, risulta immediatamente dalla (2.2) usando la forma (2.7)

$$Z_r = \frac{L + R_1 R_2 C}{C\,(R_1 + R_2)} \tag{2.11}$$

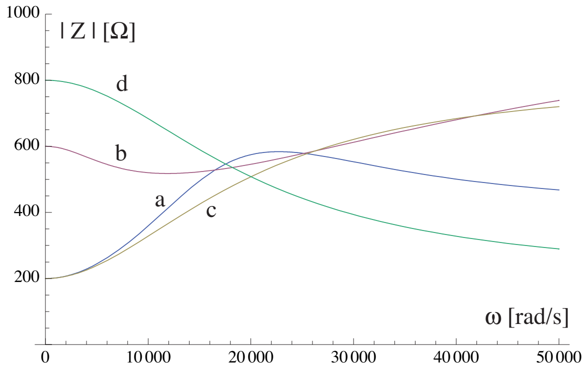
Inserendo i valori numerici si ha

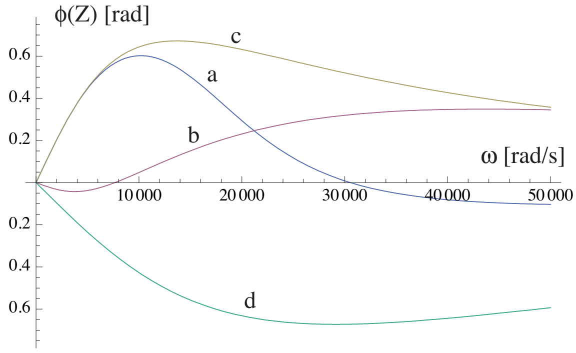
$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{25\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}\;\cdot\;10^{-7}\,\mathrm{F}}\;\frac{1 - \frac{4\cdot 10^4\,\Omega^2\;\cdot\;10^{-7}\,\mathrm{F}}{25\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}}}{1 - \frac{16\cdot 10^4\,\Omega^2\;\cdot\;10^{-7}\,\mathrm{F}}{25\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}}}} = \sqrt{\frac{10^{10}}{25}\,\frac{7}{3}}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}{\cdot}10^4\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \tag{2.12}$$

da cui $\nu_r = 4.862\,\mathrm{KHz}$. Per l'impedenza

$$Z_r = \frac{25\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} + 10^{-7}\,\mathrm{F}\;\cdot\;8\cdot 10^4\,\Omega^2}{10^{-7}\,\mathrm{F}\;\cdot\;600\,\Omega} = \frac{11}{2}\cdot 10^2\,\Omega = 550\,\Omega \tag{2.13}$$

Volendo approfondire lo studio di questo circuito, rileviamo che per $\omega = 0$ Z si riduce a R_1 e per $\omega \to \infty$ $Z \to R_2$. La fase sarà quindi sempre nulla sia per $\omega = 0$ che per $\omega \to \infty$. Mostriamo gli andamenti di modulo e fase di Z in funzione di ω per i quattro casi che si hanno dalle condizioni (2.10): il valore limite $\sqrt{L/C}$ risulta con i nostri componenti pari a $500\,\Omega$, per cui abbiamo scelto a) $R_1 = 200\,\Omega$ e $R_2 = 400\,\Omega$ (valori dell'esercizio), b) $R_1 = 600\,\Omega$ e $R_2 = 1000\,\Omega$ (entrambi superiori al limite), c) $R_1 = 200\,\Omega$ e $R_2 = 800\,\Omega$ (uno inferiore e l'altro superiore), d) $R_1 = 800\,\Omega$ e $R_2 = 200\,\Omega$ (speculare alla precedente).





3. Il problema può essere risolto facendo uso del formalismo delle impedenze complesse. Innanzitutto calcoliamo la tensione $\mathcal{V}_i'$ all'ingresso positivo dell'amplificatore in configurazione non invertente. L'amplificatore ha un'impedenza d'ingresso che si può considerare infinita a confronto con le altre in gioco, mentre dall'ingresso si dirama la resistenza R_4 che va all'ingresso negativo dell'amplificatore in configurazione invertente, ossia alla massa virtuale. Il circuito formato da $\mathcal{V}_i$, R_1, R_4 è quindi un semplice partitore e abbiamo

$$\mathcal{V}_i' = \mathcal{V}_i \, \frac{R_4}{R_1 + R_4} \tag{3.1}$$

La tensione $\mathcal{V}_1$ all'uscita dell'amplificatore non invertente è data da

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_i' \, \frac{Z_p + R_3}{R_3} \tag{3.2}$$

Dove Z_p è l'impedenza risultante dal parallelo di R_2 e C:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R_2} + j\omega C \qquad Z_p = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} \tag{3.3}$$

L'uscita $\mathcal{V}_2$ dell'amplificatore in configurazione invertente è data da

$$\mathcal{V}_2 = -\mathcal{V}_i' \, \frac{R_5}{R_4} \tag{3.4}$$

L'ultimo stadio di amplificazione, dato che utilizza resistenze dello stesso valore, produce in uscita la somma, cambiata di segno, di $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_o = -(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) &= \mathcal{V}_i \, \frac{R_4}{R_1 + R_4} \left[\frac{R_5}{R_4} - \frac{R_2}{R_3(1 + j\omega R_2 C)} - 1 \right] = \\ &= \mathcal{V}_i \, \frac{R_4}{R_1 + R_4} \, \frac{\left(\frac{R_5}{R_4} - \frac{R_2}{R_3} - 1 \right) + j\omega R_2 C \left(\frac{R_5}{R_4} - 1 \right)}{1 + j\omega R_2 C} \end{aligned} \tag{3.5}$$

La (3.5) dà la soluzione del problema in termini di grandezze complesse. Se scriviamo la tensione d'uscita reale come

$$V_o(t) = V_{o0}\cos(\omega t + \phi) \tag{3.6}$$

avremo per ampiezza e fase

$$\begin{aligned} V_{o0} &= V_{i0}\,\frac{R_4}{R_1+R_4}\sqrt{\frac{\left(\frac{R_5}{R_4}-\frac{R_2}{R_3}-1\right)^2+\left[\omega R_2 C\left(\frac{R_5}{R_4}-1\right)\right]^2}{1+(\omega R_2 C)^2}} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{R_5}{R_4}-\frac{R_2}{R_3}-1\ ,\ \omega R_2 C\left[\frac{R_5}{R_4}-1\right]\right)-\arctan(\omega R_2 C) \end{aligned} \tag{3.7}$$

dove abbiamo usato la funzione arctangente generalizzata a 2 argomenti $\arctan(x, y)$ per il primo termine, dove non sono noti a priori i segni delle componenti. Per il calcolo numerico conviene determinare preventivamente $\omega R_2 C$:

$$\omega R_2 C = 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ \cdot\ 10^3\,\Omega\ \cdot\ 2\cdot 10^{-7}\,\mathrm{F} = 2 \tag{3.8}$$

Abbiamo infine

$$\begin{aligned} V_{o0} &= V_{i0}\,\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\left(\frac{11}{4}\right)^2+6^2}{1+2^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{697}{5}}\,V_{i0} = 0.9839\,\mathrm{V} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{11}{4}\ ,\ 6\right)-\arctan(2) = \arctan\left(\frac{24}{11}\right)-\arctan(2) = \\ &= \arctan\left(\frac{2}{59}\right) = 3.389\cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad} \end{aligned} \tag{3.9}$$

dove negli ultimi passaggi si è utilizzata la formula $\tan(\alpha-\beta) = (\tan\alpha - \tan\beta)/(1+\tan\alpha\,\tan\beta)$.