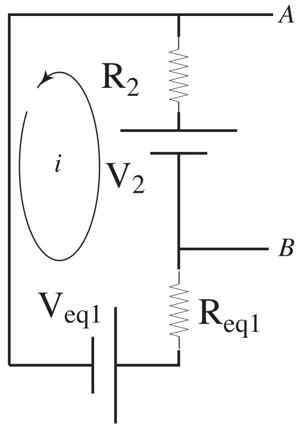
Esperimentazioni di Fisica II A

SOLUZIONE del compito del 15 dicembre 2006



1. Per risolvere il problema occorre prima di tutto determinare il circuito equivalente di Thévenin di quello dato, visto dai punti A e B. Come primo passo, possiamo isolare la maglia inferiore, quella che contiene V_1, R_1 e R_3, e sostituirla con il suo circuito equivalente visto dai punti immediatamente al di sopra di R_3. Questo circuito non è altro che un partitore di tensione, per cui il suo equivalente è dato da un generatore V_{eq1} e da una resistenza equivalente R_{eq1}:

$$V_{eq1} = V_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3} \qquad R_{eq1} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \tag{1.1}$$

A questo punto abbiamo una sola maglia. Chiamiamo i la corrente che vi scorre, prendendola arbitrariamente positiva in senso antiorario. La corrente può essere facilmente determinata scrivendo l'equazione della maglia:

$$V_{eq1} - iR_{eq1} + V2 - iR2 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad i = \frac{V_{eq1} + V_2}{R_{eq1} + R_2} \tag{1.2}$$

È ora immediato scrivere la tensione equivalente del circuito $V_{eq} = V_A - V_B$:

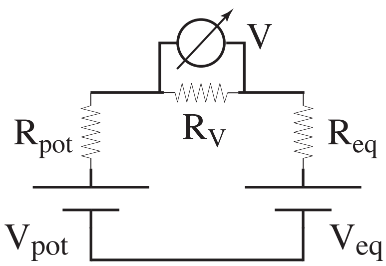
$$V_{eq} = V_2 - iR_2 = V_2 - R_2 \frac{V_{eq1} + V_2}{R_{eq1} + R_2} = \frac{V_2 R_{eq1} - V_{eq1} R_2}{R_{eq1} + R_2} \tag{1.3}$$

Introducendo nella (1.3) i valori ricavati dalla (1.1) abbiamo

$$V_{eq} = R_3 \frac{V_2 R_1 - V_1 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = \frac{V_2 R_1 - V_1 R_2}{R_1 (1 + \frac{R_2}{R_3}) + R_2} \tag{1.4}$$

La resistenza equivalente vista fra A e B è semplicemente il parallelo di R_1, R_2 e R_3 e vale

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{1.5}$$



A questo punto consideriamo il circuito equivalente a quello che si usa nella misura con il divisore, quando il rivelatore di zero è costituito da un voltmetro digitale. La tensione V misurata dal voltmetro vale

$$V = (V_{eq} - V_{pot}) \frac{R_v}{R_v + R_{pot} + R_{eq}} \tag{1.6}$$

L'errore di sensibilità, come è noto, corrisponde a $|V_{eq} - V_{pot}|$ quando sul voltmetro si legge la minima tensione discriminabile da zero:

$$\Delta V_{sens} = V_m \frac{R_v + R_{pot} + R_{eq}}{R_v} \simeq V_m \frac{R_v + R_{eq}}{R_v} \tag{1.7}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che R_{pot} è trascurabile rispetto alle altre resistenze. L'errore relativo che cerchiamo è quindi dato da

$$\frac{\Delta V_{sens}}{|V_{eq}|} = \frac{V_m}{|V_{eq}|} \frac{R_v + R_{eq}}{R_v} \tag{1.8}$$

Passiamo al calcolo numerico di V_{eq}

$$V_{eq} = \frac{8\,\mathrm{V} \cdot 10\,\mathrm{M\Omega} - 5\,\mathrm{V} \cdot 24\,\mathrm{M\Omega}}{10\,\mathrm{M\Omega}\left(1 + \frac{24}{40}\right) + 24\,\mathrm{M\Omega}} = -1\,\mathrm{V} \tag{1.9}$$

e di R_{eq}

$$R_{eq} = \frac{10 \cdot 24 \cdot 40\ (\mathrm{M\Omega})^3}{(10 \cdot 24 + 10 \cdot 40 + 24 \cdot 40)\ (\mathrm{M\Omega})^2} = 6\,\mathrm{M\Omega} \tag{1.10}$$

Corrispondentemente

$$\frac{\Delta V_{sens}}{|V_{eq}|} = \frac{10^{-4}\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{V}} \frac{16\,\mathrm{M\Omega}}{10\,\mathrm{M\Omega}} = 1.600 \cdot 10^{-4} \tag{1.11}$$

2. Scriviamo le condizioni a cui devono soddisfare le resistenze dell'attenuatore. L'equivalente di Thévenin del generatore più attenuatore visto dal carico è un generatore di tensione

$$V_{eq} = V \frac{R_2}{R + R_1 + R_2} \tag{2.1}$$

mentre la resistenza equivalente vista dall'uscita dell'attuenuatore in presenza del generatore è

$$R_{eqout} = R_3 + \frac{R_2(R + R_1)}{R + R_1 + R_2} \tag{2.2}$$

La resistenza vista dall'ingresso dell'attenuatore in presenza della resistenza di carico R è

$$R_{eqin} = R_1 + \frac{R_2(R + R_3)}{R + R_3 + R_2} \tag{2.3}$$

Quindi le condizioni che devono essere soddisfatte dalle tre resistenze sono

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R+R_1+R_2} = \alpha \\ R_3 + \frac{R_2(R+R_1)}{R+R_1+R_2} = R \\ R_1 + \frac{R_2(R+R_3)}{R+R_3+R_2} = R \end{cases} \tag{2.4}$$

Osserviamo che le ultime due equazioni delle (2.4) si ottengono l'una dall'altra scambiando R_1 con R_3 e viceversa. Da questo si deduce che, a parità di R e R_2, R_3 e R_1 sono soggette alla medesima condizione e quindi $R_1 = R_3$. Fisicamente, si osserva che, per quanto riguarda il calcolo delle resistenze equivalenti, i circuiti visti dall'ingresso e dall'uscita dell'attenuatore sono uguali, e quindi devono esserlo R_1 e R_3. Senza questa osservazione, il calcolo della soluzione è abbastanza più laborioso: si uguagliano i primi membri delle ultime due equazioni delle (2.4):

$$R_3 + \frac{R_2(R+R_1)}{R+R_1+R_2} = R_1 + \frac{R_2(R+R_3)}{R+R_3+R_2} \tag{2.5}$$

da cui

$$\begin{aligned} &R_3(R+R_1+R_2)(R+R_3+R_2) + R_2(R+R_1)(R+R_3+R_2) = \\ &= R_1(R+R_3+R_2)(R+R_1+R_2) + R_2(R+R_3)(R+R_1+R_2) \end{aligned} \tag{2.6}$$

che si può porre nella forma

$$\begin{aligned} &(R_1-R_3)(R+R_1+R_2)(R+R_3+R_2) = \\ &= R_2(R+R_1)(R+R_3+R_2) - R_2(R+R_3)(R+R_1+R_2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Il secondo membro della (2.7) si può riscrivere come

$$R_2(R+R_1)(R+R_3) + R_2^2(R+R_1) - R_2(R+R_3)(R+R_1) - R_2^2(R+R_3) \tag{2.8}$$

che si semplifica in

$$R_2^2(R_1-R_3) \tag{2.9}$$

La (2.7) si può quindi riscrivere come

$$(R_1-R_3)(R+R_1+R_2)(R+R_3+R_2) = R_2^2(R_1-R_3) \tag{2.10}$$

Le soluzioni della (2.10) sono

$$\begin{cases} R_1 = R_3 \\ (R+R_1+R_2)(R+R_3+R_2) = R^2 \qquad \text{con} \quad R_1 \neq R_3 \end{cases} \tag{2.11}$$

La seconda delle (2.11) si può scrivere come

$$(R+R_3)(R+R_1) + R_2(2R+R_1+R_3) = 0 \tag{2.12}$$

Dato che $R > 0$ e che le altre resistenze non possono essere negative, il primo membro della (2.12) può solo essere strettamente positivo, e quindi la (2.12) non ammette radici fisicamente accettabili.

Accertato che $R_3 = R_1$ possiamo eliminare la terza delle (2.4) e sostituire nella seconda R_1 a R_3:

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R+R_1+R_2} = \alpha \\ \\ R_1 + \frac{R_2(R+R_1)}{R+R_1+R_2} = R \end{cases} \tag{2.13}$$

Se sostituiamo il valore di α che si ricava dalla prima delle (2.13) nella seconda, abbiamo

$$R_1 + \alpha(R+R_1) = R \qquad \text{da cui} \qquad R_1 = R\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{2.14}$$

La prima delle (2.13) si può scrivere nella forma

$$R_2(1-\alpha) = \alpha(R+R_1) \tag{2.15}$$

Sostituendo nella (2.15) il valore di R_1 determinato nella (2.14) risulta

$$R_2 = \frac{\alpha R\left(1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)}{1-\alpha} = R\,\frac{2\alpha}{(1+\alpha)(1-\alpha)} \tag{2.16}$$

Utilizzando i valori numerici dati si ottiene $R_1 = R_3 = 40.91\,\Omega$, $R_2 = 10.10\,\Omega$.[1]

3. La potenza media dissipata su R_2 è data da $i^2_{2_{eff}} R_2 = \frac{1}{2} i^2_{2_0} R_2$ dove i_{2_0} è l'ampiezza della corrente che scorre in R_2.

Nell'effettuare calcoli su circuiti contenenti impedenze complesse è spesso più pratico non introdurre immediatamente l'espressione specifica dell'impedenza, ma considerare come entità generiche le impedenze di ogni ramo, finché non diventa necessario specificare di quali dispositivi si tratti. Per questo indichiamo: $R_1 = z_1$, $R_2 + j\omega L = z_2$, $1/j\omega C = z_3$. Detta $\mathcal{V}$ la tensione del generatore espressa nel formalismo complesso, la corrente $\mathcal{I}$ erogata dal generatore si ottiene dividendo $\mathcal{V}$ per l'impedenza vista dal generatore:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{z_1 + \frac{z_2 z_3}{z_2+z_3}} \tag{3.1}$$

La corrente che esce dal generatore passa in z_1 e si dirama su z_2 e z_3. La corrente $\mathcal{I}_2$ che attraversa il ramo di z_2 è data dalla formula del partitore di corrente

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}\frac{z_3}{z_2+z_3} \tag{3.2}$$

Sostituendo nella (3.2) il valore di $\mathcal{I}$ determinato nella (3.1) si ottiene

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{V}\frac{z_3}{z_2+z_3}}{z_1 + \frac{z_2 z_3}{z_2+z_3}} = \frac{\mathcal{V}}{z_1\left(1+\frac{z_2}{z_3}\right)+z_2} \tag{3.3}$$

A questo punto sostituiamo i valori specifici delle impedenze

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{V}}{R_1(1+j\omega C(R_2+j\omega L))+R_2+j\omega L} = \frac{\mathcal{V}}{R_1+R_2-\omega^2 LCR_1 + j\omega(L+R_1R_2C)} \tag{3.4}$$

L'ampiezza della corrente cercata, i_{2_0}, corrisponde a $|\mathcal{I}_2|$. Utilizzando la (3.4) possiamo scrivere l'espressione della potenza media che vogliamo determinare

$$W = \frac{1}{2}|\mathcal{I}_2|^2 R_2 = \frac{\frac{1}{2}V_0^2 R_2}{(R_1+R_2-\omega^2 LCR_1)^2 + \omega^2(L+R_1R_2C)^2} \tag{3.5}$$

[1] Diamo i risultati numerici con 4 cifre significative, indipendentemente da quello che sarebbe corretto nella prassi fisica, per un confronto più accurato dei calcoli.

L'energia immagazzinata dal condensatore all'istante t vale $E(t) = \frac{1}{2}CV_C(t)^2$ dove $V_C(t)$ è la differenza di potenziale ai capi del condensatore. L'energia è massima quando si raggiunge il massimo di $V_C(t)$, che corrisponde all'ampiezza della tensione sinusoidale. Se $\mathcal{V}_C$ è la tensione ai capi del condensatore nel formalismo complesso, il massimo di $V_C(t)$ è dato da $|\mathcal{V}_C|$. Se indichiamo con z_p il parallelo di z_2 e z_3 possiamo scrivere dalla formula del partitore

$$\mathcal{V}_C = \mathcal{V}\,\frac{z_p}{z_1 + z_p} = \frac{\mathcal{V}}{1 + \frac{z_1}{z_p}} \tag{3.6}$$

Ricordando che

$$\frac{1}{z_p} = \frac{1}{R_2 + j\omega L} + j\omega C \tag{3.7}$$

si calcola facilmente $\mathcal{V}_C$

$$\mathcal{V}_C = \frac{\mathcal{V}}{1 + \frac{R_1}{R_2 + j\omega L} + j\omega R_1 C} = \frac{\mathcal{V}(R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_1 + j\omega(L + R_1R_2C)} \tag{3.8}$$

L'energia massima E vale quindi

$$E = \frac{1}{2}CV_0^2\,\frac{R_2^2 + \omega^2 L^2}{(R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_1)^2 + \omega^2(L + R_1R_2C)^2} \tag{3.9}$$

Ingroducendo i valori numerici in (3.5) e (3.9) si ottiene $W = 18.26\,\mathrm{mW}$, $E = 8.150\,\mu\mathrm{J}$.