Esperimentazioni di Fisica II B

SOLUZIONE del compito del 19 aprile 2006

A. Consideriamo il caso più generale di un'impedenza costituita dalla serie di una parte reale ed una immaginaria, $Z = R + jX$. Nel circuito scorrerà una corrente i che avrà in generale la forma $i = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, i cui parametri i_0 e φ si calcolano con il metodo delle impedenze complesse:

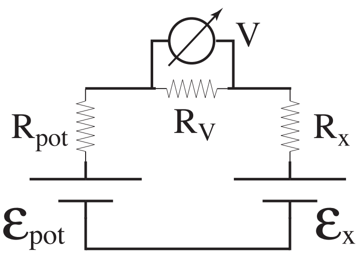
$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{R + jX} \qquad i_0 = |\mathcal{I}| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X^2}} \qquad \varphi = -\arctan\frac{X}{R} \tag{A.1}$$

La potenza media erogata dal generatore corrisponde a quella dissipata sulla resistenza (lo scambio di energia fra il generatore e la reattanza ha risultato netto nullo sul periodo). Sulla resistenza avremo per la legge di Ohm una caduta di potenziale $V_R = V_{R0}\cos(\omega t + \varphi)$ dove $V_{R0} = i_0\, R$. Si noti che i e V_R sono sfasate di φ rispetto alla tensione del generatore, ma in fase fra loro. A questo punto applichiamo la formula della potenza media in corrente alternata: $\overline{W} = V_{\text{eff}}\, i_{\text{eff}}\, \cos\phi$ con $i_{\text{eff}} = i_0/\sqrt{2}$, $V_{\text{eff}} = V_{R0}/\sqrt{2}$ e $\phi = 0$. Avremo quindi

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\, i_0^2 R = \frac{1}{2}\,\frac{V_0^2 R}{R^2 + X^2} = \frac{1}{2}\,\frac{V_0^2 R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \tag{A.2}$$

Con i valori numerici[1]

$$\overline{W} = 0.4492\,\mathrm{W} \tag{A.3}$$



B. Il circuito equivalente della misura con il divisore è quello in figura. In generale, il voltmetro misurerà una tensione V pari a

$$V = \frac{(\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{pot})R_V}{R_V + R_x + R_{pot}} \simeq \frac{(\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{pot})R_V}{R_x} \tag{B.1}$$

Dove $\mathcal{E}_{pot}$ e R_{pot} sono gli elementi del circuito equivalente di Thévenin del divisore, con R_{pot} minore o dell'ordine di qualche $K\Omega$. Dal momento che il voltmetro non è in grado di distinguere da 0 tensioni inferiori in valore assoluto a V_m, l'errore di sensibilità è il valore di $|\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{pot}|$ che si ricava dalla (B.1) quando $V = V_m$

$$\Delta_{\mathcal{E}_x} = V_m \frac{R_x}{R_V} \tag{B.2}$$

Con i dati del problema risulta $\Delta_{\mathcal{E}_x} = 1\,\mathrm{mV}$ ossia $\Delta_{\mathcal{E}_x}/\mathcal{E}_x = 1\%$.

1. Dalla teoria del filtro passa–basso si ricava immediatamente la funzione di trasferimento complessa $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1 + j\,\frac{\omega}{\omega_c}} \qquad \text{dove} \qquad \omega_c = \frac{1}{RC} \tag{1.1}$$

[1] Tutti i risultati sono dati con 4 cifre significative per rendere più stretto il controllo dei calcoli.

da cui si ricavano i valori di modulo e fase

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \qquad \phi_A = -\arctan\frac{\omega}{\omega_c} \tag{1.2}$$

La forma d'onda applicata al filtro risulta periodica con periodo $T = 2\pi/\omega_0$. Pertanto potrà essere espressa come la somma di componenti con pulsazioni multiple di ω_0. Per determinare le componenti osserviamo che

$$\sin^3 x = \sin x\, \sin^2 x = \frac{1}{2}(\sin x - \sin x\, \cos 2x) \tag{1.3}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è tenuto conto del fatto che, essendo $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, risulta $\sin^2 x = (1/2)(1-\cos 2x)$. L'ultimo termine della (1.3) può essere ulteriormente manipolato usando la formula di prostaferesi $\sin\alpha\, \cos\beta = (1/2)[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$. Si ottiene

$$\sin x\, \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) \tag{1.4}$$

Avremo quindi

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \tag{1.5}$$

La nostra forma d'onda sarà quindi data da

$$V(t) = \frac{3}{4}V_{i0}\sin\omega_0 t - \frac{1}{4}V_{i0}\sin 3\omega_0 t = \frac{3}{4}V_{i0}\sin\omega_0 t + \frac{1}{4}V_{i0}\sin(3\omega_0 t + \pi) \tag{1.6}$$

La tensione d'uscita richiesta $V_o(t)$ si determina applicando le (1.2) separatamente a ciascuna delle due componenti e sommando

$$V_o(t) = V_1 \sin(\omega_0 t + \phi_1) + V_2 \sin(3\omega_0 t + \pi + \phi_2) \tag{1.7}$$

dove

$$V_1 = \frac{3}{4}\frac{V_{i0}}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}}} \qquad V_2 = \frac{1}{4}\frac{V_{i0}}{\sqrt{1+\frac{9\omega_0^2}{\omega_c^2}}}$$
$$\phi_1 = -\arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right) \qquad \phi_2 = -\arctan\left(\frac{3\omega_0}{\omega_c}\right) \tag{1.8}$$

Introducendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{aligned} V_1 &= 4.685\,\mathrm{V} & V_2 &= 0.6442\,\mathrm{V} \\ \phi_1 &= -0.8961\,\mathrm{rad} & \phi_2 &= -1.310\,\mathrm{rad} \end{aligned} \tag{1.9}$$

2. Il modulo dell'impedenza di un circuito risonante serie vale in generale

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{2.1}$$

Le condizioni del problema portano al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = z_1 \\ \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2} = z_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

da cui

$$\begin{cases} \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = z_1^2 - R^2 \\ \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2 = z_2^2 - R^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Se chiamiamo $\gamma_i^2 = z_i^2 - R^2$ ricaviamo le equazioni

$$\begin{cases} \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \pm\gamma_1 \\ \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = \pm\gamma_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

dove è fondamentale non aver dimenticato che l'equazione $a^2 = b^2$ è equivalente a $a = \pm b$. Le (2.4) costituiscono un sistema lineare di due equazioni in due incognite in L e $1/C$. Lo risolviamo con il metodo di Cramer

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1 \omega_2} \\ \Delta_L &= \frac{\mp\gamma_1}{\omega_2} - \frac{\mp\gamma_2}{\omega_1} \\ \Delta_{1/C} &= \mp\gamma_1\,\omega_2 - \mp\gamma_2\,\omega_1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ciascuna delle espressioni γ_1 e γ_2 può essere presa indipendentemente con il segno positivo o negativo, ma i segni di ciascuna devono essere uguali nelle due equazioni. Questo porta a 4 possibili coppie di soluzioni del sistema (2.5): siamo interessati esclusivamente a quelle per cui L e $1/C$ siano entrambi positivi. Il discriminante Δ risulta positivo con i dati del problema, per cui il segno delle soluzioni corrisponde al segno di Δ_L e $\Delta_{1/C}$. Risulta poi $\gamma_1 > \gamma_2$, $\omega_1 < \omega_2$. Sulla base di queste condizioni, senza svolgere i calcoli per ciascuna combinazione, si può dedurre la tabella seguente

	γ_1	γ_2	Δ_L	$\Delta_{1/C}$
a)	+	+	?	+
b)	−	−	?	−
c)	+	−	+	+
d)	−	+	−	−

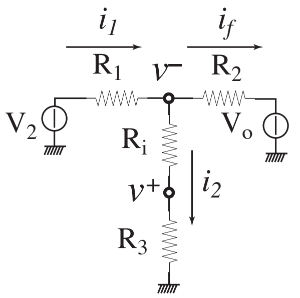
Le combinazioni b) e d) sono senz'altro da scartare, la combinazione c) dà radici positive, mentre per la combinazione a) va calcolato esplicitamente il segno di Δ_L. Dai dati numerici risulta in questo caso $\Delta_L = -66.67\,\text{mH}$, per cui resta come unica soluzione quella che proviene dalla combinazione c). Svolgendo i calcoli numerici con questa combinazione si ottiene

$$L = 99.99\,\text{mH} \qquad C = 0.1000\,\mu\text{F} \tag{2.6}$$

3. La tensione d'uscita può essere ricavata applicando il principio di sovrapposizione, ossia come somma delle tensioni che si ottengono sostituendo uno dei due generatori con un corto circuito. Quando si sostituisce V_2 si ottiene una normale configurazione non invertente, salvo per il fatto che la tensione d'ingresso è applicata attraverso la resistenza R_3. L'impedenza d'ingresso Z_i dell'amplificatore risulta comunque data da $A\beta R_i$ con $\beta = R_1/(R_1 + R_2) = 1/3$. Risulta $Z_i \simeq 3\,\text{G}\Omega$, per cui la caduta su R_3 è assolutamente trascurabile e vale

$$V_{o1} = V_1 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \tag{3.1}$$

Quando sostituiamo V_1 con un corto circuito otteniamo una configurazione che corrisponde a quella invertente salvo per la presenza di R_3. Dallo studio della configurazione invertente sappiamo che nel ramo di circuito che va dall'ingresso invertente al capo comune passando per l'ingresso non invertente scorre una corrente trascurabile, per cui potremmo già intuire che la presenza di una resistenza dell'ordine di R_3 non altera significativamente il funzionamento. Vogliamo comunque darne una dimostrazione formale.



Utilizzando lo schema equivalente in figura, possiamo scrivere

$$v^+ = v^- \frac{R_3}{R_i + R_3} \tag{3.2}$$

Utilizzando la (3.2) nell'espressione di V_o si ha

$$V_o = A(v^+ - v^-) = -Av^- \frac{R_i}{R_i + R_3} \tag{3.3}$$

Abbiamo poi le equazioni del circuito

$$\begin{cases} i_1 = \frac{V_2 - v^-}{R_1} \\ i_2 = \frac{v^-}{R_i + R_3} \\ i_f = \frac{v^- - V_o}{R_2} = v^- \left(\frac{1}{R_2} + \frac{AR_i}{R_2(R_i + R_3)} \right) \\ i_1 = i_2 + i_f \end{cases} \tag{3.4}$$

Sostituendo nella quarta delle (3.4) i valori delle correnti ricavati nelle prime tre si ottiene

$$\frac{V_2}{R_1} = v^- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i + R_3} + \frac{AR_i}{R_2(R_i + R_3)} \right) \tag{3.5}$$

Dei quattro termini a fattore di v^- nella (3.5) si vede che (purché R_3 non sia tanto grande da diventare comparabile con AR_i) l'ultimo è preponderante pdi gran lunga, per cui si può scrivere

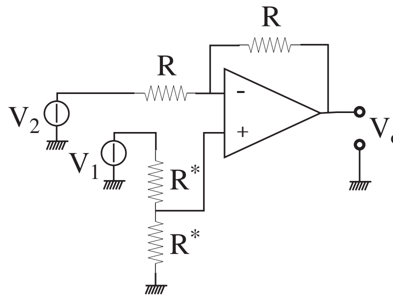
$$v^- \simeq V_2 \frac{R_2(R_i + R_3)}{AR_1 R_i} \tag{3.6}$$

sostituendo questo valore nella (3.3) si ottiene

$$V_{o2} = -AV_2 \frac{R_i}{R_i + R_3} \frac{R_2(R_i + R_3)}{AR_1 R_i} = -\frac{R_2}{R_1} V_2 \tag{3.7}$$

Vediamo quindi che anche in presenza di R_3 il circuito si comporta come nella usuale configurazione invertente. Abbiamo quindi

$$V_o = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_1 - \frac{R_2}{R_1} V_2 = 3\,V_1 - 2\,V_2 \tag{3.8}$$



Per quanto riguarda la domanda facoltativa, da quanto visto sopra deduciamo che è possibile inserire all'ingresso non invertente un qualsiasi sistema di resistenze purché la resistenza equivalente totale vista dall'ingresso verso il riferimento comune, una volta sostituito V_1 con un corto circuito, non risulti troppo grande. Se vogliamo che il guadagno rispetto a V_2 sia pari a -1 dovremo scegliere $R_1 = R_2 = R$. In questo modo, se applicassimo direttamente V_1 all'ingresso non invertente, avremmo un guadagno 2, che possiamo però portare a 1 se preventivamente riduciamo la tensione con un partitore che la dimezzi. Tale partitore sarà cositutito da due resistenze uguali R^*. Ponendo $R^* = R/2$ avremo poi resistenze d'ingresso uguali per V_1 e V_2.