Esperimentazioni di Fisica II A

SOLUZIONE del compito del 23 gennaio 2009

1. Nel periodo di tempo $0 \leq t \leq t_1$ il circuito è costituito da una sola maglia, contenente il generatore, le due resistenze R e R_1 e l'induttanza L. L'equazione della maglia è:

$$V - i\,(R + R_1) - L\,\frac{di}{dt} = 0 \tag{1.1}$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti, che si può porre nella forma

$$\frac{di}{dt} + \frac{R + R_1}{L}\,i = \frac{V}{L} \tag{1.2}$$

Secondo il metodo di risoluzione noto, ricaviamo la soluzione particolare dell'equazione, $i = V/(R + R_1)$, e aggiungiamo la soluzione generale dell'omogenea associata, che è di forma esponenziale

$$i(t) = \frac{V}{R + R_1} + A\,e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{con} \qquad \tau = \frac{L}{R + R_1} \tag{1.3}$$

Resta da ricavare il valore della costante arbitraria A in base alle condizioni iniziali, che sono ovviamente $i(0) = 0$, per cui

$$i(t) = \frac{V}{R + R_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad t \leq t_1 \tag{1.4}$$

Dall'istante t_1 in poi, con la chiusura di S_2, il circuito cambia. Il metodo più semplice per tenerne conto è considerare il circuito equivalente di Thévenin visto dal ramo che contiene R_1 e L: per $t < t_1$ questo è costitutito da V e R; per $t > t_1$ sarà costituito ancora da un generatore V' e da una resistenza R', che si possono calcolare facilmente considerando che si tratta di un semplice partitore.

$$V' = V\,\frac{R_2}{R + R_2} \qquad R' = \frac{R\,R_2}{R + R_2} \tag{1.5}$$

L'equazione del circuito è quindi analoga alla (1.2)

$$\frac{di}{dt} + \frac{R' + R_1}{L}\,i = \frac{V'}{L} \tag{1.6}$$

e la soluzione è analoga alla (1.3)

$$i(t) = \frac{V'}{R' + R_1} + B\,e^{-\frac{t}{\tau'}} \qquad \text{con} \qquad \tau' = \frac{L}{R' + R_1} \tag{1.7}$$

Occorre determinare la costante B dalle condizioni iniziali. A questo scopo dobbiamo considerare che all'istante t_1 la corrente i nell'induttanza non può variare di una quantità finita, perché ciò implicherebbe una d.d.p. infinita sull'induttanza stessa, per cui $i(t_{1+}) = i(t_{1-})$ Avremo dalla (1.4)

$$i(t_1) = \frac{V}{R + R_1} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) \tag{1.8}$$

che introdotta nella (1.7) dà

$$\frac{V}{R + R_1} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) = \frac{V'}{R' + R_1} + B\, e^{-\frac{t_1}{\tau'}} \tag{1.9}$$

da cui si ricava B

$$B = \left[\frac{V}{R + R_1} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) - \frac{V'}{R' + R_1}\right] e^{\frac{t_1}{\tau'}} \tag{1.10}$$

L'espressione per la corrente per $t \geq t_1$ vale quindi

$$i(t) = \frac{V'}{R' + R_1} + \left[\frac{V}{R + R_1} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) - \frac{V'}{R' + R_1}\right] e^{-\frac{t - t_1}{\tau'}} \tag{1.11}$$

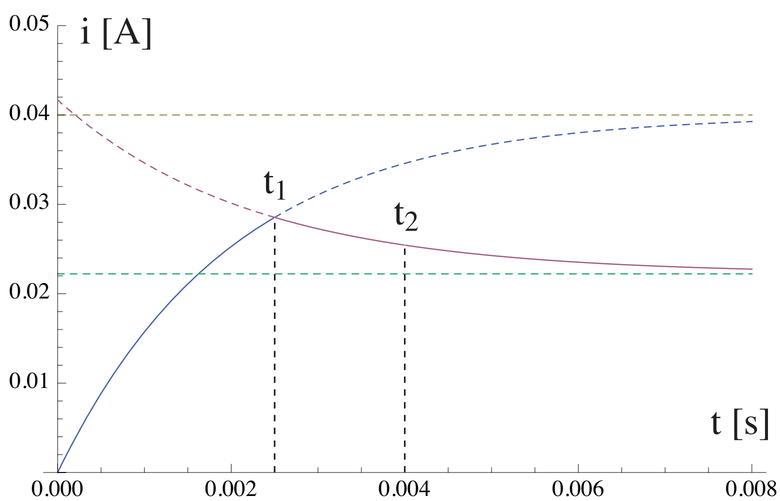
Dalla (1.11) si determina immediatamente il valore asintotico della corrente

$$\lim_{t \to \infty} i(t) = \frac{V'}{R' + R_1} \tag{1.12}$$

Per i calcoli numerici abbiamo

$$\begin{aligned}
&V' = \frac{2\,\mathrm{V} \cdot 10\,\Omega}{20\,\Omega} = 1\,\mathrm{V} \qquad R' = \frac{100\,\Omega^2}{20\,\Omega} = 5\,\Omega \\
&\tau = \frac{100\,\mathrm{mH}}{50\,\Omega} = 2\,\mathrm{ms} \qquad \tau' = \frac{100\,\mathrm{mH}}{45\,\Omega} = \frac{20}{9}\,\mathrm{ms} \\
&i(t_1) = \frac{2\,\mathrm{V}}{50\,\Omega}\left(1 - e^{-\frac{5}{4}}\right) = 28.54\,\mathrm{mA} \qquad \lim_{t \to \infty} i(t) = \frac{1\,\mathrm{V}}{45\,\Omega} = 22.22\,\mathrm{mA} \\
&i(t_2) = \frac{1}{45}\,\mathrm{A} + \left[\frac{1}{25}\left(1 - e^{-\frac{5}{4}}\right)\mathrm{A} - \frac{1}{45}\,\mathrm{A}\right] e^{-\frac{15}{10}\,\mathrm{ms} \cdot \frac{9}{20}\,\mathrm{ms}^{-1}} = 25.44\,\mathrm{mA}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

In figura è rappresentato l'andamento di $i(t)$.



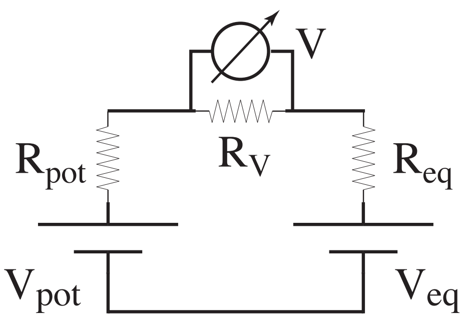
2. La tensione incognita è legata a quella della pila campione dalla relazione

$$V_x = \frac{r_x}{r_0}\,\mathcal{E}_0 \tag{2.1}$$

corrispondentemente

$$\frac{\Delta V_x}{V_x} = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0} + \frac{\Delta r_0}{r_0} + \frac{\Delta r_x}{r_x} \tag{2.2}$$

Il primo termine della (2.2) è dato dal costruttore, restano da determinare gli altri due. Sui rapporti di partizione avremo un errore dovuto al limite di linearità del divisore, dato dal costruttore, più l'errore di sensibilità. Per calcolare quest'ultimo consideriamo il circuito equivalente della maglia in cui si azzera la corrente.



V_{eq} e R_{eq} sono gli elementi equivalenti di Thévenin del circuito su cui si misura la d.d.p., V_{pot} e R_{pot} sono rispettivamente la tensione e la resistenza viste dai terminali hl del divisore (come da testo, trascureremo R_{pot}) e R_v è la resistenza interna del voltmetro. In queste condizioni il voltmetro misura una tensione V_v

$$V_v = (V_{eq} - V_{pot})\,\frac{R_v}{R_{pot} + R_v + R_{eq}} \tag{2.3}$$

In condizioni di azzeramento avremo che $|V_v| \leq V_m$, ossia

$$|V_{eq} - V_{pot}|\,\frac{R_v}{R_{pot} + R_v + R_{eq}} \leq V_m \tag{2.4}$$

In queste condizioni $|V_{eq} - V_{pot}|$ rappresenta proprio l'errore di misura dovuto alla sensibilità finita del voltmetro, per cui

$$\Delta V_{eq_{sens}} = V_m\,\frac{R_{pot} + R_v + R_{eq}}{R_v} \tag{2.5}$$

Infine, siamo interessati a ricondurre l'errore di sensibilità a un errore sul rapporto r di partizione. Per fare questo basta una semplice proporzione[1]

$$\frac{\Delta r_{sens}}{1} = \frac{\Delta V_{sens}}{V_{HL}} \qquad \text{da cui} \qquad \Delta r_{sens} = \frac{V_m}{V_{HL}}\,\frac{R_{pot} + R_v + R_{eq}}{R_v} \tag{2.6}$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per il calcolo numerico dell'errore relativo su V_x

$$\begin{aligned}
&r_0 = 0.10186 \qquad r_x = 0.4 \\
&\Delta r_{0_{lin}} = 2\cdot 10^{-5} \qquad \Delta r_{x_{lin}} = 2\cdot 10^{-5} \\
&\Delta r_{0_{sens}} = \frac{10^{-4}\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{V}} = 10^{-5} \qquad \Delta r_{x_{sens}} = \frac{10^{-4}\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{V}}\,\frac{10\,\mathrm{M\Omega} + 40\,\mathrm{M\Omega}}{10\,\mathrm{M\Omega}} = 5\cdot 10^{-5}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

[1] La (2.6) può trarre in inganno perché da essa appare che aumentando la tensione di fondo–scala V_{HL} si diminuisce l'errore Δr_{sens}. Questo è vero, ma va tenuto conto che l'errore relativo corrispondente si ottiene dividendo per $r = V_{pot}/V_{HL}$ e quindi la qualità della misura non migliora aumentando V_{HL}.

Introducendo nella (2.2) abbiamo[2]

$$\frac{\Delta V_x}{V_x} = 10^{-5} + \frac{3 \cdot 10^{-5}}{0.10186} + \frac{7 \cdot 10^{-5}}{0.4} = 4.795 \cdot 10^{-4} \tag{2.8}$$

Si nota che la taratura dà il contributo maggiore all'errore, mentre la misura ne dà uno dello stesso ordine di grandezza e l'incertezza sulla pila campione è praticamente trascurabile.

La misura di R_x avviene per confronto fra l'azzeramento in assenza e in presenza della resistenza R_0. Quando R_0 è inserita, il circuito equivalente di Thévenin di cui si misura la f.e.m. è un partitore formato da R_x e R_0, alimentato da V_x. Dato che al momento della misura non viene prelevata corrente dal partitore, la f.e.m. misurata è proprio quella equivalente di Thévenin. Possiamo impostare la proporzione

$$\frac{r_x}{r'_x} = \frac{V_x}{V_x \frac{R_0}{R_x+R_0}} \qquad \text{da cui risulta} \qquad R_x = R_0 \left(\frac{r_x}{r'_x} - 1 \right) \tag{2.9}$$

Dalla (2.9) ricaviamo l'espressione dell'errore su R_x

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\frac{\Delta r_x}{r_x} + \frac{\Delta r'_x}{r'_x}}{1 - \frac{r'_x}{r_x}} \tag{2.10}$$

Per calcolare la (2.10) dobbiamo ricavare l'errore $\Delta r'_x$. Dalla (2.9) risulta

$$r'_x = \frac{r_x}{\frac{R_x}{R_0} + 1} \tag{2.11}$$

Per quanto riguarda l'errore di sensibilità, esso è dato ancora dalla (2.6), in cui R_{eq} è la resistenza equivalente di Thévenin del partitore, ossia il parallelo di R_0 e R_x

$$\Delta r'_{x\,sens} = \frac{V_m}{V_{HL}} \frac{R_{pot} + R_v + \frac{R_0\,R_x}{R_0+R_x}}{R_v} \tag{2.12}$$

Abbiamo adesso tutti gli elementi per procedere al calcolo numerico

$$\begin{aligned}
&r'_x = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{40\,\mathrm{M\Omega}}{1\,\Omega} + 1} = \frac{2}{205} = 0.009756 \qquad \frac{r'_x}{r_x} = \frac{1}{41} \qquad \Delta r'_{x_{lin}} = 2 \cdot 10^{-6} \\
&\Delta r'_{x_{sens}} = 10^{-5} \frac{10\,\mathrm{M\Omega} + \frac{1\,\mathrm{M\Omega} \cdot 40\,\mathrm{M\Omega}}{40\,\mathrm{M\Omega} + 1\,\mathrm{M\Omega}}}{10\,\mathrm{M\Omega}} = \frac{45}{41} \cdot 10^{-5} = 1.098 \cdot 10^{-5} \\
&\frac{\Delta R_x}{R_x} = 2 \cdot 10^{-4} + \frac{40}{41} \left(\frac{7 \cdot 10^{-5}}{0.4} + \frac{1.298 \cdot 10^{-5}}{9.756 \cdot 10^{-3}} \right) = 1.743 \cdot 10^{-3}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

[2] Riportiamo il risultato con più cifre significative per permettere un riscontro più preciso dei calcoli numerici, anche se da un punto di vista fisico non avrebbe senso, sia per l'approssimazione tipica dell'errore, sia perché sono state fatte le approssimazioni su $R_{\mathcal{E}_0}$ e su R_{pot}.

3. Per risolvere il circuito conviene indicare con un solo simbolo l'impedenza risultante su ogni ramo: $Z_1 = R_1 + j\omega L$, $Z_2 = R_2 + 1/(j\omega C)$, $Z_3 = R_3$. Si calcola il circuito equivalente di Thévenin della maglia esterna, visto dai due capi di Z_3, che consideriamo staccata. Se consideriamo una corrente $\mathcal{I}_1$ complessa che percorre la maglia in senso orario, la tensione equivalente complessa è data da

$$\mathcal{V}_{eq} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{I}_1 Z_1 \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2}{Z_1 + Z_2} \tag{3.1}$$

L'impedenza equivalente di Thévenin è il parallelo di Z_1 e Z_2

$$Z_{eq} = \frac{Z_1\, Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{3.2}$$

Svolgendo i calcoli della (3.1) si ottiene

$$\mathcal{V}_{eq} = \frac{\mathcal{V}_1 Z_2 + \mathcal{V}_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{3.3}$$

La corrente $\mathcal{I}$ che attraversa Z_3 è data quindi da

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}_{eq}}{Z_{eq} + Z_3} = \frac{\mathcal{V}_1 Z_2 + \mathcal{V}_2 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_3(Z_1 + Z_2)} \tag{3.4}$$

Introcucendo ora i valori espliciti delle impedenze abbiamo

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}_1 \left(R_2 - \frac{j}{\omega C}\right) + \mathcal{V}_2 \left(R_1 + j\omega L\right)}{\left(R_1 + j\omega L\right)\left(R_2 - \frac{j}{\omega C}\right) + R_3 \left(R_1 + R_2 + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)} \tag{3.5}$$

A questa espressione della corrente complessa corrisponde una corrente reale

$$i = i_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{3.6}$$

di cui dobbiamo calcolare ampiezza e fase. Per fare questo introduciamo nella (3.5) le espressioni esplicite di $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$

$$\mathcal{V}_1 = V_{10}\, e^{j\omega t} \qquad \mathcal{V}_2 = V_{20}\, e^{j(\omega t + \varphi)} = V_{20}\, e^{j\omega t} \left(\cos\varphi + j \sin\varphi\right) \tag{3.7}$$

Inserendo le espressioni (3.7) nella (3.5), ponendo in evidenza $\exp(j\omega t)$ e separando al numeratore e al denominatore le parti reali e immaginarie abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{I} =& e^{j\omega t}\, \frac{\left[V_{10} R_2 + V_{20}(R_1 \cos\varphi - \omega L \sin\varphi)\right] + j\left[-V_{10}\frac{1}{\omega C} + V_{20}(R_1 \sin\varphi + \omega L \cos\varphi)\right]}{\left[R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 + \frac{L}{C}\right] + j\left[\omega L(R_2 + R_3) - \frac{1}{\omega C}(R_1 + R_3)\right]} = \\ =& e^{j\omega t}\, \frac{a + jb}{c + jd}\end{aligned} \tag{3.8}$$

A questo punto si possono calcolare i parametri della (3.6) dalle formule

$$i_0 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \qquad \phi = \arctan(a, b) - \arctan(c, d) \tag{3.9}$$

in cui si è usata la funzione $\arctan(x, y)$ che fornisce il risultato corretto su tutti e quattro i quadranti,[3] tenendo conto separatamente dei segni di x e y.

Passando ai valori numerici si ha

$$
\begin{aligned}
a &= 1\,\mathrm{V}\cdot 400\,\Omega + 2\,\mathrm{V}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 100\,\Omega - \frac{1}{2}\cdot 10^4\,\mathrm{rad}\cdot s^{-1}\ 10^{-1}\,\mathrm{H}\right) = \left(100\sqrt{3} - 600\right)\ \mathrm{V}\cdot\Omega \\
b &= -1\,\mathrm{V}\cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad}^{-1}\ \cdot \mathrm{s}\cdot 10^7\,\mathrm{F}^{-1} + 2\,\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}\cdot 100\,\Omega + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot 10^{-1}\,\mathrm{H}\right) = \\
&= \left(1000\sqrt{3} - 900\right)\ \mathrm{V}\cdot\Omega \\
c &= \left(4\cdot 10^4 + 5\cdot 10^4 + 20\cdot 10^4\right)\ \Omega^2 + \frac{10^{-1}\,\mathrm{H}}{10^{-7}\,\mathrm{F}} = 129\cdot 10^4\,\Omega^2 \\
d &= 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ \cdot 10^{-1}\ \mathrm{H}\cdot 9\cdot 10^2\,\Omega - \frac{6\cdot 10^2\,\Omega}{10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}} = 3\cdot 10^5\,\Omega^2
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Introducendo i valori nelle (3.9) si ha infine

$$
\begin{aligned}
i_0 &= \sqrt{\frac{\left(100\sqrt{3} - 600\right)^2\ \mathrm{V}^2\cdot\Omega^2 + \left(1000\sqrt{3} - 900\right)^2\ \mathrm{V}^2\cdot\Omega^2}{129^2\cdot 10^8\,\Omega^2 + 9\cdot 10^{10}\,\Omega^2}} = 0.7061\,\mathrm{mA} \\
\phi &= \arctan\left(100\sqrt{3} - 600\ ,\ 1000\sqrt{3} - 900\right) - \arctan\left(129\cdot 10^4\ ,\ 3\cdot 10^5\right) = 1.816\,\mathrm{rad}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Riguardo alla parte facoltativa, presentiamo qui di seguito la prima soluzione che era stata fornita, ma aggiungiamo una procedura alternativa, dovuta all'idea di uno studente, che permette di arrivare alla soluzione in modo molto più spedito ed elegante.

La condizione per cui $i = 0$ è quella per cui si annullano sia la parte reale che quella immaginaria del numeratore della (3.8). Scrivendo le parti in funzione di V_{10} e α e semplificando V_{10} si ottiene il sistema

$$
\begin{cases}
\alpha(R_1\cos\varphi - \omega L\sin\varphi) = -R_2 \\
\alpha(R_1\sin\varphi + \omega L\cos\varphi) = \frac{1}{\omega C}
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

Dividendo membro a membro le due equazioni e dividendo numeratore e denominatore del primo membro risultante per $\cos\varphi$ si ottiene[4]

$$
\frac{R_1 - \omega L\tan\varphi}{R_1\tan\varphi + \omega L} = -R_2\omega C \tag{3.13}
$$

[3] In pratica, si consiglia di ragionare come se si dovesse passare dalle coordinate cartesiane (a, b) alle rispettive coordinate polari (r, ϕ), di cui siamo interessati solo a ϕ.

[4] Nel fare la divisione escludiamo soluzioni del tipo $cos\,\varphi = 0$, ma è facile vedere che non ve ne sono. Infatti $cos\,\varphi = 0$ implica $sin\,\varphi = \pm 1$ e se sostituiamo questi valori nelle (3.12) vediamo che non producono soluzioni accettabili.

La (3.13) si risolve per $\tan\varphi$ e si ottiene

$$\tan\varphi = \frac{R_1 + R_2\omega^2 LC}{\omega L - R_1 R_2 \omega C} \tag{3.14}$$

Cercare di trovare analiticamente le soluzioni per φ e α implicherebbe calcoli algebrici molto tediosi e non porterebbe a formule particolarmente eleganti e significative. Per questo, una volta tanto conviene procedere a determinare il valore numerico di $\tan\varphi$ e da quello poi ricavare α. Inserendo i valori numerici nella (3.14) si ha

$$\tan\varphi = \frac{100\,\Omega + 400\,\Omega\cdot 10^8\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ \cdot 10^{-1}\,\mathrm{H}\cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}}{10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ \cdot 10^{-1}\,\mathrm{H} - 4\cdot 10^4\,\Omega^2\cdot 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}} = \frac{25}{48} \tag{3.15}$$

La (3.15) ammette per φ due diverse soluzioni: $\varphi = \arctan(25/48) = 0.4802\,\mathrm{rad}$ e $\varphi = \pi + \arctan(25/48) = 3.622\,\mathrm{rad}$ (o, se si preferisce considerare per φ l'ambito $(-\pi,\pi)$, equivalentemente $\varphi = -2.661\,\mathrm{rad}$). Possiamo tuttavia scartare la soluzione che cade nel terzo quadrante, dato che per tale valore di φ risulterebbero negativi sia $\sin\varphi$ che $\cos\varphi$ e la seconda equazione delle (3.12) darebbe come risultato un $\alpha < 0$. Con il valore di φ nel primo quadrante otteniamo per $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$

$$\sin\varphi = \frac{25}{\sqrt{25^2+48^2}} = \frac{25}{\sqrt{2929}} \qquad \cos\varphi = \frac{48}{\sqrt{25^2+48^2}} = \frac{48}{\sqrt{2929}} \tag{3.16}$$

Introducendo questi valori in una qualsiasi (nel nostro caso, la prima) delle (3.12) otteniamo α

$$\alpha = \frac{400\,\Omega}{10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ \cdot 10^{-1}\,\mathrm{H}\cdot\frac{25}{\sqrt{2929}} - 100\,\Omega\cdot\frac{48}{\sqrt{2929}}} = \frac{400\sqrt{2929}}{20200} = 2\sqrt{\frac{29}{101}} = 1.072 \tag{3.17}$$

Alternativamente, e in modo estremamente vantaggioso, si può considerare l'espressione (3.4) della corrente $\mathcal{I}$. Per annullare la corrente basta annullarne il numeratore, ponendo

$$\mathcal{V}_1 Z_2 + \mathcal{V}_2 Z_1 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = -\frac{Z_2}{Z_1} \tag{3.18}$$

Le quantità ai due membri della (3.18) sono numeri complessi che devono coincidere in modulo e in fase. Per il primo abbiamo

$$\left|\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1}\right| = \left|\frac{Z_2}{Z_1}\right| \qquad \text{ossia} \qquad \alpha = \frac{\left|R_2 - j\frac{1}{\omega C}\right|}{\left|R_1 + j\omega L\right|} \tag{3.19}$$

Per la fase[5]

$$\phi(\mathcal{V}_2) - \phi(\mathcal{V}_1) = \varphi = \pi + \arctan\left(R_2\ ,\ -\frac{1}{\omega C}\right) - \arctan\left(R_1\ ,\ \omega L\right) \tag{3.20}$$

[5] Si ricorda che un fattore moltiplicativo -1 non fa cambiare di segno la fase ma aggiunge ad essa π.

Passando ai valori numerici

$$\alpha = \sqrt{\frac{16 \cdot 10^4\,\Omega^2 + \left(\frac{1}{10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}}\right)^2}{10^4\,\Omega^2 + (10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot 10^{-1}\,\mathrm{H})^2}} = \sqrt{\frac{116}{101}} = 2\sqrt{\frac{29}{101}} \tag{3.21}$$

Per la fase, considerando i segni delle componenti x e y nelle funzioni arctan,

$$\begin{aligned}\varphi &= \pi - \arctan\left(\frac{1}{100\,\Omega \cdot 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}}\right) - \arctan\left(\frac{10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot 10^{-1}\,\mathrm{H}}{100\,\Omega}\right) = \\ &= \pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right) - \arctan(10) = 0.4802\end{aligned} \tag{3.22}$$

Anche in questo caso, come avviene spesso, è molto vantaggioso arrivare al risultato partendo dall'espressione più generale e specificando i particolari solo quando non è possibile andare avanti senza farlo.