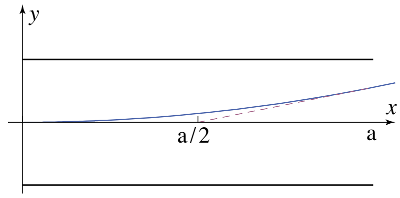
Esperimentazioni II A

SOLUZIONE del compito del 27 marzo 2008



A. Consideriamo un sistema di riferimento in cui l'asse x coincide con l'asse del tubo oscilloscopico e l'asse y è perpendicolare alle placchette di deflessione, con l'origine nel punto in cui il fascio di elettroni entra fra le placchette. Un elettrone del fascio che si trova fra le placchette è soggetto ad una forza $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$. Possiamo trascurare la densità di elettroni fra le placchette dovuta alla presenza del fascio e considerare che esse si comportano come un condensatore a facce piane e parallele, per cui, supponendo che fra la placchetta inferiore e quella superiore vi sia una differenza di potenziale V_d, avremo, nel nostro sistema di riferimento, $\mathbf{F} = (eV_d/w)\,\mathbf{j}$ dove w è la distanza fra le placchette. Possiamo allora scrivere le equazioni di moto di un elettrone che entra fra le placchette al tempo $t = 0$:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = \frac{eV_d}{w} \\ m\ddot{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{A.1}$$

Le equazioni si risolvono banalmente

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{eV_d}{wm} = \gamma \\ \ddot{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}(t) = \gamma\, t \\ \dot{x}(t) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(t) = \frac{1}{2}\gamma\, t^2 \\ x(t) = v_0\, t \end{cases} \tag{A.2}$$

Se t_1 è il momento in cui l'elettrone arriva all'uscita dalle placchette, la sua traiettoria per $t = t_1$ forma con l'asse x un angolo θ dato da

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}(t_1)}{\dot{x}(t_1)} \tag{A.3}$$

Se a è la lunghezza delle placchette, dalle (A.2) risulta immediatamente $t_1 = a/v_0$ e corrispondentemente

$$\tan\theta = \frac{\gamma\, t_1}{v_0} = \frac{\gamma\, a}{v_0^2} \tag{A.4}$$

Una volta uscito dalle placchette, l'elettrone procede in linea retta fino allo schermo.[1] La sua traiettoria si può calcolare utilizzando la nota formula di geometria analitica che esprime l'equazione di una retta passante per il punto (x_0, y_0) con coefficiente angolare β: $y - y_0 = \beta(x - x_0)$. Nel nostro caso

$$y - \frac{1}{2}\gamma\, t_1^2 = \frac{\gamma a}{v_0^2}(x - a) \qquad \text{da cui} \qquad y - \frac{1}{2}\gamma\, \frac{a^2}{v_0^2} = \frac{\gamma a}{v_0^2}(x - a) \tag{A.5}$$

La (A.5) rappresenta la traiettoria dell'elettrone quando $x > a$, ma se la prolunghiamo indietro osserviamo che la retta interseca l'asse delle x nel punto $x = a/2$. Quindi per il

[1] Nella nostra trattazione trascuriamo il fatto che il compo elettrico non cessa immediatamente appena all'esterno delle placchette.

calcolo della deflessione sullo schermo si deve considerare la distanza fra questo e il punto centrale delle placchette. Se introduciamo nella (A.4) il valore di γ della (A.2) otteniamo

$$\tan\theta = \frac{eV_d a}{wmv_0^2} = \frac{1}{2}\frac{a}{w}\frac{V_d}{V_a} \tag{A.6}$$

Nell'ultimo passaggio si è considerato il fatto che l'elettrone è stato accelerato da fermo fino alla velocità v_0 una differenza di potenziale V_a e quindi per la conservazione dell'energia meccanica $(1/2)mv_0^2 = e\,V_a$.[2]

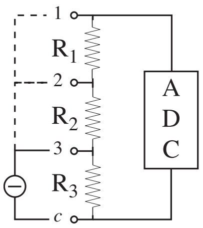
Nel nostro caso vogliamo avere un angolo di deflessione tale da spostare il fascetto di una distanza h sullo schermo che dista d dal centro delle placchette, ossia $\tan\theta = h/d$. Confrontando con la (A.6) si ha

$$\frac{1}{2}\frac{a}{w}\frac{V_d}{V_a} = \frac{h}{d} \qquad \text{da cui} \qquad a = 2\frac{h}{d}\frac{V_a}{V_d}w \tag{A.7}$$

Vogliamo infine determinare la frequenza del segnale di deflessione per cui il tempo di transito degli elettroni t_1 corrisponde a una frazione α del periodo. Dai risultati ottenuti abbiamo

$$t_1 = \frac{\alpha}{\nu} \qquad \nu = \frac{\alpha}{a}v_0 = \frac{\alpha}{a}\sqrt{\frac{2eV_a}{m}} \tag{A.8}$$

Inserendo nelle (A.7) e (A.8) i valori numerici si ottiene $a = 3.2\,\mathrm{cm}$ e $\nu = 82.88\,\mathrm{MHz}$.[3]



B. Nel nostro caso, con $i_1 < i_2 < i_3$, il condizionatore di segnale può essere costituito dal circuito in figura, dove i terminali di misura sono il comune c e 1, 2, o 3 a seconda della portata. Consideriamo il caso della portata maggiore, i_3. Se noi colleghiamo la corrente fra i terminali c e 3 e fissiamo il valore di R_3 in modo che $R_3 = V/i_3$ avremo che quando nello strumento entra una corrente i_3 l'ADC sarà al suo fondo-scala V. Questo avviene perché l'impedenza d'ingresso dell'ADC è talmente alta che si può trascurare la corrente che fluisce in R_2, R_1 e nell'ADC rispetto a quella che passa in R_3, e corrispondentemente la caduta di potenziale su R_2 e R_1 rispetto a quella sull'ADC, che perciò eguaglia quella su R_3. Per la portata i_2 ci collegheremo al terminale 2 e porremo $R_2 + R_3 = V/i_2$; in questo caso una corrente i_2 fluente in R_2 e R_3 manderà l'ADC a fondo-scala, dato che valgono ancora le considerazioni fatte sopra. Per la portata i_1 ci collegheremo al terminale 1 e porremo $R_1 + R_2 + R_3 = V/i_1$. Con i valori numerici dati abbiamo $R_3 = 10\,\Omega$, $R_2 = 90\,\Omega$, $R_1 = 900\,\Omega$.

1. L'amplificatore operazionale è montato in configurazione invertente e il suo coefficiente di amplificazione reazionato, che costituisce la funzione di trasferimento del filtro, vale

$$A_f = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{1}{\frac{Z1}{Z2}} \tag{1.1}$$

[2] Il potenziale acceleratore di un oscilloscopio è abbastanza basso da poter trattare il fenomeno con la meccanica classica, senza bisogno di correzioni relativistiche.

[3] Diamo i risultati numerici con 4 cifre significative, indipendentemente da quello che sarebbe corretto nella prassi fisica, per un confronto più accurato dei calcoli. Valori riportati con meno di 4 cifre sono da considerarsi esatti.

dove $Z_1 = R_1$ e Z_2 è dato dal parallelo di R_2 e C. Proprio per questo motivo abbiamo scritto la (1.1) in una forma che contiente $1/Z_2$. Abbiamo

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + j\,\omega C \tag{1.2}$$

A_f perciò vale

$$A_f = -\frac{1}{R_1\left(\frac{1}{R_2} + j\,\omega C\right)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + j\,\omega R_2 C} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}} \tag{1.3}$$

dove nell'ultimo passaggio si è posto $\nu_c = (2\pi R_2 C)^{-1}$. Il filtro ha quindi la stessa dipendenza dalla frequenza di un filtro passa–basso, ma in più inverte il segnale e lo moltiplica per il rapporto R_2/R_1 così che l'ampiezza di trasmissione può essere maggiore di 0 dB. Essa è data da

$$|A_f| = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2}} \tag{1.4}$$

Cerchiamo la frequenza per cui l'ampiezza di trasmissione in dB vale β dB, con $\beta < 0$:

$$20\,\log_{10}|A_f| = \beta \qquad \text{da cui} \qquad |A_f| = 10^{\beta/20} \tag{1.5}$$

Sostituendo nella (1.5) il valore di $|A_f|$ ricavato dalla (1.4) e risolvendo per ν troviamo come unica radice positiva

$$\nu = \nu_c\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 10^{-(\beta/10)} - 1} \tag{1.6}$$

Per conoscere la prima armonica del segnale con fondamentale pari a 1 KHz che supera ν_c dobbiamo procedere al calcolo numerico. Si ha $\nu_c = 1.592\,\text{KHz}$. Per ν abbiamo

$$\nu = \nu_c\sqrt{100\sqrt{10} - 1} = 28.26\,\text{KHz} \tag{1.7}$$

Quindi la prima armonica del nostro segnale che è attenuata più di β in dB è la 29^a. L'attenuazione si calcola ponendo $\nu = 29\,\text{KHz}$ nella (1.4) e vale $|A_f|_{\text{dB}} = -5.225\,\text{dB}$.

2. L'impedenza vista fra i punti a e b è la somma delle impedenze di R_1, L e del parallelo Z_p fra R_2 e C. Per Z_p abbiamo

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R_2} + j\,\omega C \qquad \text{da cui} \qquad Z_p = \frac{R_2}{1 + j\,\omega R_2 C} \tag{2.1}$$

Perciò

$$Z_{ab} = R_1 + j\,\omega L + \frac{R_2}{1 + j\,\omega R_2 C} = \frac{R_1 + R_2 - \omega^2 LC + j\,\omega(L + R_1 R_2 C)}{1 + j\,\omega R_2 C} \tag{2.2}$$

Avere scritto Z_{ab} come il rapporto di due numeri complessi facilita la ricerca dell'eventuale valore di ω per cui risulta reale. Questo infatti avverrà quando la fase del numeratore eguaglierà quella del denominatore. Le due fasi sono date dall'arctangente corrispondente all'angolo formato con l'asse reale da un vettore nel piano complesso avente come componenti la parte reale e quella immaginaria del numero. Se calcolassimo le due funzioni arctangente semplicemente dal rapporto fra la parte immaginaria e quella reale potremmo in generale non determinare valori corretti della fase, dato che $\arctan(x)$ è definito per $-\pi/2 < x < \pi/2$, mentre la fase è definita su tutti e 4 i quadranti dell'angolo giro. Tuttavia possiamo vedere che nel caso specifico non sussiste questo problema: infatti la parte immaginaria e reale del denominatore sono sempre positive (siamo interessati a $\omega > 0$) e rappresentano quindi un angolo nel primo quadrante. La parte immaginaria del numeratore è pure sempre positiva, quindi le due fasi potranno eguagliarsi solo per valori positivi della parte reale del numeratore. In questa situazione possiamo scrivere la fase come $\phi(z) = \arctan[\mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z)]$ e le due fasi saranno uguali solo se saranno uguali gli argomenti, per cui si dovrà avere

$$\frac{\omega(L + R_1 R_2 C)}{R_1 + R_2 - \omega^2 R_2 LC} = \omega R_2 C \tag{2.3}$$

Le soluzioni della (2.3) sono

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R_2^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ \sqrt{1 - \frac{L}{R_2^2 C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ \sqrt{1 - Q_{02}^2} \end{cases} \tag{2.4}$$

La prima radice rispecchia il fatto che per $\omega = 0$ $Z_{ab} = R_1 + R_2$, reale, ma non corrisponde a una risonanza. La seconda radice contiene il termine Q_{02}, il fattore di merito di un circuito risonante formato da L, C e R_2, ed esiste reale solo se $Q_{02} < 1$. La condizione per la risonanza è data dunque da

$$\frac{L}{R_2^2 C} < 1 \qquad \text{ossia} \qquad R_2 > R_{2m} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.5}$$

Abbiamo quindi determinato il valore minimo di R_2 per la risonanza. In termini di R_{2m} possiamo riscrivere la soluzione della (2.4) come

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ \sqrt{1 - \left(\frac{R_{2m}}{R_2}\right)^2} \tag{2.6}$$

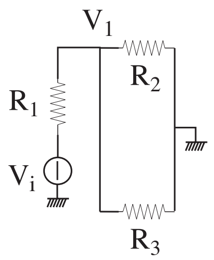
Vogliamo determinare adesso il valore (reale) Z_r di Z_{ab} alla risonanza. Per semplificare i calcoli, operiamo come nel caso del circuito risonante parallelo: scriviamo la 2.2 come

$$Z_{ab} = (R_1 + R_2 - \omega^2 LC) \frac{1 + \frac{j\,\omega(L + R_1 R_2 C)}{R_1 + R_2 - \omega^2 LC}}{1 + j\,\omega R_2 C} \tag{2.7}$$

Il primo termine, in parentesi tonde, è reale; alla risonanza numeratore e denominatore della frazione che lo segue dovranno avere la stessa fase. Dato che le parti reali sono entrambe uguali a 1, l'uguaglianza delle fasi implica l'uguaglianza delle parti immaginarie, ma in questo caso la frazione vale 1, per cui Z_r si riduce a

$$Z_r = R_1 + R_2 - \omega_r^2 LC = R_1 + \frac{L}{R_2 C} = R_1 + R_2\, Q_{02}^2 = R_1 + \frac{R_{2m}^2}{R_2} \tag{2.8}$$

Si noti che per $R_2 \to \infty$ le espressioni (2.6) di ω_r e (2.8) di Z_r tendono ai valori di un normale circuito risonante serie formato da L, C e R_1, come era ovvio aspettarsi. Inserendo i valori numerici si ottiene $R_{2m} = 353.6\,\Omega$, $\nu_r(R_2 = 2R_{2m}) = 1.949\,\mathrm{KHz}$, $Z_r(R_2 = 2R_{2m}) = 181.8\,\Omega$.

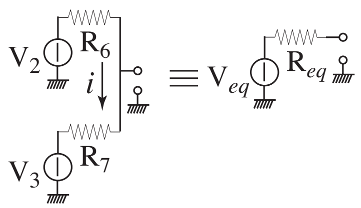


3. Il primo passo nella risoluzione consiste nel determinare la tensione V_1 nel punto a valle di R_1 rispetto al generatore. Dato che i terminali negativi dei due operazionali corrispondono alle masse virtuali, il circuito equivalente visto dal generatore è quello in figura, e V_1 si calcola banalmente con la regola del partitore

$$V_1 = V_i \,\frac{\frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}} = V_i \,\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{3.1}$$

Fatto ciò si possono calcolare le tensioni V_2 e V_3 all'uscita dei due amplificatori aventi rispettivamente le resistenze R_4 e R_5 in reazione. L'impedenza d'uscita reazionata dei medesimi si può trascurare rispetto alle resistenze R_6 e R_7.

$$\begin{aligned} V_2 = -V_1\,\tfrac{R_4}{R_2} &= -V_i\,\tfrac{R_3 R_4}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ V_3 = -V_1\,\tfrac{R_5}{R_3} &= -V_i\,\tfrac{R_2 R_5}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \end{aligned} \tag{3.2}$$



Per risolvere il circuito restante si possono usare due metodi. Uno consiste nel determinare il circuito equivalente di Thévenin visto fra l'estremo sinistro di R_8 e il riferimento comune. Se consideriamo nella maglia una corrente i orientata nominalmente come in figura avremo

$$i = \frac{V_2 - V_3}{R_6 + R_7} \qquad V_{eq} = V_3 + i\,R_7 = \frac{V_2 R_7 + V_3 R_6}{R_6 + R_7} \tag{3.3}$$

La resistenza equivalente è data semplicemente dal parallelo di R_6 e R_7:

$$R_{eq} = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} \tag{3.4}$$

A questo punto la tensione V_{eq} risulta applicata all'ingresso negativo dell'ultimo stadio, in configurazione invertente, attraverso una resistenza $R_{eq} + R_8$ e si ha

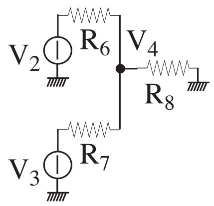
$$V_o = -V_{eq}\,\frac{R_9}{R_8 + R_{eq}} = -\frac{V_2 R_7 + V_3 R_6}{R_6 + R_7}\,\frac{R_9}{R_8 + \frac{R_6 R_7}{R_6+R_7}} = -\frac{(V_2 R_7 + V_3 R_6) R_9}{R_6 R_7 + R_7 R_8 + R_8 R_6} \tag{3.5}$$

Sostituendo nella (3.5) i valori di V_2 e V_3 trovati nella (3.2) si ottiene

$$A = \frac{V_o}{V_i} = \frac{(R_3R_4R_7 + R_2R_5R_6)R_9}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)(R_6R_7 + R_7R_8 + R_8R_6)} \tag{3.6}$$

È conveniente affrontare il calcolo numerico senza usare la calcolatrice tascabile, almeno finché è possibile operare con numeri razionali in forma di frazioni con numeratore e denominatore non troppo grandi. Dato che tutte le resistenze sono date in KΩ e la consistenza dimensionale dell'espressione si verifica a vista, possiamo rilassare lievemente, senza peraltro perdere di rigore, l'apposizione delle unità di misura

$$A = \frac{(2\cdot 5\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 3)\cdot 10\,(\mathrm{K}\Omega)^4}{(1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1)\cdot(3\cdot 1 + 1\cdot 5 + 5\cdot 3)\,(\mathrm{K}\Omega)^4} = \frac{22\cdot 10}{5\cdot 23} = \frac{44}{23} = 1.913 \tag{3.7}$$



Un metodo alternativo consiste nel calcolare la tensione V_4 nel punto immediatamente a sinistra di R_8, quando è connesso il circuito d'ingresso dell'ultimo stadio, e quindi sfruttando il fatto che l'estremo destro di R_8 si trova a massa virtuale. Questo calcolo si svolge "a vista" utilizzando il principio di sovrapposizizone, ossia sommando i contributi a V_4 che si ottengono sostituendo prima V_3 e poi V_2 con un corto circuito. Quando eliminiamo V_3, ad esempio, il circuito si riduce ad un partitore avente come elementi R_6 e il parallelo di R_7 con R_8; un partitore analogo si ottiene eliminando V_2. Si ha dunque

$$V_4 = \frac{V_2\,\frac{R_7R_8}{R_7+R_8}}{R_6 + \frac{R_7R_8}{R_7+R_8}} + \frac{V_3\,\frac{R_6R_8}{R_6+R_8}}{R_7 + \frac{R_6R_8}{R_6+R_8}} = \frac{(V_2R_7 + V_3R_6)\,R_8}{R_6R_7 + R_7R_8 + R_8R_6} \tag{3.8}$$

Dato che V_4 è l'effettiva tensione presente a monte di R_8 quando il circuito è in funzione, V_o risulta semplicemente

$$V_o = -V_4\,\frac{R_9}{R_8} = -\frac{(V_2R_7 + V_3R_6)\,R_9}{R_6R_7 + R_7R_8 + R_8R_6} \tag{3.9}$$

che è identica alla (3.5).