Esperimentazioni di Fisica II B

SOLUZIONE del compito del 4 aprile 2005

A. Possiamo determinare il circuito equivalente visto dalla resistenza R_3. La tensione equivalente V_{eq} si determina come la somma della tensione V_2 e della partizione su R_2 della differenza di potenziale $V_1 - V_2$. La resistenza equivalente è semplicemente il parallelo di R_1 e R_2:

$$V_{eq} = V_2 + \frac{(V_1 - V_2)R_2}{R_1 + R_2} = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{A.1}$$

Abbiamo quindi un circuito equivalente in cui la forza elettromotrice V_{eq} si chiude sulla serie di R_{eq} e R_3. A questo punto potrebbero sorgere dubbi sul fatto se sia corretto applicare il teorema di Thevenin per calcolare una grandezza non lineare come la potenza dissipata su R_3, ma dobbiamo considerare che esso ci permette di calcolare correttamente sia la tensione che la caduta di potenziale ai capi della resistenza, e quindi anche, di conseguenza, la potenza dissipata. Sarebbe invece sbagliato usare il circuito equivalente per calcolare la potenza dissipata su R_1 e R_2. Per rendersene conto basta considerare che, se stacchiamo R_3, nel circuito equivalente la potenza dissipata è nulla, mentre nel circuito reale, a meno che non sia $V_1 = V_2$, si ha una dissipazione di potenza. Se quindi possiamo utilizzare il circuito equivalente per determinare la potenza dissipata su R_3, le condizioni sono quelle note del problema della massima dissipazione su un carico esterno, e possiamo dire immediatamente che avremo la massima dissipazione quando $R_3 = R_{eq}$. In queste condizioni la caduta su R_3 vale $V_{eq}/2$ e quindi è immediato calcolare la potenza richiesta

$$W_3 = \frac{V_{eq}^2}{4R_{eq}} = \frac{(V_2 R_1 + V_1 R_2)^2}{4(R_1 + R_2)R_1 R_2} \tag{A.2}$$

Introducendo i valori numerici si trova immediatamente[1]:

$$R_3 = 666.7\,\Omega \qquad W_3 = 0.02344\,\mathrm{J} \tag{A.3}$$

B. Nel caso che si usi il galvanometro, possiamo determinare il circuito equivalente della misura potenziometrica come costituito da una singola maglia che contiene il generatore equivalente del divisore, $\mathcal{E}_p$, la sua resistenza d'uscita R_p, il galvanometro con la sua resistenza in serie R_g, la resistenza R_x e la forza elettromotrice incognita $\mathcal{E}_x$, in opposizione a quella del potenziometro. In generale nel circuito scorrerà una corrente

$$i = \frac{\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p}{R_p + R_g + R_x} \tag{B.1}$$

[1] Daremo tutti i risultati numerici con 4 cifre significative indipendentemente da considerazioni legate all'errore, per consentire un confronto più preciso dei calcoli.

Dato che il galvanometro distingue da zero una corrente minima i_g, avremo un errore di sensibilità pari a

$$\Delta\mathcal{E}_x = i_g(R_p + R_g + R_x) \tag{B.2}$$

Se consideriamo i valori delle resistenze, vediamo immediatamente che R_p e R_g sono trascurabili rispetto a R_x. Introducendo i valori numerici abbiamo:

$$\Delta\mathcal{E}_x = 0.5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{A}\ \cdot 5 \cdot 10^{7}\,\Omega = 25\,\mathrm{mV} \tag{B.3}$$

Nel caso del voltmetro il circuito equivalente includerà, invece del galvanometro, il misuratore di tensione con la sua resistenza R_v in parallelo. Il circuito è un partitore di tensione, per cui la caduta sul voltmetro risulta pari a

$$V = \frac{(\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p)R_v}{R_p + R_v + R_x} \tag{B.4}$$

Se la minima tensione leggibile sul voltmetro è V_m, avremo un errore di sensibilità

$$\Delta\mathcal{E}_x = \frac{V_m(R_p + R_v + R_x)}{R_v} \tag{B.5}$$

Anche in questo caso R_x prevale su R_p, per cui avremo

$$\Delta\mathcal{E}_x = 5.\cdot 10^{-5}\,\mathrm{V} \cdot \frac{60\,\mathrm{M\Omega}}{10\,\mathrm{M\Omega}} = 0.3\,\mathrm{mV} \tag{B.6}$$

1. Ciascun elemento, costituito da un filtro passa–basso, ha la stessa funzione di trasferimento:

$$A_e = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}} \qquad \text{dove} \qquad fc = \frac{1}{2\pi RC} \tag{1.1}$$

L'adattatore di impedenza fa sì che la funzione di trasferimento del filtro completo sia il prodotto delle due:

$$A = \frac{1}{\left(1 + j\frac{f}{f_c}\right)^2} \qquad |A| = \frac{1}{1 + \frac{f^2}{f_c^2}} \tag{1.2}$$

Il filtro che ne deriva è ancora un passa–basso ma per $f = f_c$ attenua di 6 dB ed ha una pendenza di $-12\,\mathrm{dB}/8^a$. Valutiamo la frequenza per cui la trasmissione vale $-x$ dB. Avremo

$$20\log_{10} A = -\frac{x}{20} \qquad \text{da cui} \qquad f = f_c\sqrt{10^{\frac{x}{20}} - 1} \tag{1.3}$$

La frequenza corrispondente a -15 dB vale $f_{-15} = 3422.\,\mathrm{Hz}$. Le armoniche dell'onda quadra che inviamo al filtro sono a frequenze multiple di 500 Hz e quindi la più bassa ad essere attenuata di 15 dB o più è la settima, a 3500 Hz. L'attenuazione rispettiva è di 15.32 dB. Ovviamente, tutte le armoniche successive sono attenuate in misura maggiore.

2. Il modulo dell'impedenza del circuito risonante serie vale, come è noto:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{2.1}$$

Se ω_1 è la pulsazione alla risonanza, avremo:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC} \tag{2.2}$$

Se ω_2 è la pulsazione per cui il modulo dell'impedenza vale αR (con $\alpha > 1$), sarà

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2} = \alpha R \qquad \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2 = (\alpha^2 - 1)R^2 \tag{2.3}$$

A questo punto sarebbe forte la tentazione di risolvere la (2.3) per ricavare i valori di ω_2. Ma noi conosciamo il valore di ω_2 e il nostro scopo è invece di valutare L e C. Dato che $\omega_2 > \omega_1$, possiamo prendere le radici quadrate ad entrambi i membri dell'equazione quadratica in (2.3) e eguagliarle con il segno "+". L'equazione con il segno "−" si riferirebbe all'altra pulsazione per cui l'impedenza ha lo stesso valore, al di sotto della risonanza. Quindi se prendiamo le radici quadrate e sostituiamo nell'equazione il valore di C ricavato dalla (2.2) abbiamo

$$\omega_2 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}R}{L} \qquad \text{da cui} \qquad L = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}R\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \tag{2.4}$$

Mettendo il valore di L della (2.4) nella (2.2) abbiamo

$$C = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}R\omega_2\omega_1^2} \tag{2.5}$$

Ponendo $\alpha = 2$ e passando alle frequenze, otteniamo le formule risolutive

$$L = \frac{\sqrt{3}R}{2\pi}\,\frac{\nu_2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \qquad C = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}R}\,\frac{\nu_2^2 - \nu_1^2}{\nu_2\nu_1^2} \tag{2.6}$$

Il calcolo della propagazione dell'errore può essere fatto col metodo della derivata logaritmica e si ottiene

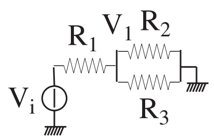
$$\begin{aligned}\frac{\Delta L}{L} &= \frac{\Delta R}{R} + \left|\frac{2\nu_1^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\right| \frac{\Delta\nu_1}{\nu_1} + \left|\frac{\nu_2^2 + \nu_1^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\right| \frac{\Delta\nu_2}{\nu_2} \\ \frac{\Delta C}{C} &= \frac{\Delta R}{R} + \left|\frac{2\nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\right| \frac{\Delta\nu_1}{\nu_1} + \left|\frac{\nu_2^2 + \nu_1^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\right| \frac{\Delta\nu_2}{\nu_2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

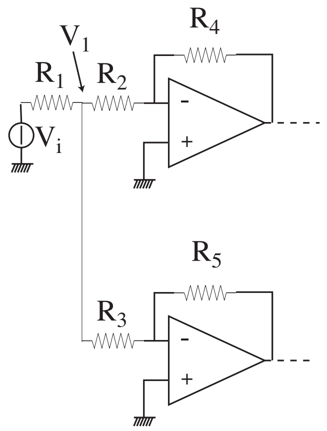
Introducendo i valori numerici abbiamo

$$\begin{aligned} L &= (19.98 \pm 4.205)\,\mathrm{mH} & \tfrac{\Delta L}{L} &= 21.05\% \\ C &= (0.1001 \pm 0.02113)\,\mu\mathrm{F} & \tfrac{\Delta C}{C} &= 21.11\% \end{aligned} \tag{2.8}$$

In approssimazione fisicamente corretta $L = (20 \pm 4)\,\mathrm{mH}$, $C = (0.10 \pm 0.02)\,\mu\mathrm{F}$.

3.





Come prima cosa calcoliamo la tensione V_1 a valle della resistenza R_1. Dato che le resistenze R_2 e R_3 hanno un capo alla massa virtuale dei rispettivi operazionali, il generatore V_i si trova chiuso su un circuito equivalente costituito dalla serie di R_1 con R_p, parallelo di R_2 e R_3. La tensione V_1 si calcola quindi facilmente utilizzando la formula del partitore

$$R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \qquad V_1 = V_i \frac{R_p}{R_p + R_1} \tag{3.1}$$

Calcoliamo adesso il circuito equivalente visto fra l'uscita dell'amplificatore che ha R_4 in reazione e il riferimento comune. La tensione equivalente sarà

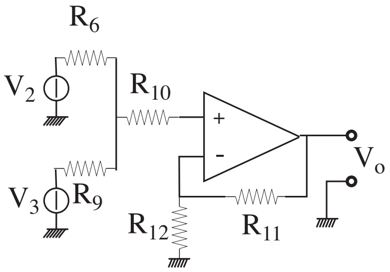
$$V_2 = -V_1 \frac{R_4}{R_2} \tag{3.2}$$

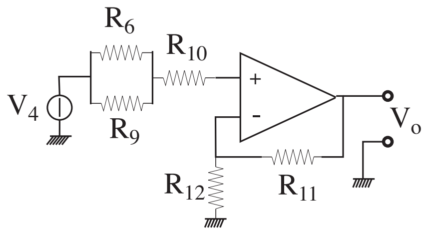
l'impedenza equivalente è quella dell'amplificatore reazionato, che sappiamo essere molto più piccola delle altre resistenze del circuito e quindi possiamo considerarla trascurabile. Allo stesso modo calcoliamo il circuito equivalente all'uscita dell'amplificatore che ha R_8 in reazione. La resistenza equivalente sarà trascurabile, mentre la tensione V_3 sarà V_1 moltiplicata per il prodotto dei due stadi di amplificazione che si trovano uno dietro l'altro:

$$V_3 = V_1 \frac{R_5 R_8}{R_3 R_7} \tag{3.3}$$

Calcoliamo ora il circuito equivalente che si vede dal capo di R_{10} opposto a quello che va all'ingresso dell'ultimo stadio. Il circuito è equivalente a quello dell'esercizio **A** e si risolve allo stesso modo. Risulta un generatore V_4

$$V_4 = \frac{V_2 R_9 + V_3 R_6}{R_6 + R_9} \tag{3.4}$$





con una resistenza equivalente pari al parallelo di R_6 e R_9. L'ultimo stadio di amplificazione è in configurazione non invertente e quindi la sua resistenza d'ingresso è svariati ordini di grandezza superiore a R_{10} più il parallelo di R_6 e R_9. Questo significa che nel calcolare V_o possiamo pensare V_4 applicata direttamente all'ingresso "+" dell'amplificatore. Avremo

$$V_0 = V_4 \frac{R_{11} + R_{12}}{R_{12}} \tag{3.5}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo

$$V_o = V_i \frac{R_p}{R_p + R_1} \cdot \frac{\frac{R_5 R_8 R_6}{R_3 R_7} - \frac{R_4 R_9}{R_2}}{R_6 + R_9} \cdot \frac{R_{11} + R_{12}}{R_{12}} \tag{3.6}$$

Dato che i valori delle resistenze sono tutti numeri "semplici", dopo aver verificato la correttezza dimensionale della (3.6) possiamo effettuare il calcolo numerico anche senza bisogno della calcolatrice:

$$V_o = 2\,\mathrm{V} \frac{\frac{4}{5}\,\mathrm{K\Omega}}{\left(\frac{5}{2} + \frac{4}{5}\right)\,\mathrm{K\Omega}} \cdot \frac{\frac{20 \cdot 1 \cdot 2\,\mathrm{K\Omega}^3}{4 \cdot 1\,\mathrm{K\Omega}^2} - \frac{4 \cdot 1\,\mathrm{K\Omega}^2}{1\,\mathrm{K\Omega}}}{(2+1)\,\mathrm{K\Omega}} \cdot \frac{10\,\mathrm{K\Omega}}{2\,\mathrm{K\Omega}} = 2 \cdot \frac{80}{33}\,\mathrm{V} = 4.848\,\mathrm{V} \tag{3.7}$$