Esperimentazioni di Fisica II B

SOLUZIONE del compito del 16 aprile 2004

1. Il coefficiente di amplificazione reazionata è dato dall'espressione

$$A_f = \frac{A}{1 + A\beta} \qquad \text{dove} \qquad \beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{1.1}$$

Ovviamente

$$\frac{1}{A_f}\frac{dA_f}{dT} = \frac{1}{A_f}\left[\frac{\partial A_f}{\partial A}\frac{dA}{dT} + \frac{\partial A_f}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dT}\right] \tag{1.2}$$

Va immediatamente notato che, se le due resistenze hanno lo stesso coefficiente di temperatura, il fattore β, essendo un rapporto, non varia e quindi l'unica variazione che si ripercuote su A_f è quella di A. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\frac{1}{A_f}\frac{dA_f}{dT} = \frac{1}{A_f}\frac{1}{(1 + A\beta)^2}\frac{dA}{dT} = \frac{1}{1 + A\beta}\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} \tag{1.3}$$

Nel nostro caso $\beta = 1/10$ e quindi $\frac{1}{A_f}\frac{dA_f}{dT} = 2 \cdot 10^{-4}$ % $\cdot{}^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

2. Per un circuito risonante serie abbiamo

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad \phi_Z = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{2.1}$$

Considerando l'espressione della frequenza di risonanza e quella che si ottiene eguagliando ϕ_Z a $\frac{\pi}{4}$ si ha:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \tag{2.2}$$

La seconda espressione si riconduce ad una equazione di secondo grado in ω_2 con una sola soluzione positiva:

$$L\omega_2^2 - R\omega_2 - \frac{1}{C} = 0 \qquad \omega_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L} \tag{2.3}$$

Per determinare L conviene comunque elevare al quadrato la prima delle 2.2, ricavare C e sostituirlo nella seconda. Si ottiene immediatamente:

$$L = \frac{R\,\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{R\,\nu_2}{2\pi\,(\nu_2^2 - \nu_1^2)} \tag{2.4}$$

Sostituendo il valore di L nella prima delle 2.2 si ricava C, mentre Q_0 si ottiene dalla sua espressione:

$$C = \frac{\nu_2^2 - \nu_1^2}{2\pi R \nu_1^2 \nu_2} \qquad Q_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \tag{2.5}$$

Le espressioni degli errori si trovano facilmente a partire dalle derivate parziali

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial R} &= \frac{L}{R} \\
\frac{\partial L}{\partial \nu_1} &= \frac{2\nu_1 \nu_2 R}{2\pi \left(\nu_2^2 - \nu_1^2\right)^2} \\
\frac{\partial L}{\partial \nu_2} &= \frac{-R\left(\nu_2^2 + \nu_1^2\right)}{2\pi \left(\nu_2^2 - \nu_1^2\right)^2} \\
\frac{\partial C}{\partial R} &= -\frac{C}{R} \\
\frac{\partial C}{\partial \nu_1} &= -\frac{\nu_2}{\pi R \nu_1^3} \\
\frac{\partial C}{\partial \nu_2} &= \frac{\nu_2^2 + \nu_1^2}{2\pi R \nu_1^2 \nu_2^2} \\
\frac{\partial Q_0}{\partial \nu_1} &= \frac{\nu_2(\nu_2^2 + \nu_1^2)}{\left(\nu_2^2 - \nu_1^2\right)^2} \\
\frac{\partial Q_0}{\partial \nu_2} &= -\frac{\nu_1(\nu_2^2 + \nu_1^2)}{\left(\nu_2^2 - \nu_1^2\right)^2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta L}{L} &= \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\nu_1^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\frac{\Delta \nu_1}{\nu_1} + \frac{\nu_2^2 + \nu_1^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\frac{\Delta \nu_2}{\nu_2} \\
\frac{\Delta C}{C} &= \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\frac{\Delta \nu_1}{\nu_1} + \frac{\nu_2^2 + \nu_1^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\frac{\Delta \nu_2}{\nu_2} \\
\frac{\Delta Q_0}{Q_0} &= \frac{\nu_2^2 + \nu_1^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\left(\frac{\Delta \nu_1}{\nu_1} + \frac{\Delta \nu_2}{\nu_2}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

I rispettivi risultati numerici sono:

$$\frac{\Delta L}{L} = 4.45\% \qquad \frac{\Delta C}{C} = 4.53\% \qquad \frac{\Delta Q_0}{Q_0} = 2.49\% \tag{2.8}$$

3. Per velocizzare la prima parte dei calcoli indicheremo $Z_1 = R_1$, $Z_2 = Z_{C_1}$, $Z_3 = Z_{C_2}$, $Z_4 = R_2$. Se applichiamo una tensione V_i all'ingresso del filtro, il circuito equivalente visto dall'ingresso del secondo stadio, il passa–alto, risulta costituito da un generatore e da una impedenza equivalenti rispettivamente uguali a:

$$V_{eq} = V_i \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{3.1}$$

All'uscita del filtro, ai capi di R_2, avremo quindi una tensione pari a

$$V_o = \frac{V_{eq} Z_4}{Z_{eq} + Z_3 + Z_4} = \frac{V_i Z_2 Z_4}{Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)} \tag{3.2}$$

A questo punto introduciamo i valori delle impedenze e calcoliamo $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \frac{\frac{R_2}{j\omega C_1}}{\frac{R_1}{j\omega C_1} + \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2\,(1 + j\omega R_1 C_1)\left(1 + \frac{1}{j\omega R_2 C_2}\right)} \tag{3.3}$$

Con la consueta sostituzione $\nu_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$, $\nu_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$ e opportuni passaggi, si arriva all'espressione

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{\nu_2}{\nu_1} + j\left(\frac{\nu}{\nu_1} - \frac{\nu_2}{\nu}\right)} \tag{3.4}$$

Corrispondentemente

$$|\mathcal{A}| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right]^2 + \left(\frac{\nu}{\nu_1} - \frac{\nu_2}{\nu}\right)^2}} \tag{3.5}$$

Il valore massimo di $|\mathcal{A}|$ corrisponde al valore minimo del denominatore. Delle due espressioni al quadrato sotto radice, la prima è costante, mentre la seconda dipende dalla frequenza. Trattandosi di un quadrato, il minimo valore possibile è 0, e viene raggiunto per

$$\nu_M = \sqrt{\nu_1 \nu_2} \qquad |\mathcal{A}_M| = A_M = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{\nu_2}{\nu_1}} = \frac{1}{\gamma} \tag{3.6}$$

dove con γ abbiamo indicato la costante al denominatore di A_M. Per trovare le frequenze per cui $|\mathcal{A}|$ si riduce di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto a A_M imponiamo che il quadrato del denominatore della 3.5 raddoppi rispetto al suo valore minimo

$$\gamma^2 + \left(\frac{\nu}{\nu_1} - \frac{\nu_2}{\nu}\right)^2 = 2\gamma^2 \tag{3.7}$$

Si ricava un'equazione dove entrambi i membri sono al quadrato, le cui soluzioni corrispondono a

$$\frac{\nu}{\nu_1} - \frac{\nu_2}{\nu} = \pm\gamma \qquad \text{da cui} \qquad \nu^2 \mp \gamma \nu_1 \nu - \nu_1 \nu_2 = 0 \tag{3.8}$$

Ciascuna delle due equazioni di secondo grado che si ottengono prendendo i due segni del termine in ν ha una radice positiva e una negativa. Solo le due radici positive hanno significato fisico, e corrispondono alle frequenze cercate:

$$\nu_{c1} = \frac{\sqrt{\gamma^2 \nu_1^2 + 4\nu_1\nu_2} - \gamma\nu_1}{2} \qquad \nu_{c2} = \frac{\sqrt{\gamma^2 \nu_1^2 + 4\nu_1\nu_2} + \gamma\nu_1}{2} \tag{3.9}$$

I risultati numerici si ottengono facilmente considerando che $\nu_1 = 15.92\,\mathrm{kHz}$, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{100}$, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{10}$, $\gamma = \frac{111}{100}$, $\nu_1\nu_2 = \frac{\nu_1^2}{100}$ per cui le soluzioni in 3.9 valgono:

$$\nu_{c1 \div 2} = \frac{\nu_1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{111}{100}\right)^2 + \frac{4}{100}} \mp \frac{111}{100} \right)$$

da cui $\nu_M = 1.592\,\mathrm{kHz}$, $|\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|_{[\mathrm{dB}]} = -0.907\,\mathrm{dB}$, $\nu_{c1} = 142.2\,\mathrm{Hz}$, $\nu_{c2} = 17.81\,\mathrm{kHz}$.