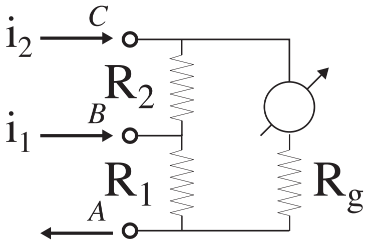
Esperimentazioni di Fisica II B

SOLUZIONE del compito del 15 aprile 2005



A. Lo schema classico di uno shunt a due portate è quello indicato in figura, dove la corrente maggiore, i_1, entra dal terminale B, la corrente minore, i_2, dal terminale C e A è il terminale comune. Noi vogliamo che quando all'esterno circola la corrente di f.s. la corrente nel ramo dello strumento sia i_g. Imponendo questa condizione per i due casi abbiamo un sistema:

$$\begin{cases} i_g = \dfrac{i_1 R_1}{R_1 + R_2 + R_g} \\ i_g = \dfrac{i_2(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_g} \end{cases} \tag{A.1}$$

che si risolve facilmente per R_1 e R_2:

$$\begin{cases} R_1 = R_g \dfrac{i_2 i_g}{i_1(i_2 - i_g)} \\ R_2 = R_g \dfrac{(i_1 - i_2) i_g}{i_1(i_2 - i_g)} \end{cases} \tag{A.2}$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo $R_1 = 50.13\,\mathrm{m}\Omega$ e $R_2 = 0.4511\,\Omega$[1]. È interessante confrontare questi risultati con quelli che si otterrebbero se si considerassero due shunt separati, per cui

$$i_g = \frac{i_i R'_i}{R'_i + R_g} \qquad \text{da cui} \qquad R'_i = R_g \frac{i_g}{i_i - i_g} \tag{A.3}$$

ossia $R'_1 = 50.01\,\mathrm{m}\Omega$, $R'_2 = 0.5013\,\Omega$.

B. Nel caso che si usi il galvanometro, possiamo determinare il circuito equivalente della misura potenziometrica come costituito da una singola maglia che contiene il generatore equivalente del divisore, $\mathcal{E}_p$, la sua resistenza d'uscita R_p, il galvanometro con la sua resistenza in serie R_g, la resistenza R_x e la forza elettromotrice incognita $\mathcal{E}_x$, in opposizione a quella del potenziometro. In generale nel circuito scorrerà una corrente

$$i = \frac{\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p}{R_p + R_g + R_x} \tag{B.1}$$

Dato che il galvanometro distingue da zero una corrente minima i_g, avremo un errore di sensibilità pari a

$$\Delta\mathcal{E}_x = i_g(R_p + R_g + R_x) \tag{B.2}$$

[1] Daremo tutti i risultati numerici con 4 cifre significative indipendentemente da considerazioni legate all'errore, per consentire un confronto più preciso dei calcoli.

Se consideriamo i valori delle resistenze, vediamo immediatamente che R_p e R_g sono trascurabili rispetto a R_x. Introducendo i valori numerici abbiamo:

$$\Delta\mathcal{E}_x = 2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{A} \ \cdot 2 \cdot 10^7\,\Omega = 40\,\mathrm{mV} \tag{$B.3$}$$

Nel caso del voltmetro il circuito equivalente includerà, invece del galvanometro, il misuratore di tensione con la sua resistenza R_v in parallelo. Il circuito è un partitore di tensione, per cui la caduta sul voltmetro risulta pari a

$$V = \frac{(\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_p)R_v}{R_p + R_v + R_x} \tag{$B.4$}$$

Se la minima tensione leggibile sul voltmetro è V_m, avremo un errore di sensibilità

$$\Delta\mathcal{E}_x = \frac{V_m(R_p + R_v + R_x)}{R_v} \tag{$B.5$}$$

Anche in questo caso R_x prevale su R_p, per cui avremo

$$\Delta\mathcal{E}_x = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V} \cdot \frac{30\,\mathrm{M\Omega}}{10\,\mathrm{M\Omega}} = 0.3\,\mathrm{mV} \tag{$B.6$}$$

1. Il primo punto da tener presente è il fatto che se $\boldsymbol{B}$ è il campo magnetico e noi misuriamo con la sonda orientata nella direzione del versore $\boldsymbol{u}$ quello che otterremo sarà $B_u = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}$. Dato che abbiamo misurato $\boldsymbol{B}$ in due direzioni ortogonali, che abbiamo fatto coincidere con gli assi cartesiani x e y di un sistema di riferimento, potremo scrivere

$$\boldsymbol{B} = B_1\,\boldsymbol{i} + B_2\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

dove B_1 e B_2 sono le nostre misure, mentre B_z è l'eventuale componente di $\boldsymbol{B}$ perpendicolare al piano di misura, di cui non ci interesseremo. La terza misura è stata fatta lungo un versore $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j} \tag{1.2}$$

Quindi sarà

$$B_3 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} = B_1\cos\theta + B_2\sin\theta \tag{1.3}$$

La (1.3) costituisce la relazione fra le nostre misure, che dovrà essere verificata entro gli errori sperimentali. Per eseguire la verifica introduciamo una quantità Q

$$Q = B_1\cos\theta + B_2\sin\theta - B_3 \tag{1.4}$$

che dovrà essere compatibile con 0 entro il suo errore

$$\Delta Q = |\cos\theta|\,\Delta B_1 + |\sin\theta|\,\Delta B_2 + \Delta B_3 + |B_2\cos\theta - B_1\sin\theta|\,\Delta\theta \tag{1.5}$$

dove occorre ricordarsi di esprimere $\Delta\theta$ in radianti.
Occorre adesso considerare che gli errori ΔB_i dati sono gli errori complessivi su ogni

misura, comprendenti anche l'errore sistematico su k_{B_H}. Per la nostra verifica dobbiamo scorporare la componente di errore dovuta a k_{B_H}; ciò si fa semplicemente ricordando che

$$\frac{\Delta B_i}{B_i} = \frac{\Delta V_i}{V_i} + \frac{\Delta\alpha_i}{\alpha_i} + \frac{\Delta k_{B_H}}{k_{B_H}} \qquad \text{da cui} \qquad \Delta' B_i = \Delta B_i - B_i \frac{\Delta k_{B_H}}{k_{B_H}} \tag{1.6}$$

Valutando numericamente la (1.4) e la (1.5) (dove utilizzeremo come errori sulle componenti quelli corretti secondo la (1.6)) avremo $Q = (-0.1291 \pm 0.07669) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$. Pertanto le misure non sono consistenti entro i loro errori. Se si fossero utilizzati, erroneamente, gli errori comprensivi della componente sistematica avremmo ottenuto $\Delta Q = 0.1467 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$ e avremmo sbagliato la stima della consistenza.

2. Se scriviamo le relazioni per la pulsazione alla risonanza nei tre casi abbiamo

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC} \tag{2.1}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \tag{2.2}$$

$$\omega_3^2 = \frac{C + C_1}{LCC_1} \tag{2.3}$$

Dividendo membro a membro la (2.1) e la (2.3) si ricava il valore di C, che si sostituisce nella (2.1) per determinare L. Infine sostituendo L e C nella (2.2) si determina R, ottenendo

$$C = C_1 \frac{\nu_3^2 - \nu_1^2}{\nu_1^2} \tag{2.4}$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 C_1 (\nu_3^2 - \nu_1^2)} \tag{2.5}$$

$$R = \frac{\sqrt{\nu_1^2 - \nu_2^2}}{2\pi C_1 (\nu_3^2 - \nu_1^2)} \tag{2.6}$$

Il calcolo degli errori può essere eseguito con il metodo della derivata logaritmica

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1} + \left| \frac{2\nu_3^2}{\nu_3^2 - \nu_1^2} \right| \left(\frac{\Delta \nu 1}{\nu 1} + \frac{\Delta \nu_3}{\nu_3} \right) \tag{2.7}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta C_1}{C_1} + \left| \frac{2\nu_1^2}{\nu_3^2 - \nu_1^2} \right| \frac{\Delta \nu_1}{\nu_1} + \left| \frac{2\nu_3^2}{\nu_3^2 - \nu_1^2} \right| \frac{\Delta \nu_3}{\nu_3} \tag{2.8}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta C_1}{C_1} + \left| \frac{\nu_1^2(\nu_1^2 - 2\nu_2^2 + \nu_3^2)}{(\nu_1^2 - \nu_2^2)(\nu_3^2 - \nu_1^2)} \right| \frac{\Delta \nu_1}{\nu_1} + \left| \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} \right| \frac{\Delta \nu_2}{\nu_2} + \left| \frac{2\nu_3^2}{\nu_3^2 - \nu_1^2} \right| \frac{\Delta \nu_3}{\nu_3} \tag{2.9}$$

Introducendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} C &= (0.1999 \pm 0.001715)\,\mu\mathrm{F} & \tfrac{\Delta C}{C} &= 0.8583\% \\ L &= (10.01 \pm 0.08026)\,\mathrm{mH} & \tfrac{\Delta L}{L} &= 0.8021\% \\ R &= (50.00 \pm 1.231)\,\Omega & \tfrac{\Delta R}{R} &= 2.462\% \end{aligned} \tag{2.8}$$

ossia, in approssimazione fisicamente corretta, $C = (0.1999 \pm 0.0017)\,\mu$F, $L = (10.01 \pm 0.08)\,$mH, $R = (50.0 \pm 1.2)\,\Omega$.

3. Come prima cosa calcoliamo la tensione V_1 a valle della resistenza R_1. La resistenza R_3 ha all'altro estremo la massa virtuale, mentre R_2 è collegata all'ingresso di A_1, in configurazione non invertente. Dato che la resistenza d'ingresso reazionata di A_1 è molto maggiore di tutte le resistenze in gioco, possiamo trascurare la corrente in R_2 e quindi

$$V_1 = V_i \frac{R_3}{R_1 + R_3} \tag{3.1}$$

A questo punto è facile determinare la tensione V_2 all'uscita di A_2:

$$V_2 = V_1 \frac{R_4 + R_5}{R_5} = V_i \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_5(R_1 + R_3)} \tag{3.2}$$

e la tensione V_3 all'uscita di A_2

$$V_3 = -V_1 \frac{R_6}{R_3} = -V_i \frac{R_6}{R_1 + R_3} \tag{3.3}$$

Resta da determinare la tensione V_o in uscita da A_3. In generale, se un generatore di tensione $V(t)$ è collegato ad un integratore di Miller con resistenza di ingresso R e condensatore in reazione C, la tensione in uscita $V_o(t)$ è data da

$$V_o(t) = V_o(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t V(t)\, dt \tag{3.4}$$

Nel caso, come il nostro, che la tensione d'ingresso sia costante nel tempo, la (3.4) diventa semplicemente

$$V_o(t) = V_o(0) - \frac{1}{RC} V t \tag{3.5}$$

Nel momento iniziale V_o è nulla (condensatore scarico), $R = R_7 + R_9$ e la tensione applicata, V_2, è positiva. Quindi la tensione d'uscita diminuirà proporzionalmente al tempo fino a raggiungere V_-. Questo avverrà ad un tempo t_1 tale che

$$-\frac{1}{(R_7 + R_9)C} V_2 t_1 = V_- \qquad \text{da cui} \qquad t_1 = -\frac{V_-(R_7 + R_9)C}{V_2} \tag{3.6}$$

Al tempo t_1 scatta il commutatore e viene collegata V_3, che è negativa. La tensione V_o passerà a crescere con l'espressione

$$V_o(t) = V_- - \frac{V_3(t - t_1)}{(R_8 + R_9)C} \tag{3.7}$$

L'andamento crescente durerà fino all'istante t_2 in cui

$$V_+ = V_- - \frac{V_3(t_2 - t_1)}{(R_8 + R_9)C} \qquad \text{da cui} \qquad t_2 - t_1 = -\frac{(V_+ - V_-)(R_8 + R_9)C}{V_3} \tag{3.8}$$

Al tempo t_2 viene collegata di nuovo V_2 e V_o torna a decrescere secondo l'espressione

$$V_o(t) = V_+ - \frac{V_2(t - t_2)}{(R_7 + R_9)C} \tag{3.8}$$

fino al tempo t_3 per cui

$$V_- = V_+ - \frac{V_2(t_3 - t_2)}{(R_7 + R_9)C} \qquad \text{da cui} \qquad t_3 - t_2 = -\frac{(V_- - V_+)(R_7 + R_9)C}{V_2} \tag{3.9}$$

Il ciclo si ripete quindi sempre uguale. Avremo

$$t_1 = -\frac{V_-(R_7 + R_9)R_5(R_1 + R_3)C}{V_i R_3(R_4 + R_5)} \tag{3.10}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{(V_+ - V_-)(R_8 + R_9)(R_1 + R_3)C}{V_i R_6} \tag{3.11}$$

$$t_3 - t_2 = -\frac{(V_- - V_+)(R_7 + R_9)R_5(R_1 + R_3)C}{V_i R_3(R_4 + R_5)} \tag{3.12}$$

I valori numerici risultano

$$t_1 = \frac{5\,\mathrm{V} \cdot 25\,\mathrm{K\Omega} \cdot 1\,\mathrm{K\Omega} \cdot 5\,\mathrm{K\Omega} \cdot 10\,\mu\mathrm{F}}{0.5\,\mathrm{V} \cdot 4\,\mathrm{K\Omega} \cdot 4\,\mathrm{K\Omega}} = \frac{25}{32}\,\mathrm{s} \tag{3.13}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{10\,\mathrm{V} \cdot 20\,\mathrm{K\Omega} \cdot 5\,\mathrm{K\Omega} \cdot 10\,\mu\mathrm{F}}{0.5\,\mathrm{V} \cdot 8\,\mathrm{K\Omega}} = \frac{20 \cdot 100}{8} \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s} \tag{3.14}$$

$$t_3 - t_2 = \frac{10\,\mathrm{V} \cdot 25\,\mathrm{K\Omega} \cdot 1\,\mathrm{K\Omega} \cdot 5\,\mathrm{K\Omega} \cdot 10\,\mu\mathrm{F}}{0.5\,\mathrm{V} \cdot 4\,\mathrm{K\Omega} \cdot 4\,\mathrm{K\Omega}} = \frac{25}{16}\,\mathrm{s} \tag{3.12}$$

Come è ovvio dalle condizioni del problema, $t_3 - t_2 = 2t_1$. I risultati finali sono: $t_1 = 0.7812\,\mathrm{s}$, $t_2 - t_1 = 2.500\,\mathrm{s}$, $t_3 - t_2 = 1.562\,\mathrm{s}$. La forma d'onda all'uscita V_o è un dente di sega con periodo pari a $4.062\,\mathrm{s}$.