

# Semplici proprietà degli amplificatori operazionali

Matteo Poggi

26 agosto 2008

In questi brevi appunti vedremo delle semplici proprietà di amplificatori operazionali; i modi di procedere con i calcoli sono svariati, qui verrà seguita una strada già battuta principalmente da altre dispense; in particolare abbiamo fatto riferimento a materiale fornitoci dai Proff. A. Perego, R. d'Alessandro, nonché al testo *Esperimenti di elettricità e magnetismo* del prof. G. Poggi. Faremo delle approssimazioni che ci semplificheranno notevolmente i calcoli, si tratta sempre però di approssimazioni, per cui si badi a non rimanere scandalizzati di fronte a scritture come  $A \simeq A+1$ , dato che, per i nostri amplificatori supporremo  $A \approx 10^5$ . Questo vuol dire che in altri testi magari si troveranno delle espressioni leggermente diverse rappresentanti lo stesso risultato. Un'ulteriore osservazione circa tali approssimazioni: cercheremo comunque di approssimare tutti i risultati al primo ordine e non all'ordine zero. Per cominciare ricaveremo alcune grandezze importanti per il nostro operazionale.

## 1 Reazione negativa e massa virtuale

Questo schema ha in se sia la configurazione invertente che quella non invertente. Supporremo che l'operazionale abbia un'amplificazione puramente differenziale:

$$V_o = A(V_+ - V_-). \quad (1.1)$$

Ci pare più conveniente studiare questo caso generale, specificando poi delle restrizioni a casi particolari. Iniziamo calcolando  $V_{out}$ : per far ciò impostiamo le seguenti equazioni:

$$i = i_r + i_f \quad (1.2a)$$

$$i_r = \frac{V_- - V_+}{R_i} \quad (1.2b)$$

$$i_f = \frac{V_- - V_o}{R_2 + R_o} \quad (1.2c)$$

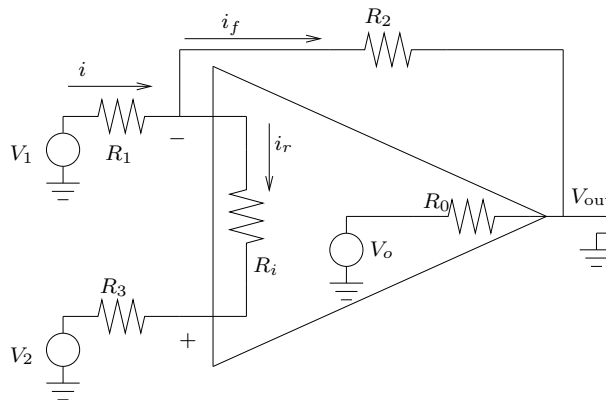


Figura 1.1: Schema generale di un amplificatore

da queste possiamo scrivere sostituendo (1.2b) e (1.2c) in (1.2a):

$$\begin{aligned} i &= \frac{V_- - V_+}{R_i} + \frac{V_- - V_o}{R_2 + R_o} \stackrel{(1.1)}{=} \frac{V_- - V_+}{R_i} + \frac{V_- - A(V_+ - V_-)}{R_2} \stackrel{A \gg 1}{\approx} (V_- - V_+) \left( \frac{A}{R_2} + \frac{1}{R_i} \right) = \\ &= (V_- - V_+) \frac{AR_i + R_2}{R_2 R_i} \stackrel{AR_i \gg R_2}{\approx} (V_- - V_+) \frac{A}{R_2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

da questa evinciamo che

$$V_+ - V_- \simeq -\frac{iR_2}{A} \approx 0 \quad (1.4)$$

ed inoltre che

$$i_r = \frac{V_- - V_+}{R_i} \simeq \frac{iR_2}{AR_i} \approx 0 \quad \Rightarrow i = i_f \quad (1.5)$$

a meno di non scegliere valore molto grandi per la resistenza di reazione. Questo concetto è la famigerata *massa virtuale*: essa implica che il potenziale dei due terminali sia, al primo ordine, lo stesso, ed al contempo non circoli corrente tra essi. Potremo pensare tale massa virtuale come un'esca per la tensione, come se non fosse virtuale, ma che, a differenza di questa, non permette il passaggio di corrente. Adesso occorre fare attenzione per l'uso corretto di queste approssimazioni, come abbiamo detto, eravamo intenzionati ad approssimare al primo ordine, e così abbiamo fatto al secondo membro dell'uguaglianza (1.4). Il terzo membro risulta invece ad ordine zero. Risulta catastrofico utilizzare ingenuamente risultati di ordine zero assieme a risultati esatti o di ordini successivi; ad esempio se volessimo calcolare  $V_o = A(V_+ - V_-) \approx 0 \cdot A = 0$  il che è palesemente assurdo. Questo perchè dobbiamo tenere in mente che stiamo lavorando con  $o\left(\frac{1}{A}\right)$ . Per procedere usiamo la (1.2c) per trovare  $V_o$ :

$$V_o = V_- - i_f(R_2 + R_0) \quad (1.6)$$

e dunque possiamo agevolmente calcolare, usando il partitore di tensione,  $V_{\text{out}}$  :

$$V_{\text{out}} = V_- - i_f(R_2 + R_0) \frac{R_2}{R_2 + R_0} = V_- - i_f R_2. \quad (1.7)$$

Adesso utilizzando il concetto di massa virtuale riscriviamo l'espressione precedente in maniera a noi più conveniente:

$$V_{\text{out}} \stackrel{(1.4),(1.5)}{=} V_- - \frac{V_1 - V_+}{R_1} R_2 \stackrel{(1.4)}{=} V_+ - \frac{V_1 - V_+}{R_1} R_2. \quad (1.8)$$

per concludere, trascurando la caduta di potenziale sulla resistenza  $R_3$  (poichè  $i_r \ll i$  dalla (1.5)), e ponendo quindi  $V_+ \simeq V_2$  si giunge all'espressione finale:

$$\boxed{V_{\text{out}} = V_2 G_{NI} - V_1 G_I} \quad (1.9)$$

dove si è posto

$$G_{NI} := 1 + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{\beta} \quad (1.10a)$$

$$G_I := \frac{R_2}{R_1}. \quad (1.10b)$$

In tal modo è facile verificare che ponendo  $V_1 = 0$  o  $V_2 = 0$  si hanno rispettivamente il caso dell'amplificatore in configurazione *non invertente* ed in configurazione *invertente*. Si noti altresì che nelle nostre approssimazioni la resistenza  $R_3$  gioca un ruolo (per ora) inessenziale.

## 2 Impedenze d'ingresso

Adesso calcoleremo le impedenze d'ingresso viste dai due generatori, esse sono definite:

$$R = \frac{V}{i}. \quad (2.1)$$

## 2.1 Impedenza d'ingresso sul ramo invertente

Questo calcolo risulta molto semplice se si applica il concetto di massa virtuale, difatti troviamo subito:

$$i = \frac{V_1 - V_2}{R_1}. \quad (2.2)$$

Dunque si avrà

$$R_- = \frac{V_1 R_1}{V_1 - V_2} \quad (2.3)$$

che nel caso di configurazione invertente  $V_2 = 0$  dà:

$$R_- = R_1. \quad (2.4)$$

Sarebbe curioso osservare cosa succederebbe nell'espressione (2.3) se  $V_2 > V_1$ : una resistenza negativa. Questo è spiegabile con definizione: in effetti le grandezze di cui si fa il rapporto sono a priori indipendenti e quindi ci potrebbero essere delle situazioni in cui la corrente viene erogata contro il potenziale che il generatore eroga.

## 2.2 Impedenza d'ingresso sul ramo non invertente

Seguendo la traccia generale, dovremo calcolare

$$R_+ = -\frac{V_2}{i_r} \quad (2.5)$$

come mostra la figura 1. Adesso ricordando la (1.2b), per il calcolo di  $i_r$  e ricordando anche la (1.1) otteniamo:

$$-i_r \stackrel{(1.2b)}{=} \frac{V_+ - V_-}{R_i} \stackrel{(1.1)}{=} \frac{V_o}{AR_i} \quad (2.6)$$

Adesso sfruttiamo la (1.6) prima considerando però

$$V_- \simeq V_+ \simeq V_2 \quad (2.7a)$$

$$i_f \simeq i \simeq \frac{V_1 - V_2}{R_1}; \quad (2.7b)$$

abbiamo dunque

$$V_o = V_2 - \frac{V_1 - V_2}{R_1} (R_2 + R_0) \quad (2.8)$$

(si noti come il procedimento assomigli a quello usato per calcolare  $V_{out}$ ). Inserendo questo risultato nella (2.6) otteniamo:

$$-i_r = \frac{V_2 - \frac{V_1 - V_2}{R_1} (R_2 + R_0)}{AR_i} \quad (2.9)$$

e per concludere:

$$R_+ = \frac{V_2 AR_i}{V_2 - \frac{V_1 - V_2}{R_1} (R_2 + R_0)}. \quad (2.10)$$

Questa espressione può essere semplificata tenendo conto che fisicamente  $R_0 \simeq 0$  e calcolando l'espressione in una situazione completamente non invertente, ponendo  $V_1 = 0$ :

$$R_+ \simeq AR_i \beta. \quad (2.11)$$

Nelle applicazioni, visto il già elevato valore di  $R_i \approx M\Omega$  ed il notevole valore di  $A$ , si può considerare tale resistenza a tutti gli effetti infinita. Questo fatto avrà notevole importanza nelle applicazioni che useranno questo tipo di configurazione.

### 3 Resistenza d'uscita

Per affrontare questa questione utilizzeremo il teorema di Thévenin, ricordandone bene l'enunciato, secondo il quale i generatori da cortocircuitare non sono tutti bensì solo quelli indipendenti, difatti, come mostra la figura 3, il generatore  $V_o$  non è stato cortocircuitato. Sempre per la usuale definizione avremo:

$$R_{\text{out}} = \frac{V_L}{i_L}. \quad (3.1)$$

Sempre dallo schema capiamo che

$$i_L = i_0 + i_f \quad (3.2a)$$

$$i_0 = \frac{V_L - V_o}{R_0} \quad (3.2b)$$

$$i_f = \frac{V_L}{R_2 + R_{//}}, \quad (3.2c)$$

dove per comodità definiamo  $R_{//} := R_1 + R_i // R_3$ . Calcoliamoci adesso l'effetto di  $V_L$  sui terminali  $V_+$  e  $V_-$ . Tutto ciò può essere fatto comodamente usando la formula del partitore e considerando le resistenze in serie e quelle in parallelo.

$$V_- = V_L \frac{R_{//}}{R_2 + R_{//}} \quad (3.3a)$$

$$V_+ = V_L \frac{R_{//}}{R_2 + R_{//}} \frac{R_3}{R_i + R_3}. \quad (3.3b)$$

Applichiamo ora la (1.1):

$$V_o = - \frac{V_L A R_{//}}{R_2 + R_{//}} \frac{R_i}{R_3 + R_i}. \quad (3.4)$$

Sostituendo quindi in (3.2b) si avrà:

$$i_0 = \frac{V_L}{R_0} \left( 1 + \frac{A R_{//} R_i}{(R_2 + R_{//})(R_3 + R_i)} \right) \quad (3.5)$$

mentre per quanto riguarda  $i_f$  abbiamo:

$$i_f = \frac{V_L}{R_{//}}. \quad (3.6)$$

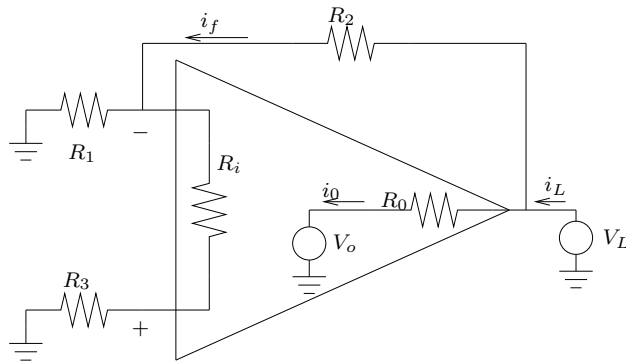


Figura 3.1: Schema per il calcolo della resistenza d'uscita

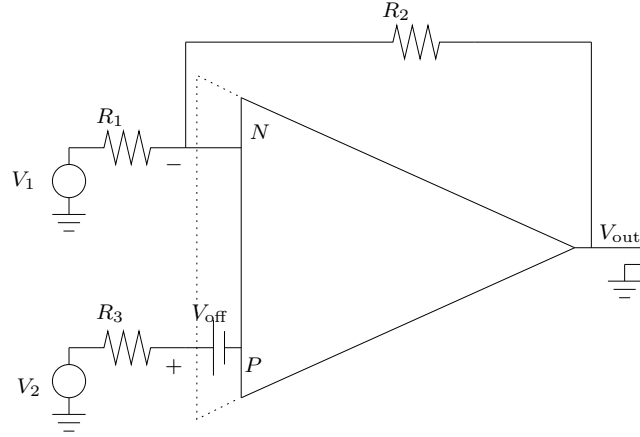


Figura 4.1: Tensione di offset applicata all'ingresso invertente

Quindi sommando questi due contributi:

$$i_L = V_L \left[ \frac{1}{R_0} \left( 1 + \frac{AR_{//}R_i}{(R_2 + R_{//})(R_3 + R_i)} \right) + \frac{1}{R_{//}} \right] \quad (3.7)$$

onde avremo finalmente:

$$R_{\text{out}} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} \left( 1 + \frac{AR_{//}R_i}{(R_2 + R_{//})(R_3 + R_i)} \right) + \frac{1}{R_{//}}} \quad (3.8)$$

Adesso, visto l'elevato valore di  $R_i$  l'espressione precedente si può molto semplificare poiché, come si verifica subito dallo schema si potranno trascurare le cadute di tensione sia su  $R_i$  che su  $R_3$  ( $R_{//} \simeq R_1$ ), così facendo l'espressione (3.8) diventa facilmente:

$$R_{\text{out}} = \frac{R_0}{1 + A\beta} \quad (3.9)$$

A tutti gli effetti questa resistenza si può considerare trascurabile, visto il già basso valore di  $R_0$ .

## 4 Tensione di offset

Una caratteristica che contraddistingue gli amplificatori ideali da quelli reali è la presenza di un livello di tensione continua, sempre presente tra il terminale invertente e quello non invertente. Questo effetto viene schematizzato con un generatore in continua su di un ingresso  $V_{\text{off}} \approx \text{mV}$ . Nella figura 4 abbiamo messo tale generatore all'ingresso non invertente; si potrà altresì spostarlo all'ingresso invertente (si ricorda che questi due ingressi sono collegati internamente tramite una resistenza  $R_i$ , non presente in questo disegno), purché si rovesci la polarità e quindi le due situazioni siano *topologicamente equivalenti*. Per calcolare  $V_{\text{out}}$  del nostro amplificatore tenendo conto di  $V_{\text{off}}$  basterà appellarsi alla (1.9) tenendo conto della somma algebrica delle tensioni sull'ingresso non invertente:

$$V_{\text{out}} = (V_2 - V_{\text{off}})G_{NI} - V_1G_I \quad (4.1)$$

In parole povere, qualsiasi sia la configurazione che stiamo usando la corrente di offset si manifesta sempre come se fosse un generatore in continua sul ramo non invertente.

## 5 Correnti di bias

Un'altra caratteristica che perturba il modello di amplificatore operazionale ideale sono le delle correnti presenti all'ingresso di entrambe i terminali, schematizzate in figura 5 con dei generatori di corrente. Tipicamente (a temperatura ambiente) abbiamo  $i_{\text{bias}} \approx 10\text{pA}$  anche se tale valore è molto dipendente dalla temperatura. Vediamo le ripercussioni che tali correnti hanno sull'output del nostro circuito. Per eseguire tale calcolo basterà sfruttare, mutatis mutandis, la (1.8), tenendo conto, che, per come abbiamo impostato (e risolto) il problema della massa virtuale, e per i nomi che abbiamo attribuito ai vari terminali dovremo avere:

$$V_{\text{out}} = V_N - \frac{V_N - V_P}{R_1} R_2. \quad (5.1)$$

Adesso, tenendo conto dell'effetto dei generatori di corrente, in parallelo alle rispettive resistenze nel circuito, potremo scrivere:

$$V_N = V_1 - i_{\text{bias}}^- R_1 \quad (5.2a)$$

$$V_P = V_2 - i_{\text{bias}}^+ R_3. \quad (5.2b)$$

Inserendo queste espressioni nella (5.1) troviamo:

$$\boxed{V_{\text{out}} = (V_2 - i_{\text{bias}}^+ R_3) G_{NI} - V_1 G_I + i_{\text{bias}}^- R_2.} \quad (5.3)$$

Questo mette in evidenza come la resistenza  $R_3$  che fino ad ora non aveva influito troppo sui nostri risultati, in questo caso comporti una modifica della tensione d'uscita tenendo conto delle correnti di bias. Questo ci insegna anche come fare qualora volessimo trascurarle, in particolare, mettendo a terra il terminale positivo sarà possibile trascurare quella sul ramo non invertente. In tal caso possiamo riscrivere la (5.3):

$$V_{\text{out}} = V_2 G_{NI} - V_1 G_I + i_{\text{bias}}^- R_2. \quad (5.4)$$

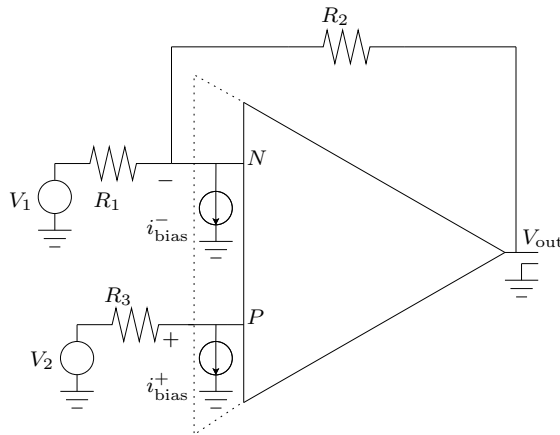


Figura 5.1: Correnti di bias