

Misure con l'analizzatore di spettro

1. Serie di Fourier

È noto dalla matematica che una funzione periodica $f(t)$ può essere scritta come somma di funzioni armoniche semplici $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$:

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t) \quad (1.1)$$

con

$$\omega = 2\pi/T$$

T = periodo della funzione $f(t)$

a_n, b_n = coefficienti.

Lo sviluppo in serie (1.1) è detto "serie di Fourier" ed i termini a_n e b_n sono chiamati coefficienti di Fourier.¹ In alternativa, la (1.1) si può scrivere anche come

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (1.1a)$$

con le relazioni:

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0 & a_n &= A_n \cos \phi_n \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & b_n &= A_n \sin \phi_n \end{aligned}$$

Nel primo caso per ogni componente armonica viene data la parte in fase (a_n) e la parte in quadratura (b_n), cioè sfasata di 90° ; nel secondo caso viene data ampiezza (A_n) e fase (ϕ_n) di ogni componente.

La funzione $f(t)$, oltre ad essere periodica, cioè a soddisfare la condizione $f(t) = f(t+T)$, deve anche rispondere a certi requisiti di continuità illustrati in dettaglio nei testi di matematica. Va detto però che se la $f(t)$ rappresenta un fenomeno fisico reale funzione del tempo t , è veramente difficile riuscire ad immaginare una situazione in cui essa non sia sviluppabile in serie di Fourier.

I coefficienti a_n e b_n sono dati dalle espressioni:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (1.2a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (1.2b)$$

¹ Non esistendo una convenzione unica per esprimere la serie di Fourier, è possibile che in altri testi essa sia data in forma diversa. Qui si è cercato di essere compatibili con la convenzione usata nell'analizzatore disponibile in laboratorio.

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (1.2c)$$

Il termine b_0 è il doppio del valore medio della funzione $f(t)$, e corrisponde al valore della (1.2b) per $n = 0$.

2. Composizione spettrale

Se la funzione $f(t)$ è, ad esempio, una tensione che varia col tempo in modo periodico, possiamo vedere il suo grafico cartesiano $v(t)$ inviandola ad un oscilloscopio (fig. 2.1).

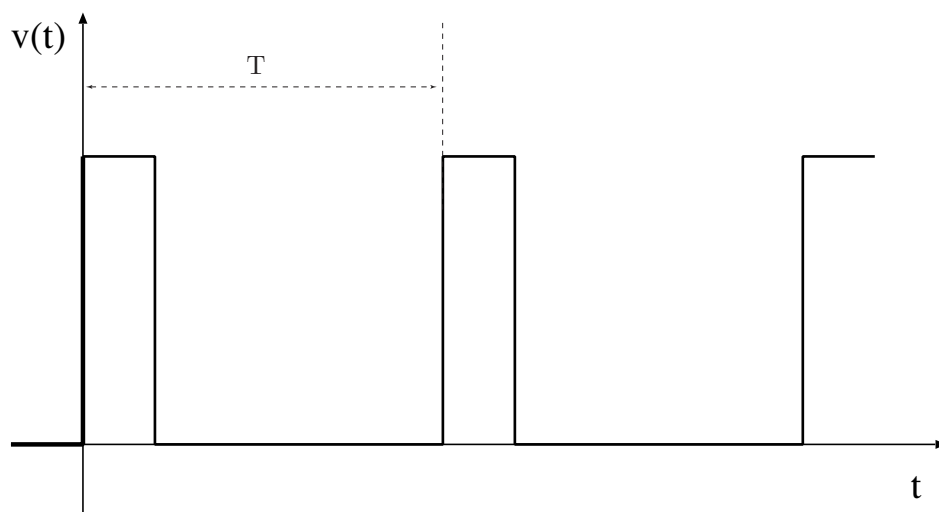


Fig 2.1: Esempio di forma d'onda periodica.

La conoscenza dei valori di $v(t)$ istante per istante su un intero periodo dal tempo 0 al tempo T ci dà una informazione completa del fenomeno. La stessa informazione la potremmo avere dalla conoscenza dei coefficienti a_n e b_n della serie di Fourier. Infatti, dai valori di a_n e b_n , tramite l'equazione (1.1), possiamo ricavare il valore di $v(t)$ in ogni istante; analogamente, dalla conoscenza della funzione $v(t)$ possiamo ricavare i valori dei coefficienti a_n e b_n tramite le equazioni (1.2).

Anche i coefficienti a_n e b_n possono essere riportati in un grafico, che prende il nome di "spettro" della tensione $v(t)$ (fig. 2.2).

In conclusione, ogni fenomeno fisico periodico può essere considerato da due punti di vista completamente equivalenti: la sua evoluzione temporale, $(v(t))$ o la sua composizione spettrale (a_n, b_n) .

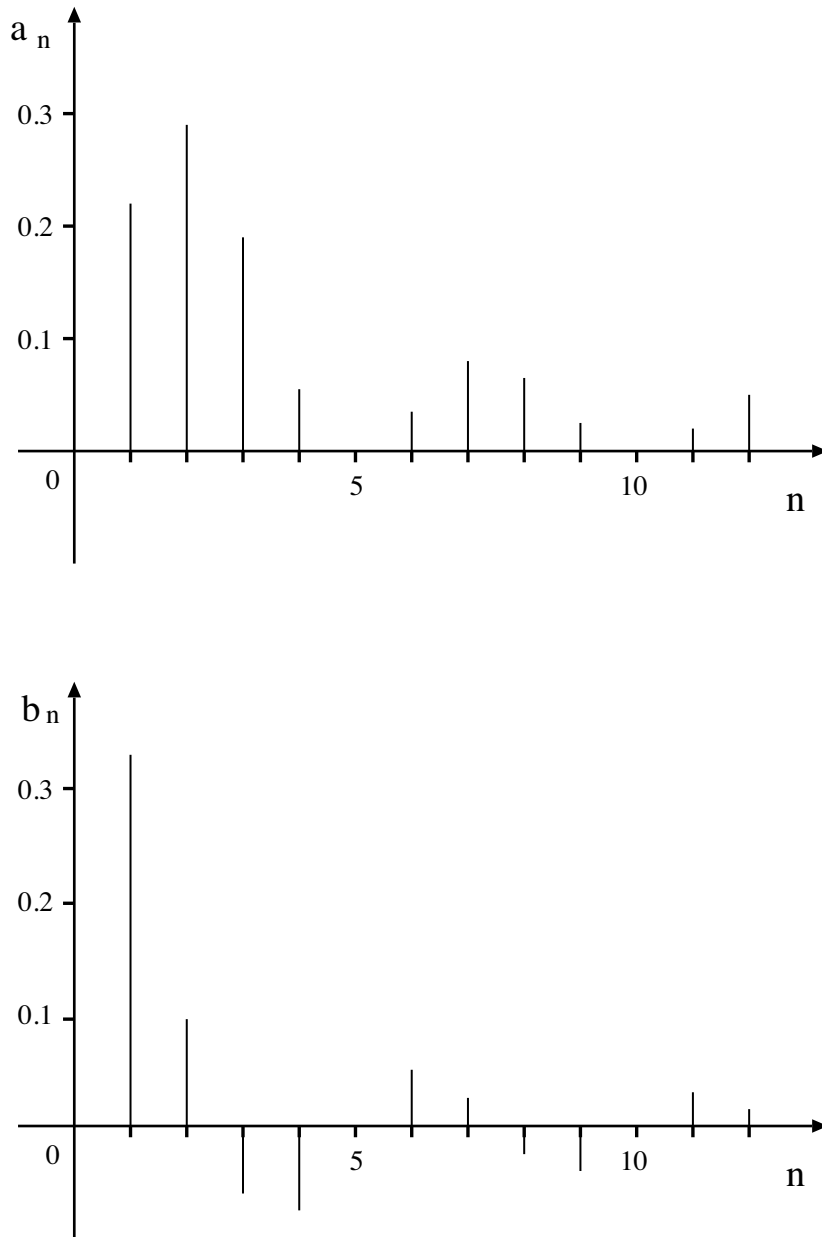


Fig 2.2: Componenti di uno spettro di Fourier.

3. Analizzatore di spettro

Esistono apparecchi, detti “Analizzatori di Spettro”, mediante i quali è possibile osservare direttamente la composizione spettrale di un segnale. In linea di principio questo potrebbe essere fatto separando le varie componenti armoniche mediante tanti filtri passa-

banda, accordati ciascuno su una frequenza diversa e sufficientemente selettivi da lasciar passare inalterata una sola componente armonica, sopprimendo tutte le altre. All'uscita di ciascun filtro si avrebbe una tensione alternata sinusoidale pura, di cui si potrebbe misurare l'ampiezza mediante uno strumento per correnti alternate (fig. 2.3).

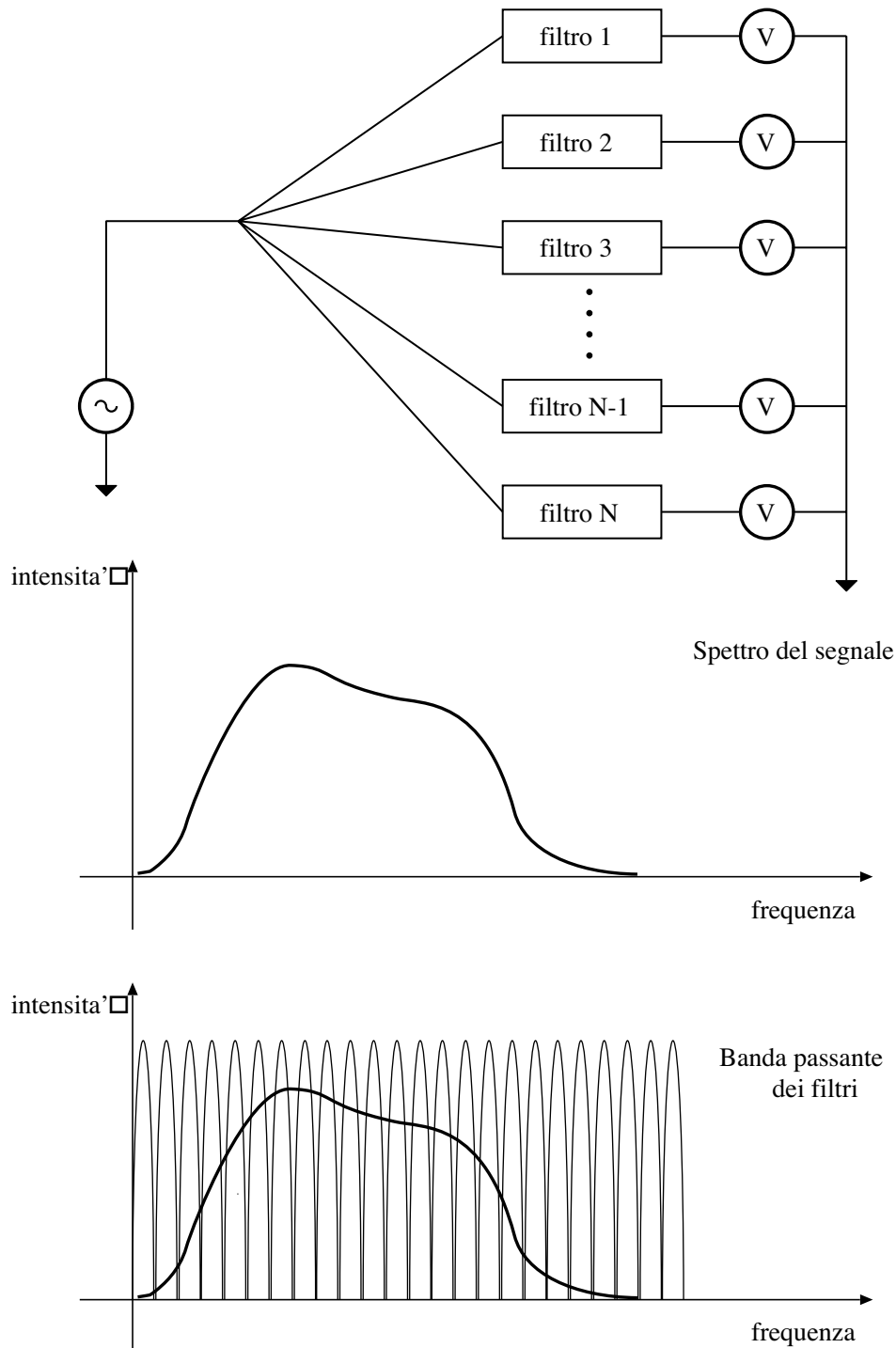


Fig 2.3: Analisi spettrale mediante l'applicazione di n filtri passa-banda.

Questa tecnica è applicabile praticamente solo se si vuole ottenere il valore di poche componenti armoniche di frequenze prestabilite. Per strumenti di uso generale e di precisione, che possano coprire spettri di frequenza molto ampi, contenenti anche centinaia o migliaia di componenti armoniche diverse, sono invece disponibili altre due tecniche, che si basano su principi di funzionamento completamente diversi: eterodina e D.F.T. (Discrete Fourier Transform).

4. Analizzatori eterodina

Sono costituiti da un unico filtro passa banda molto selettivo, a frequenza fissa. Per poter esaminare il contenuto spettrale di una gamma di frequenze diversa da quella del filtro, si trasla in sequenza ciascuna parte della gamma all'interno della banda passante del filtro sfruttando il principio della conversione "eterodina": moltiplicando un segnale con una certa composizione spettrale

$$v(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)$$

per un segnale sinusoidale puro $c \cdot \sin(\omega_l t)$ di frequenza (angolare) ω_l si ottiene:

$$\begin{aligned} c \cdot \sin(\omega_l t) \cdot \left[\frac{b_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t) \right] = \\ = c \cdot \frac{b_0}{2} \sin(\omega_l t) + c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2} \sin(\omega_l + n\omega)t - \frac{a_n}{2} \cos(\omega_l + n\omega)t + \\ + c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2} \sin(\omega_l - n\omega)t + \frac{a_n}{2} \cos(\omega_l - n\omega)t \end{aligned} \quad (4.1)$$

Il risultato espresso dall'equazione (4.1) è illustrato nella figura (4.1):

lo spettro originario del segnale dà luogo dopo la conversione a due spettri eguali a quello originario,² ma traslati sull'asse delle frequenze della costante ω_l ; uno dei due spettri poi è rovesciato in maniera speculare rispetto a ω_l .

Lo schema a blocchi di un analizzatore di spettro di tipo eterodina è illustrato in fig. 4.2.

Variando la frequenza ω_l si fanno cadere all'interno della banda passante del filtro parti diverse dello spettro da analizzare.

Apparecchi di questo tipo sono utilizzati prevalentemente per lo studio di segnali di frequenza oltre la banda audio, e cioè da qualche kHz fino ai GHz . Per frequenze più basse i tempi di misura diventano proibitivamente lunghi, in quanto l'apparecchio deve effettuare in sequenza una misura per ogni segmento di banda da analizzare ed ognuna di queste misure deve essere lunga rispetto al periodo associato alla banda passante del filtro.

² A parte un fattore di scala e una variazione sistematica di fase: a ogni fase ϕ_n dello spettro originale corrispondono fasi $\frac{\pi}{2} - \phi_n$ e $\frac{\pi}{2} + \phi_n$ rispettivamente negli spettri 4.1.

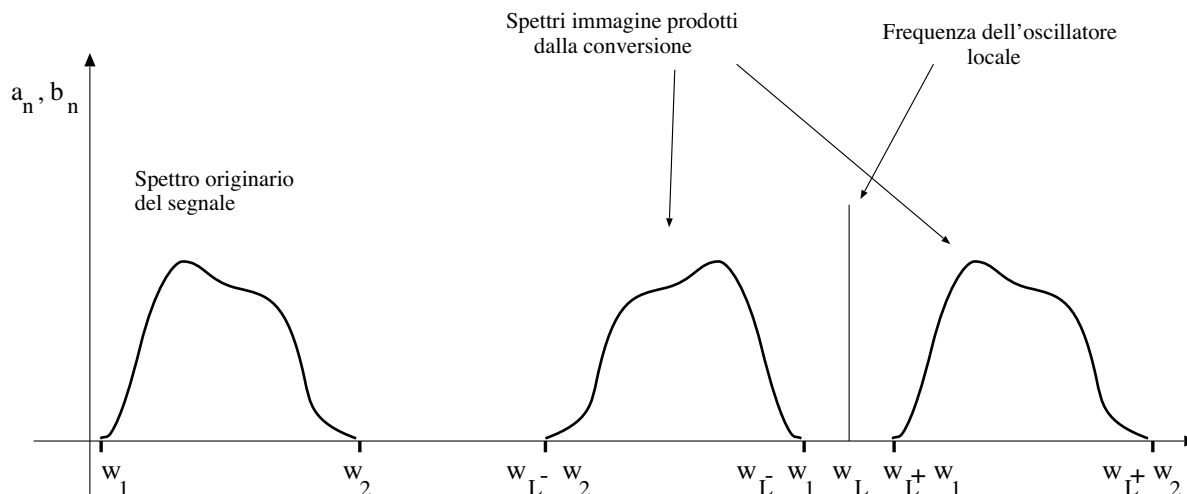


Fig 4.1: Effetto eterodina.

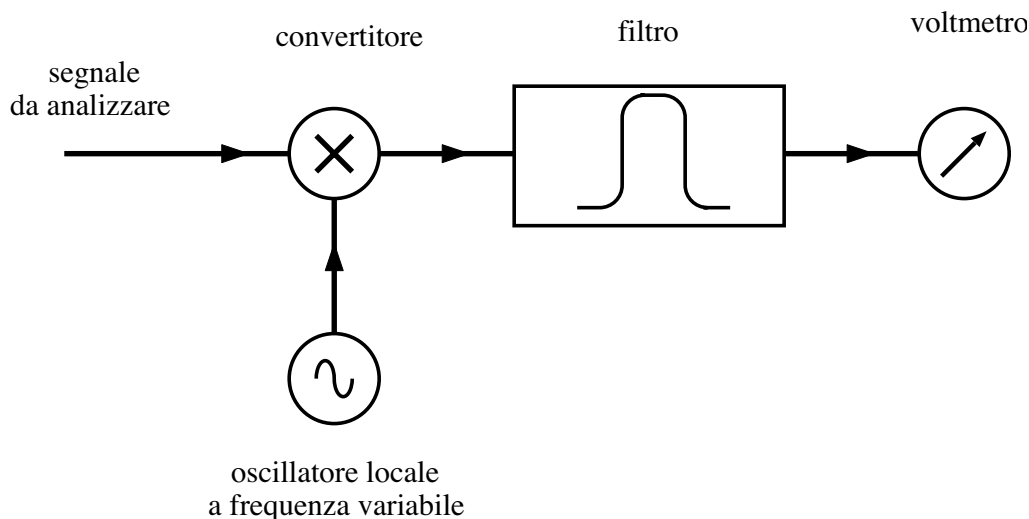


Fig 4.2: Schema di analizzatore di spettro eterodina.

5. Analizzatori D.F.T. (Discrete Fourier Transform)

Il segnale $v(t)$ viene campionato con cadenza costante mediante un convertitore analogico-digitale (ADC) per la durata di un intero periodo (fig. 5.1). Si ottiene una successione di M numeri v_0, v_1, \dots, v_{M-1} che contengono il valore della $v(t)$ agli istanti $0, \tau, 2\tau, \dots, (M-1)\tau$, con una risoluzione (temporale) tanto migliore quanto più numerosi sono i campionamenti effettuati. I valori ottenuti dal convertitore ADC sono quindi inviati

ad un calcolatore digitale che calcola numericamente gli integrali (1.2) e quindi i valori dei coefficienti a_n e b_n .

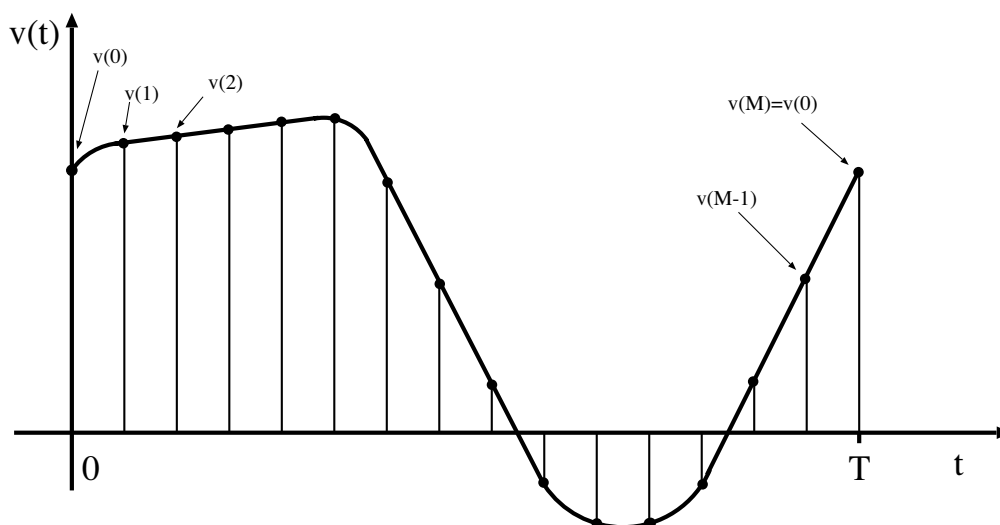


Fig 5.1: Campionamento di una forma d'onda.

Questo tipo di analizzatore è particolarmente conveniente per segnali lenti, dalla frazione di Hz fino a qualche kHz . Infatti, per ottenere uno spettro completo è sufficiente attendere il campionamento di un solo ciclo del segnale essendo tutti gli integrali calcolati dalla stessa successione di dati.

Quando la tensione $v(t)$, che è una funzione continua del tempo, viene campionata si perde la parte di informazione relativa all'andamento della $v(t)$ tra due campionamenti successivi. Si può introdurre questa condizione negli integrali (1.2) sostituendo a $v(t) \cdot \sin(n\omega t)$, per tutto l'intervallo di tempo τ centrato intorno a ciascuno degli istanti $t = m\tau$, il valore costante $v(\tau) \cdot \sin(n\omega\tau)$, essendo questa l'unica informazione disponibile. Si ottiene:

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} v(m\tau) \cdot \sin(n\omega m\tau) \cdot \tau = \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} v_m \cdot \sin(2\pi n m/M) \quad 5.1.a$$

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} v(m\tau) \cdot \cos(n\omega m\tau) \cdot \tau = \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} v_m \cdot \cos(2\pi n m/M) \quad 5.1.b$$

$$b_0 = \frac{2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} v(m\tau) \cdot \tau = \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} v_m \quad 5.1.c$$

Per ciascun valore di n possiamo considerare due vettori a M dimensioni:

$$\left(\sin(2\pi n \frac{0}{M}), \sin(2\pi n \frac{1}{M}), \dots, \sin(2\pi n \frac{M-1}{M}) \right)$$

$$\left(\cos(2\pi n \frac{0}{M}), \cos(2\pi n \frac{1}{M}), \dots, \cos(2\pi n \frac{M-1}{M}) \right)$$

Si può dimostrare che se consideriamo vettori con $n \leq M/2$, essi risultano tutti ortogonali tra di loro:³

$$\frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sin(2\pi n_1 m/M) \cdot \sin(2\pi n_2 m/M) = \delta_{n_1, n_2} \quad (5.2a)$$

$$\frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \cos(2\pi n_1 m/M) \cdot \cos(2\pi n_2 m/M) = \delta_{n_1, n_2} \quad (5.2b)$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sin(2\pi n_1 m/M) \cdot \cos(2\pi n_2 m/M) = 0 \quad (5.2c)$$

e quindi costituiscono una base completa a M dimensioni. Le espressioni 5.1 sono lo sviluppo del vettore $(v_0, v_1, \dots, v_{M-1})$ su detta base.

Si vede allora che partendo dalla conoscenza di M valori provenienti dal campionamento temporale del segnale $v(t)$ si può ricavare uno spettro che contiene M valori, e cioè le componenti in fase ed in quadratura (o le ampiezze e le fasi) di $M/2$ componenti armoniche. Apparentemente, nelle espressioni 5.1, quando M è pari, sembra siano presenti $M + 1$ termini, e cioè $M/2$ termini per a_n , $M/2$ termini per b_n e b_0 . In realtà il coefficiente $a_{M/2}$ risulta sempre zero, in quanto il vettore corrispondente $\sin(2\pi(M/2) \cdot (m/M)) = \sin(\pi m)$ con $m = 0 \dots M - 1$ risulta identicamente nullo. Questo vuol dire che dell'ultima componente armonica dello spettro può essere determinata solo la parte in quadratura, ma non quella in fase.

6. Teorema di Shannon e aliasing

Si è visto che la frequenza massima contenuta nello spettro ottenuto mediante la D.F.T. è:

$$f_{M/2} = \frac{M/2}{T} = \frac{1}{2\tau} = \frac{f_c}{2}$$

dove f_c è la frequenza di campionamento. Questo risultato costituisce il teorema di Shannon sul campionamento dei segnali: un segnale, il cui spettro è limitato, è descritto completamente, cioè senza perdita di informazione, da un campionamento a frequenza almeno doppia di quella della componente armonica più alta. La frequenza minima di campionamento necessaria per preservare tutta la informazione di un segnale è detta frequenza di Nyquist. Quando il campionamento viene effettuato ad una frequenza inferiore alla frequenza di Nyquist, si ha perdita di informazione a causa del fenomeno detto "aliasing",

³ vedi Appendice A.



Fig 6.1: Spettro del segnale originario.

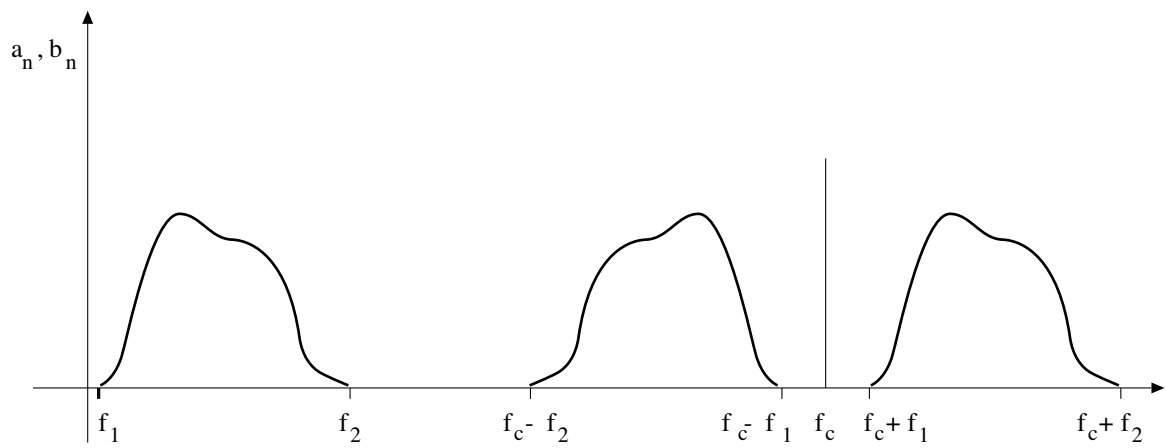


Fig 6.2: Spettro del segnale campionato.

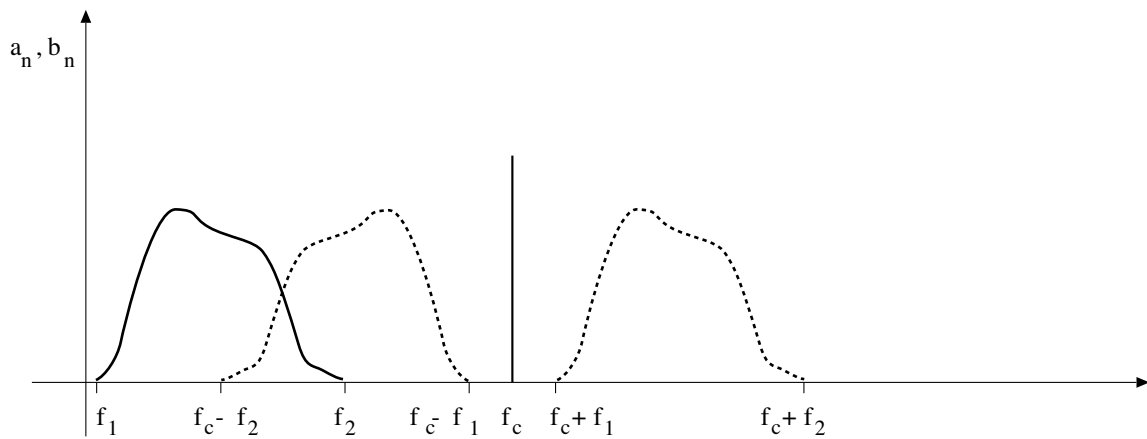


Fig 6.3: Aliasing.

cioè alla formazione delle frequenze-immagine. Se lo spettro di un segnale che si vuole campionare è, ad esempio, quello riportato in fig. 6.1, lo spettro dello stesso segnale campionato è quello riportato in fig. 6.2.

È chiaro che se $f_c - f_2$ è minore di f_2 , cioè se $f_c < 2 \cdot f_2$, la parte iniziale della prima “copia” dello spettro (quella da $f_c - f_2$ a $f_c - f_1$) si viene a sovrapporre allo spettro originario, che occupa la porzione di frequenze da f_1 a f_2 (fig. 6.3). Tale fenomeno è detto *aliasing*.

7. Un modo alternativo di presentare la D.F.T.

Supponiamo di avere una funzione $v(t)$ periodica con periodo T e di campionarla in M punti equispaziati nel periodo di un intervallo $\tau = T/M$, ai tempi $t_m = m\tau$ con m che assume i valori da 0 a $M - 1$. La nostra conoscenza della funzione è quindi limitata agli M campioni $v_0 \dots v_{M-1}$. Allo scopo di valutare i coefficienti della serie di Fourier dai nostri dati possiamo costruire da questi ultimi una espressione $v_c(t)$. Per fare questo possiamo esprimere matematicamente il campionamento mediante una espressione che, moltiplicata alla $v(t)$, ne selezioni soltanto i valori nei punti campionati. Una tale espressione è

$$\tau \sum_{m=0}^{M-1} \delta(t - m\tau) \quad (7.1)$$

dove $\delta(x)$ è un “oggetto matematico” noto come *Delta di Dirac*, caratterizzato dalla seguenti proprietà:

$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = \begin{cases} 0 & 0 \notin [a, b] \\ f(0) & 0 \in [a, b] \end{cases}$$

La *Delta*, che non si può dire propriamente una funzione, si può pensare intuitivamente come una “cuspidine” centrata sullo zero, di larghezza (tendente a) 0 e area unitaria.⁴ L’espressione (7.1) ha la forma di un “pettine” con i denti in corrispondenza dei tempi di campionamento. Il fattore τ , corrispondente all’intervallo fra i tempi, ha lo scopo di normalizzare l’integrale di $v_c(t)$ in modo tale che $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^T v_c(t) dt = \int_0^T v(t) dt$. Abbiamo quindi

$$v_c(t) = \tau \sum_{m=0}^{M-1} v(t)\delta(t - m\tau) = \tau \sum_{m=0}^{M-1} v_m\delta(t - m\tau) \quad (7.2)$$

Aver scelto questa rappresentazione per $v_c(t)$ può apparire non del tutto appropriato: sembrerebbe più adatta, per esempio, la classica funzione “ad istogramma” dove in ogni intervallo $m\tau \leq t < (m + 1)\tau$ $v_c(t) = v(m\tau)$. Vedremo invece che la forma scelta per $v_c(t)$, oltre a permettere un calcolo immediato dei coefficienti della serie di Fourier (con il risultato delle formule (5.1)) fornisce, sotto le condizioni del teorema di Shannon, gli stessi coefficienti della funzione originale $v(t)$.

⁴ Qualche ulteriore informazione sulla *delta* è data in appendice B.

Per dimostrare quanto sopra, vediamo intanto le espressioni dei coefficienti di Fourier di $v_c(t)$, che indicheremo con α_k e β_k per distinguerli da quelli della funzione di partenza $v(t)$. Utilizzando le (1.2) si ha

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \tau \left[\sum_{m=0}^{M-1} v_m \delta(t - m\tau) \right] \sin(k\omega t) dt = \\ &= \frac{2\tau}{T} \sum_{m=0}^{M-1} v(m\tau) \sin(k\omega m\tau) = \\ &= \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} v(m\tau) \sin\left(2\pi k \frac{m}{M}\right)\end{aligned}$$

e analogamente

$$\beta_k = \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} v(m\tau) \cos\left(2\pi k \frac{m}{M}\right)$$

Queste formule coincidono con le (5.1). Consideriamo adesso una $v(t)$ che sia *limitata in frequenza*, ossia il cui sviluppo in serie di Fourier abbia coefficienti non nulli solo fino ad un determinato indice n :

$$v(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^n [a_i \sin(i\omega t) + b_i \cos(i\omega t)]$$

I coefficienti α_k della serie di Fourier della corrispondente $v_c(t)$ saranno:

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \left[\frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^n [a_i \sin(i\omega m\tau) + b_i \cos(i\omega m\tau)] \right] \sin\left(2\pi k \frac{m}{M}\right) \right\} = \\ &= \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \frac{b_0}{2} \sin\left(2\pi k \frac{m}{M}\right) \right\} + \frac{2}{M} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \left[a_i \sin\left(2\pi i \frac{m}{M}\right) \sin\left(2\pi k \frac{m}{M}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_i \cos\left(2\pi i \frac{m}{M}\right) \sin\left(2\pi k \frac{m}{M}\right) \right] \right\} = \\ &= \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \frac{b_0}{2} \sin\left(2\pi k \frac{m}{M}\right) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \left\{ a_i \sum_{m=0}^{M-1} \left[\cos\left[2\pi(i-k)\frac{m}{M}\right] - \cos\left[2\pi(i+k)\frac{m}{M}\right] \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \left\{ b_i \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sin\left[2\pi(i+k)\frac{m}{M}\right] - \sin\left[2\pi(i-k)\frac{m}{M}\right] \right] \right\}\end{aligned}$$

A questo punto utilizziamo la proprietà per cui se j è un intero qualunque, positivo o negativo,

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sin\left(2\pi j \frac{m}{M}\right) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \cos\left(2\pi j \frac{m}{M}\right) = M\delta_{j,qM}$$

con q intero qualunque, positivo o negativo, ossia che la somma dei seni è sempre nulla mentre quella dei coseni vale M quando j risulta multiplo, positivo o negativo, di M .⁵ Tenendo conto di questo risultato, l'espressione di α_k si semplifica notevolmente:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n a_i [\delta_{(i-k),qM} - \delta_{(i+k),qM}] \quad (7.3)$$

dove occorre considerare tutti i valori di q da $-\infty$ a $+\infty$. Una espressione analoga si ottiene per i β_k . Vediamo che i coefficienti della serie di Fourier di $v_c(t)$ sono dati in generale dalla somma e sottrazione di coefficienti della serie della funzione originale $v(t)$ e che non esiste un valore limite per k al di sopra del quale i coefficienti siano tutti nulli, anche quando la serie originale era limitata in frequenza. Questo risultato era da attendersi data la forma discontinua di $v_c(t)$, che va all'infinito in corrispondenza dei punti di campionamento: una variazione "istantanea" di $v_c(t)$ comporta componenti di Fourier senza limite di frequenza.

Per analizzare meglio quali coefficienti a_i contribuiscano ad un dato coefficiente α_k osserviamo la tabella seguente, dove sono riportati a titolo di esempio i contributi corrispondenti ai valori di q compresi fra -3 e 3 (la riga marcata a_i si riferisce ai coefficienti che si sommano, la riga $-a_i$ a quelli che si sottraggono nell'espressione (7.3):

	q						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
a_i	$i = k - 3M$	$i = k - 2M$	$i = k - M$	$i = k$	$i = k + M$	$i = k + 2M$	$i = k + 3M$
$-a_i$					$i = M - k$	$i = 2M - k$	$i = 3M - k$

Gli spazi vuoti nell'ultima riga corrispondono ai casi in cui $i + k$ dovrebbe essere un multiplo negativo di M , ovviamente irrealizzabili in quanto $i, k \geq 1$. Si può visualizzare e generalizzare il risultato della tabella con una costruzione geometrica (vedi fig. 7.2) se immaginiamo un asse delle frequenze esteso da $-\infty$ a $+\infty$ su cui sono riportate le frequenze multiple della fondamentale $f_0 = 1/T$ del segnale (non vogliamo discutere in questo contesto di un eventuale significato fisico delle frequenze negative: le utilizziamo solo come artificio per visualizzare il risultato). A partire da ogni frequenza $f = qMf_0$ riportiamo lo spettro originale della $v(t)$ sia nel senso crescente delle frequenze (chiameremo

⁵ Vedi Appendice A.

questa serie di valori “banda diretta”) che in quello decrescente (“banda invertita”): il coefficiente α_k o β_k risulta in questo grafico in corrispondenza della frequenza kf_0 come combinazione (somma o sottrazione) dei contributi provenienti da tutte le bande di spettri (fig. 7.2a). In particolare, i termini della riga “ a_i ” in tabella con $q < 0$ ($i = k - M$, etc.) provengono da bande dirette centrate su frequenze positive inferiori a kf_0 , e danno contributo solo per valori di k sufficientemente grandi, almeno maggiori di M . I termini della riga “ a_i ” con $q > 0$ vengono dalle bande dirette centrate su frequenze negative; i termini

della riga “ $-a_i$ ”, infine, provengono dalle bande invertite aventi origine a frequenze superiori a kf_0 . Si vede subito che i coefficienti ripresentano gli stessi valori in ogni intervallo $qM \leq k < (q + 1)M$ e che in ciascun intervallo si ha una simmetria “speculare” intorno a $(q + \frac{1}{2})M$.

Se tuttavia consideriamo il caso in cui $M > 2n$ (fig. 7.2b), vediamo che le bande di spettri nella nostra costruzione non si sovrappongono e che, se ci limitiamo a prendere i coefficienti α_k e β_k con $0 \leq k < \frac{M}{2}$, essi coincidono con i rispettivi a_k e b_k della funzione originale $v(t)$. Questo caso si ha quando la frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{\tau} = Mf_0$ è maggiore del doppio della massima frequenza contenuta nel segnale $f_{\max} = nf_0$.

Abbiamo quindi dimostrato che se campioniamo a frequenza superiore al doppio della massima frequenza del segnale (teorema di Shannon) i coefficienti della D.F.T. calcolata dai campioni con $0 \leq k < \frac{M}{2}$ corrispondono a quelli del segnale originale, e quindi *contengono tutta l'informazione necessaria a ricostruire l'andamento di esso*.

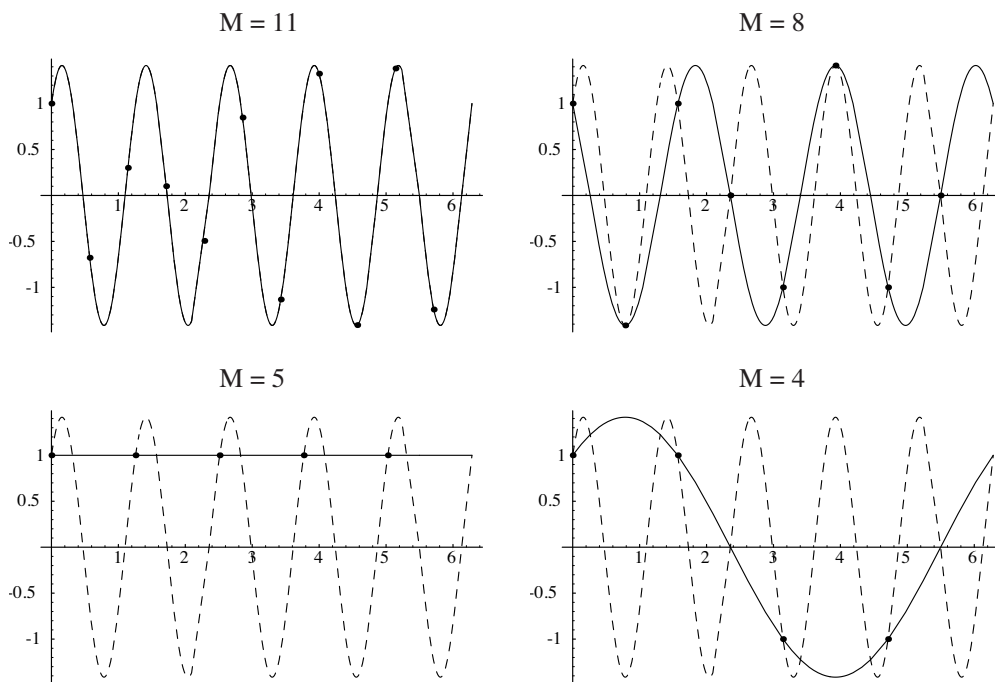


Fig 7.1: Effetto dell'aliasing nel campionamento della funzione $f(x) = \sin 5x + \cos 5x$ eseguito rispettivamente in 11,8,5,4 punti. La funzione ricostruita dal campionamento è disegnata a tratto continuo, mentre l'originale è tratteggiata. Sono riportati nei grafici i rispettivi punti di campionamento.

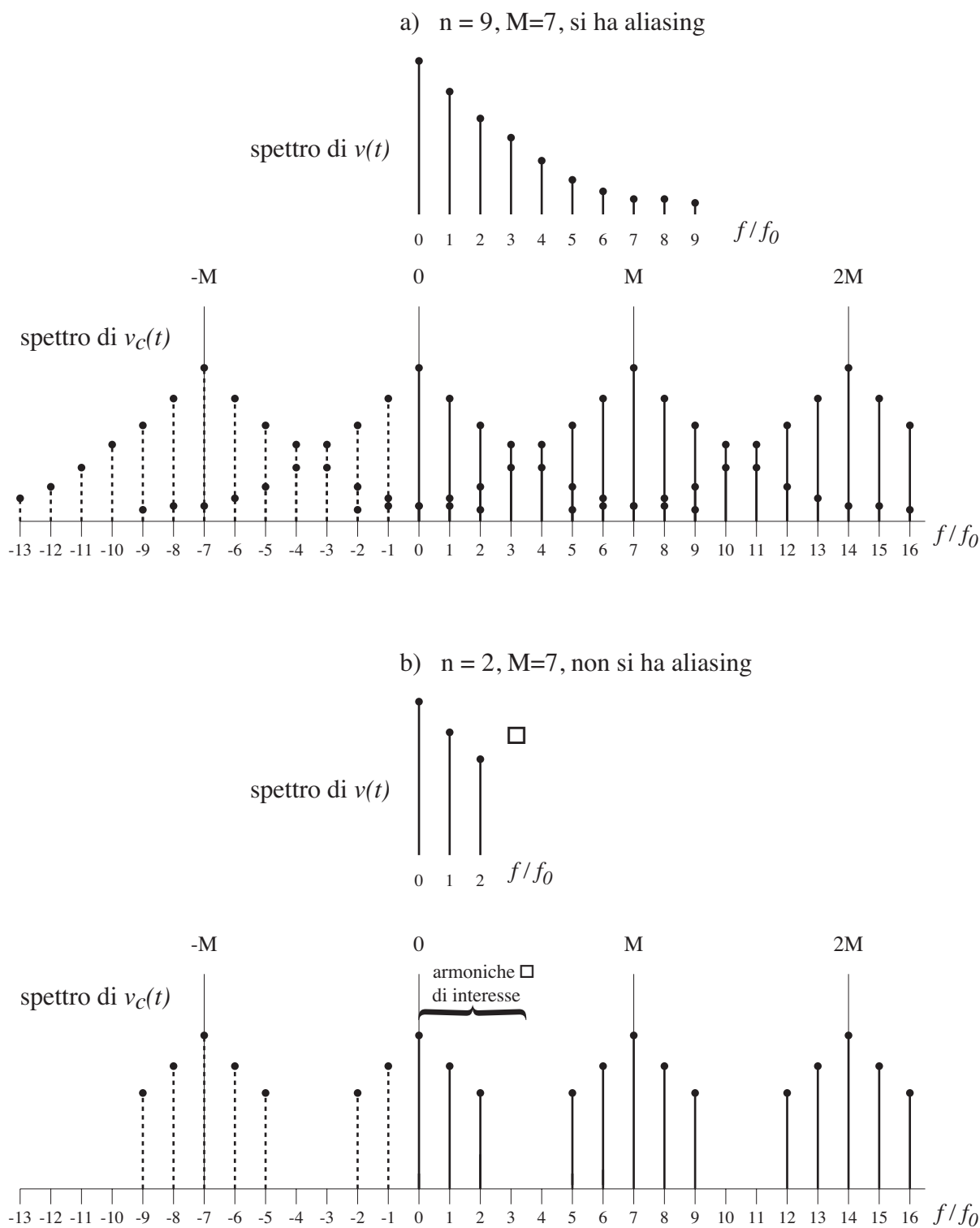


Fig 7.2: Costruzione grafica dei coefficienti della D.F.T.(i piccoli valori di n e M sono scelti a scopo di visualizzazione). a) caso con aliasing; b) caso privo di aliasing.

8. Schema a blocchi di un analizzatore D.F.T.

In fig. 8.1 è riportato uno schema a blocchi (semplificato) dell'analizzatore di spettro di tipo D.F.T modello SR770. Nei paragrafi che seguono, le caratteristiche riportate si riferiranno a questo apparecchio.

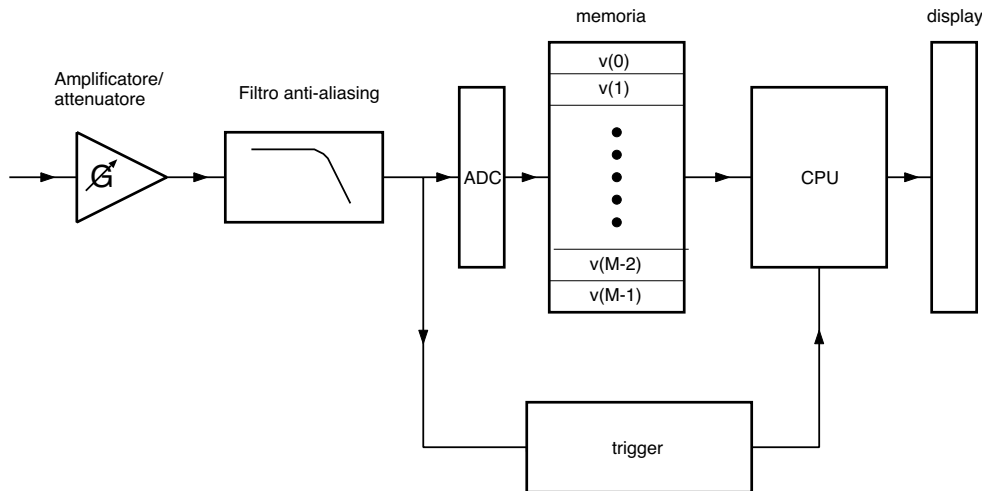


Fig 8.1: Schema a blocchi di un analizzatore D.F.T.

8.1 Amplificatore/Attenuatore

L'ingresso prevede un circuito amplificatore/attenuatore in grado di adattare il livello del segnale da analizzare al livello di funzionamento ottimale del convertitore Analogico-Digitale. Il convertitore fornisce in uscita un numero, corrispondente al valore della tensione di ingresso, con un totale di cifre significative determinato dal numero di bit del convertitore stesso. Nel SR770 un convertitore a 16 bit dà in uscita 65536 valori diversi, da -32768 a $+32767$. Ogni unità corrisponde ad un gradino fisso di tensione Δv . Un segnale all'ingresso dell'ADC, che supera il valore massimo consentito, $32767 \cdot \Delta v$, non potrà essere misurato correttamente; d'altra parte, un segnale che in corrispondenza del proprio massimo arrivi ad utilizzare solo una parte delle cifre significative disponibili sarà misurato con precisione inferiore a quella che gli apparecchi consentirebbero, se usati correttamente. La situazione è del tutto analoga al caso dell'oscilloscopio, dove si ha una regolazione della sensibilità dell'amplificatore del canale di deflessione verticale, o al caso del multimetro, dove si ha un condizionatore di segnale all'ingresso, mediante il quale si può variare il fondo scala a seconda dell'ampiezza del segnale da misurare.

Analogamente a multimetri ed oscilloscopi, anche nel caso dell'analizzatore D.F.T. questo circuito di ingresso introduce un errore di taratura percentuale che rimane costante all'interno di ciascuna scala di sensibilità dello strumento. Trattandosi di un amplificato-

re/attenuatore, questo errore viene comunemente espresso in db e nel caso del SR770 vale $\epsilon_i = \pm 0.2 db$, che corrisponde ad un errore nel coefficiente di amplificazione/attenuazione di circa il 2.3%.

8.2 Filtro anti-aliasing

La funzione di questo filtro è di limitare lo spettro del segnale che deve giungere all'ADC a frequenze $f < f_c/2$, per evitare i problemi di "aliasing" descritti nei paragrafi precedenti. In questo modo si elimina dal segnale una parte di informazione, se il contenuto spettrale supera la frequenza $f_c/2$; ma la parte di spettro al di sotto di $f_c/2$ viene misurata correttamente.

8.3 Convertitore ADC

Il segnale filtrato giunge al convertitore analogico-digitale, dove viene campionato con frequenza f_c . Questa operazione equivale, sotto tutti i punti di vista, alla misura fatta con un multimetro digitale; l'unica differenza di rilievo è costituita dalla velocità, che nel caso del multimetro è dell'ordine di qualche campionamento al secondo, nel caso del SR770 può arrivare fino a 256000 campionamenti al secondo.

Anche per gli errori di misura si applicano le stesse considerazioni che valgono per i multimetri: si avrà un errore di taratura, percentuale, costante su tutta la scala, più un errore di lettura indipendente su ciascun campionamento, dovuto ai limiti imposti dalla risoluzione, dalla non linearità del convertitore, e dal rumore elettrico nei circuiti. Il primo contributo di errore, quello di taratura, si va ad aggiungere all'errore analogo introdotto dal circuito amplificatore/attenuatore di ingresso, e normalmente è già inglobato in questo.

8.4 Memoria e CPU

Con l'operazione di conversione nell'ADC il processo di misura è completato; quello che segue è solo elaborazione numerica dei dati presi e quindi non ci sono ulteriori fonti di errore; si ha solo la propagazione degli errori delle misure originali, fino ai risultati finali in uscita, cioè i coefficienti a_n e b_n .

Dalle equazioni 5.1 si vede che i coefficienti a_n e b_n sono il risultato di una combinazione lineare delle misure originali $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{M-1}$. Pertanto, un errore percentuale costante sistematico su tutti i v_i si traduce in un errore percentuale sistematico di pari entità su tutti gli a_n e b_n ; questo vale quindi per l'errore introdotto dall'amplificatore/attenuatore di ingresso e per l'errore di taratura dell'ADC.

Riguardo all'errore di conversione ϵ_c , l'analogo dell'"errore di lettura" nel caso dei multimetri digitali, il discorso è più complesso. Si è detto al par. 8.3 che ciascuno dei v_i è affetto da un errore statistico indipendente ϵ_c , dell'ordine di una unità della cifra meno significativa. Tutti questi errori compaiono nell'espressione dell'errore finale su a_n e b_n con peso pari a $\sin(2\pi nm/M)$ o $\cos(2\pi nm/M)$. Poichè abbiamo supposto che i singoli ϵ_c siano statisticamente indipendenti, è ragionevole sommare quadraticamente i loro contributi all'errore totale e quindi, indicando con ϵ_n l'errore su a_n , si avrà:

$$\epsilon_n^2 = \left(\frac{2}{M}\right)^2 \sum_{m=0}^{M-1} \epsilon_c^2 \sin^2(2\pi nm/M) = \epsilon_c^2 \cdot \left(\frac{2}{M}\right)^2 \sum_{m=0}^{M-1} \sin^2(2\pi nm/M)$$

È possibile verificare che la sommatoria ha come risultato $M/2$ e quindi:⁶

$$\epsilon_n^2 = \epsilon_c^2 \cdot \frac{2}{M}$$

Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per b_n . Per l'apparecchio SR770, si ha, dichiarato dal costruttore nelle specifiche, $\epsilon_n = 0.003\%$ del fondo scala.

8.5 Trigger e velocità di campionamento

Il circuito di trigger è analogo a quello di cui sono dotati gli oscilloscopi: per far comparire in maniera stabile un segnale periodico sullo schermo di un oscilloscopio, è necessario far coincidere l'inizio della scansione orizzontale del pennello elettronico sempre con lo stesso istante di tempo all'interno del periodo.

In un analizzatore di spettro D.F.T. la misura può essere fatta anche su un solo periodo del segnale. Se però viene ripetuta su un altro periodo identico, prendendo un altro istante come inizio del campionamento, cioè un'altra origine dei tempi all'interno del periodo, si avrà uno spettro con lo stesso contenuto armonico del primo per quanto riguarda l'intensità delle varie componenti armoniche, ma con le fasi completamente diverse. Se Δt è la differenza di tempo all'interno del periodo T tra i due diversi inizi del campionamento, ciascuna componente armonica risulterà modificata nella sua fase di un angolo

$$\Delta\varphi_n = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \cdot n$$

È necessario quindi, se si vuole ripetere nel tempo la misura, far coincidere l'inizio del campionamento sempre con lo stesso istante di tempo all'interno del periodo, e a questo scopo l'apparecchio è dotato del circuito di trigger.

Analogamente alla regolazione della velocità di scansione orizzontale di un oscilloscopio, nell'analizzatore di spettro D.F.T. è possibile variare la velocità di campionamento del segnale e quindi l'ampiezza di spettro esaminata. Un ciclo di misura prevede 1024 campionamenti; se vengono effettuati alla velocità massima di 256 kHz , il ciclo durerà $T = 4 \text{ msec}$ e quindi la frequenza fondamentale sarà $f = 1/T = 250 \text{ Hz}$. Nello spettro saranno presenti le componenti di frequenza $f, 2f, 3f \dots 512f$.

In pratica l'apparecchio SR770 riporta solo le prime 400 di queste componenti; la misura delle rimanenti è disturbata dalla presenza del filtro anti-aliasing, in quanto non è possibile realizzare un filtro che tagli in maniera netta al di sopra di una certa frequenza e non disturbi per niente i segnali al di sotto; si avrà sempre una regione di transizione tra le due bande del filtro, quella trasmessa e quella soppressa.

⁶ Infatti $\sum_{m=0}^{M-1} \sin^2(2\pi nm/M) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(4\pi nm/M)}{2} \right] = \frac{M}{2}$ per la proprietà dimostrata in app. A.

Alla massima velocità di campionamento si avrà uno spettro da 0 a 100 kHz , contenente 400 componenti armoniche, spaziate di 250 Hz . Riducendo la frequenza di campionamento da 256 kHz a 128 kHz , si avranno sempre 400 componenti armoniche, ma a distanza di 125 Hz una dall'altra. Riducendo ulteriormente la frequenza di campionamento questi valori continueranno a scalare proporzionalmente come illustrato nella tabella seguente:

f_c	Δf	f_{max}	T
256 KHz	250 Hz	100 KHz	4 $msec$
128 KHz	125 Hz	50 KHz	8 $msec$
64 KHz	62.5 Hz	25 KHz	16 $msec$
...
1.953 Hz	1.907 mHz	0.763 Hz	524 sec
0.977 Hz	0.954 mHz	0.381 Hz	1049 sec
0.488 Hz	0.477 mHz	0.191 Hz	2097 sec

9. Presentazione dei risultati

I risultati possono essere presentati sullo schermo del SR770 in diverse forme equivalenti:

- parte in fase ed in quadratura di ogni componente armonica; è il modo di funzionamento basilare dell'apparecchio; i risultati presentati sono le due serie di dati a_n e b_n .
- ampiezza e fase: di ogni componente armonica viene data l'ampiezza $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e la fase $\varphi_n = \arctan b_n/a_n$.
- ampiezza e fase, come nel caso precedente, ma con l'ampiezza espressa in dbV invece che in V . La misura di un segnale S in dbV è l'intensità del segnale in db rispetto ad un segnale convenzionale di riferimento di ampiezza 1V:

$$S/dbV = 20 \cdot \log_{10} S/V$$

In ogni caso il modo di lavorare interno dell'apparecchio rimane sempre lo stesso, cioè vengono calcolati i coefficienti a_n e b_n a partire dai campionamenti v_0, v_1, \dots e gli altri modi di presentare i dati sono solo elaborazioni successive dei valori a_n e b_n .

10. Generazione di armoniche in una rete non lineare e loro misura

Quando una rete lineare viene alimentata con una tensione sinusoidale pura, cioè una tensione periodica il cui spettro contiene un solo termine di una sola frequenza (angolare) ω , le tensioni e le correnti in qualsiasi punto della rete saranno sempre tensioni e correnti della stessa frequenza, la cui ampiezza e fase dipenderanno dalla risposta della rete.

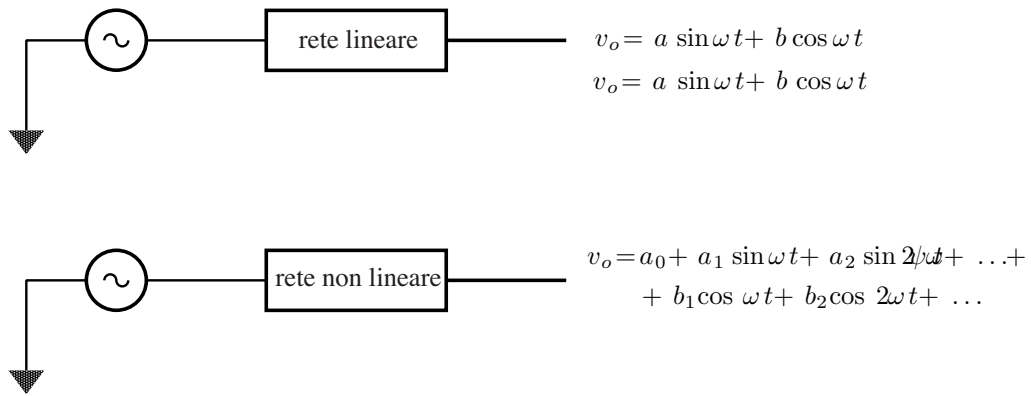


Fig 10.1: Generazione di armoniche in una rete non lineare.

Se la rete contiene anche elementi non lineari, le tensioni e le correnti ottenute non saranno più segnali spettralmente puri ma compariranno armoniche superiori, cioè componenti di frequenza 2ω , 3ω , ecc. (fig. 10.1).

Un esempio di circuito non lineare è riportato in fig. 10.2: due diodi semiconduttore contrapposti, la cui relazione tensione corrente è riportata in fig. 10.3. Se si esprime questa relazione sotto forma di serie polinomiale

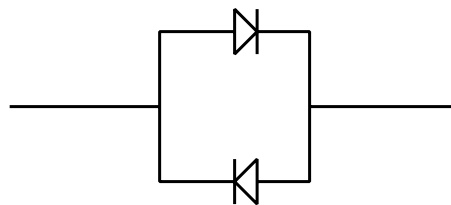


Fig 10.2: Esempio di circuito non lineare.

$$v = a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \dots$$

e si suppone che la corrente i provenga da un generatore sinusoidale puro $i = i_0 \cdot \sin(\omega t)$, si avrà

$$v = a_1 \cdot i_0 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot i_0^2 \cdot \sin^2(\omega t) + a_3 \cdot i_0^3 \cdot \sin^3(\omega t) + \dots$$

Tenendo presente gli sviluppi delle funzioni trigonometriche:⁷

⁷ Per una formula ricorsiva che dà i coefficienti degli sviluppi, vedi appendice C.

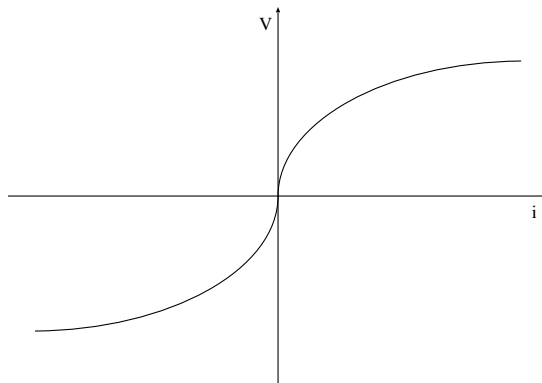


Fig 10.3: Relazione corrente–tensione nel circuito non lineare della fig. precedente.

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$$

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t)$$

$$\sin^4(\omega t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t) + \frac{1}{8} \cos(4\omega t)$$

...

si vede che ogni termine di grado n del polinomio genera armoniche superiori fino a frequenza angolare $n\omega$.

In fig. 10.4 è riportata la disposizione degli strumenti per misurare la distorsione armonica di una rete non lineare.

L'analizzatore SR770 è dotato internamente di un generatore di segnale sinusoidale puro. Si invia il segnale del generatore, regolato per 250Hz o per una frequenza multipla intera, all'ingresso della rete non lineare e l'uscita di questa all'ingresso dell'analizzatore. Contemporaneamente si possono osservare su un oscilloscopio i due segnali, confrontandone direttamente i due tracciati, o, ponendo l'oscilloscopio in modalità X-Y, osservando la funzione $v_o(v_i)$.

11. Misura del contenuto spettrale di un segnale ad onda quadra

Un'onda quadra è un segnale che oscilla periodicamente tra due valori di tensione v_a e v_b . La transizione da un valore all'altro si considera istantanea (fig. 11.1).

Propriamente, il termine onda quadra si riferisce al caso in cui $t_a + t_c = t_b$; altrimenti si parla di onda rettangolare. Il periodo è $T = t_a + t_b + t_c$ e il rapporto t_b/T prende il nome di "duty cycle" (rapporto di servizio). In laboratorio si dispone di un generatore di onda quadra che fornisce, a frequenza di 1kHz , ossia con $T = 10^{-3}\text{s}$, un impulso di trigger (che inviato all'analizzatore comanda l'inizio del campionamento) e il segnale, di cui si può

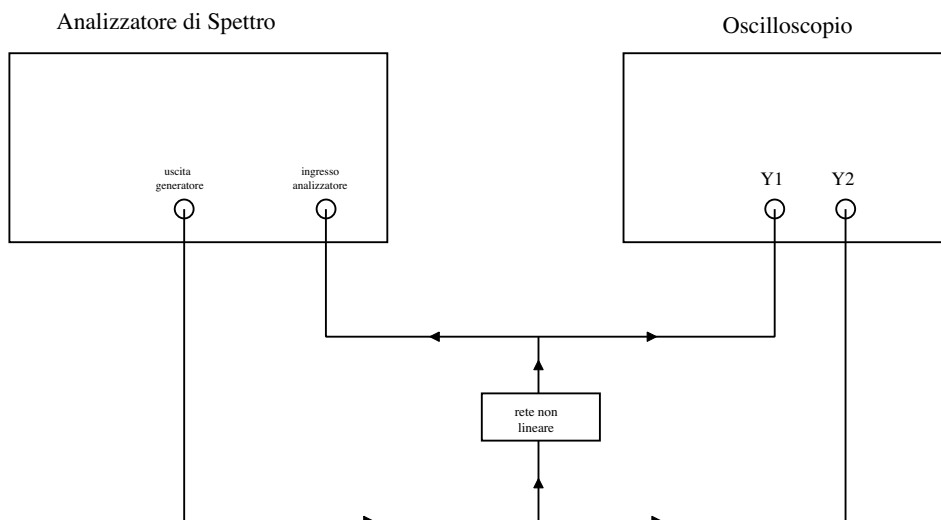


Fig 10.4: Circuito per la misura della distorsione introdotta da una rete non lineare.

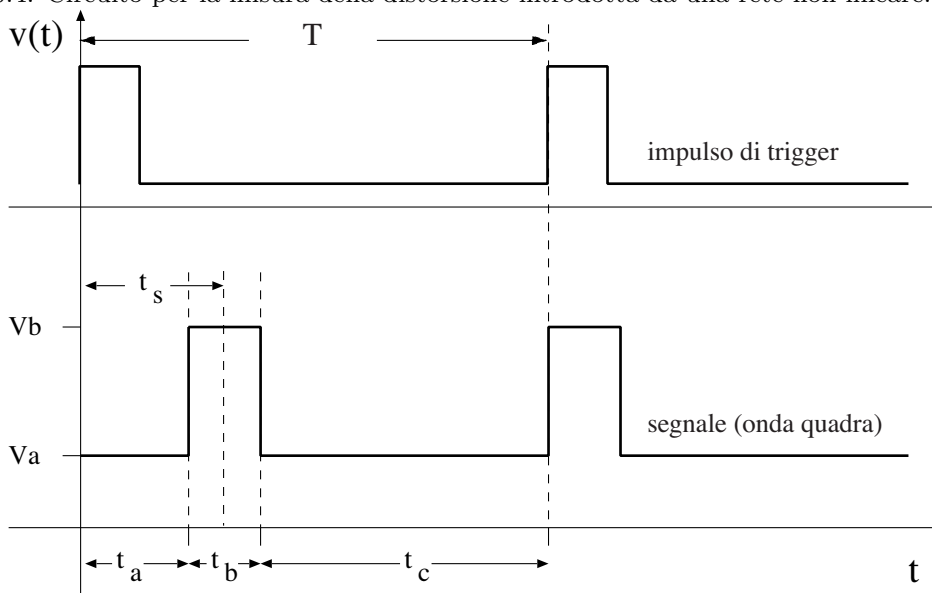


Fig 11.1: Onda quadra di cui si misura il contenuto spettrale e relativo segnale di trigger.

variare la durata t_b e il ritardo t_a rispetto al trigger.

Il contenuto armonico del segnale dipende da t_a , t_b , t_c :

$$\frac{b_0}{2} = \frac{V_b t_b + V_a (t_a + t_c)}{T}$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left[\cos \left(2\pi n \frac{t_a + t_b}{T} \right) - \cos \left(2\pi n \frac{t_a}{T} \right) \right] (V_b - V_a)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left[\sin \left(2\pi n \frac{t_a + t_b}{T} \right) - \sin \left(2\pi n \frac{t_a}{T} \right) \right] (V_b - V_a)$$

Sommando quadraticamente i termini a_n e b_n si verifica che l'ampiezza delle varie componenti armoniche $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ non dipende dalla fase del segnale, cioè da t_a , ma solo dal rapporto di servizio t_b/T :

$$A_n = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} |V_b - V_a| \sqrt{1 - \cos \left(2\pi n \frac{t_b}{T} \right)}$$

La fase di ciascuna componente dipende invece dalla posizione del centro dell'impulso, corrispondente al tempo $t_s = t_a + \frac{t_b}{2}$, rispetto all'inizio del campionamento, e non varia al variare della durata t_b , purché si mantenga costante t_s .

$$\phi_n = \frac{\pi}{2} - 2\pi n \frac{t_a + \frac{t_b}{2}}{T}$$

L'analizzatore di spettro fornisce la misura di fase in gradi, ricondotta nell'ambito fra -180° e 180° ; il valore di fase è attendibile solo per i valori di frequenza in corrispondenza dei quali l'ampiezza dello spettro è significativamente diversa da zero, ossia, per questa misura, alla frequenza fondamentale (1 kHz) e alle sue armoniche.

APPENDICI

A: proprietà delle somme di seni e coseni

Vogliamo dimostrare che

$$\sum_{m=0}^{M-1} \cos\left(\frac{2\pi}{M} k m\right) = M \delta_{k, l M} \quad \sum_{m=0}^{M-1} \sin\left(\frac{2\pi}{M} k m\right) = 0 \quad \forall k$$

dove k e l sono interi qualunque, positivi o negativi, ovverosia che la somma dei coseni sugli angoli dati è non nulla solo quando k è un multiplo di M , mentre quella sui seni è sempre nulla.

Questa proprietà è stata invocata esplicitamente nel paragrafo 7 del testo, e, una volta dimostrata, permette facilmente di ricavare le relazioni di ortogonalità (5.2).

La dimostrazione che segue è la prima ricavata dall'autore di questa appendice (A. Perego): in seguito egli stesso si è reso conto che, affrontando il problema in modo diverso, utilizzando i numeri complessi, si poteva arrivare alla stessa soluzione con fatica enormemente minore. Non di meno, si preferisce presentare prima la “vecchia” dimostrazione più laboriosa, in quanto:

1. illustra la proprietà da un punto di vista geometrico abbastanza interessante
2. il confronto con la dimostrazione “breve” mostra quanto un approccio diverso possa accorciare la strada per risolvere un problema.

Possiamo osservare subito che gli angoli su cui sono calcolate le funzioni trigonometriche, $\frac{2\pi}{M} k m$, sono multipli interi di $\frac{2\pi}{M}$. Se consideriamo il cerchio goniometrico di raggio unitario e un poligono regolare di M lati in esso inscritto, di cui numeriamo i vertici consecutivi in senso antiorario da 0 a $M - 1$ e poniamo il vertice 0 in corrispondenza dell'angolo nullo, gli angoli in questione corrispondono ciascuno alla posizione di uno dei vertici del poligono stesso (non possiamo affermare però, a questo punto, che ciascun angolo della sommatoria corrisponda ad un vertice diverso). Se supponiamo di porre un punto di massa unitaria in ogni vertice del poligono, le due sommatorie corrispondono rispettivamente a M volte l'ascissa e l'ordinata del *centro di massa* del sistema di punti materiali sui vertici corrispondenti agli angoli. Utilizzando questa proprietà diventa facile valutare le sommatorie. I vertici del poligono corrispondenti agli angoli delle sommatorie sono nell'ordine gli elementi della successione intera

$$V_m = [k m]_M \quad m = 0, M - 1$$

dove con il simbolo $[\dots]_M$ indichiamo la quantità in parentesi valutata *modulo* M , ossia il resto che si ottiene eseguendo la divisione di essa per M . Possiamo fare subito due semplificazioni riguardo al campo di valori di k . La prima è di limitarci a valori positivi o nulli di k : infatti nel passare da k a $-k$ tutti gli angoli cambiano segno; la sommatoria dei coseni resta invariata, mentre quella dei seni cambia segno, ma se era nulla per k (come dimostreremo) lo rimane per $-k$. La seconda limitazione consiste nel considerare solo i

valori di k compresi fra 0 e $M - 1$. Se infatti $k = qM + [k]_M$ dove $q > 0$ e $[k]_M$ sono rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione intera k/M , avremo

$$V_m = [(qM + [k]_M)m]_M = [qMm + [k]_M m]_M = [[k]_M m]_M = [hm]_M$$

dove con $h = [k]_M$. Come si vede, la successione V_m dipende solo da h . Dimostreremo nel seguito che la successione V_m si comporta, a seconda del valore di h , in uno dei tre modi seguenti:

- se $h = 0$ (e quindi per ogni k multiplo di M), tutti gli angoli delle sommatorie corrispondono al vertice 0; in questo caso l'ascissa del centro di massa vale 1 e l'ordinata vale 0, per cui la sommatoria dei coseni vale M e quella dei seni è nulla.
- Se $h \neq 0$ e M è primo rispetto a h (ossia se il massimo comun denominatore di h e M vale 1, cosa sicuramente vera per ogni h se M è primo) la successione tocca una sola volta ciascuno degli M vertici del poligono. In questo caso sia l'ascissa che l'ordinata del centro di massa cercato sono nulle per simmetria, e quindi si annullano entrambe le sommatorie.
- Se $h \neq 0$ e M ed h hanno massimo comun denominatore $j > 1$, i vertici toccati sono quelli di un poligono regolare di M/j lati (il cui primo vertice coincide con il vertice 0 del poligono di partenza) e ciascun vertice è toccato j volte. Anche in questo caso vale la considerazione sulla simmetria e le sommatorie si annullano. È da notare che in questo contesto dobbiamo estendere il concetto di "poligono regolare" a comprendere quello di 2 lati, avente i vertici corrispondenti agli angoli 0 e π (potremmo spingerci ancora oltre e considerare la prima delle tre situazioni come un poligono regolare *di un solo lato* di misura nulla, visto che un segmento nullo è il solo che possa congiungere un punto con se stesso!).

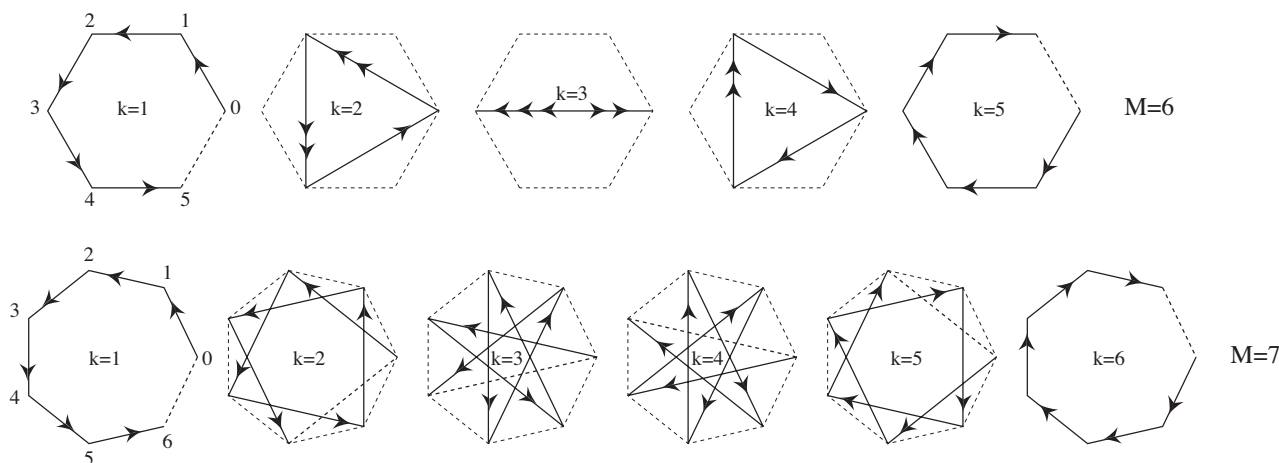


Fig a1: esempi della successione V_m per $M = 6$ e $M = 7$. Nel caso $M = 6$ le successioni con $k = 2, 3, 4$ rientrano nel terzo tipo di comportamento trattato nel testo.

Quanto sopra è visualizzato in fig. a1. Il primo dei tre casi da considerare è evidente e non necessita di ulteriore dimostrazione. Nel secondo caso, supponiamo che arrivati nella

successione ad un certo valore m_2 di m si raggiunga per la prima volta un vertice che era già stato toccato prima con $m = m_1$ e, ovviamente, $0 < m_1 < m_2 \leq M - 1$, ossia che $V_{m_1} = V_{m_2}$. Da questo punto in poi la successione entrerebbe in un ciclo comprendente i vertici $V_{m_1}, V_{m_1+1} \dots V_{m_2-1}, V_{m_2} = V_{m_1}$. Se fosse $V_{m_2} \neq 0$ nel ciclo non potrebbe essere compreso il vertice 0 (altrimenti questo sarebbe il primo ad essere stato toccato due volte, contraddicendo l'ipotesi) e quindi, anche proseguendo con la successione fino all'infinito, non toccheremmo mai il vertice 0, mentre in ogni caso $V_M = 0$. Questo assurdo ci assicura del fatto che il primo vertice ad essere raggiunto due volte può essere solo il vertice 0. Supponiamo allora che per $m = m_1 < M$ si raggiunga di nuovo il vertice 0: questo è possibile solo se $hm_1 = qM$ con q intero, ma questo contraddice la situazione da cui eravamo partiti, ossia che h ed M fossero primi fra loro. Infatti se h non contiene nessuno dei fattori primi di M , deve contenerli tutti m_1 , ma questo implica m_1 multiplo di M , contrariamente all'ipotesi. Se ne deduce infine che, non potendosi raggiungere nessun vertice due volte con $m < M$, nella successione $m = 0, M - 1$ saranno raggiunti una sola volta tutti i vertici.

Per affrontare il terzo caso, premettiamo una proprietà dell'aritmetica modulare, ossia il fatto che se $a = jb$ e $c = jd$, con a, b, c, d, j interi, $[a]_c = j[b]_d$. Infatti, esprimendo b come $b = qd + [b]_d$ si ha

$$[a]_c = [j(qd + [b]_d)]_c = [qjd + j[b]_d]_c = j[b]_d$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che il primo termine qjd è multiplo di c e quindi si può elidere nel valutare il modulo, mentre il secondo termine, essendo $[b]_d < d$, risulta minore di c , e ovviamente $[x]_y = x$ se $x < y$.

Se quindi $j > 1$ è il MCD di h e M , avremo che $h = jh'$ e $M = jM'$, con h' e M' primi fra loro. Per la proprietà sopra dimostrata avremo quindi

$$V_i = [hi]_M = j[h'i]_{M'}$$

Per quanto visto nel caso precedente, la successione $[h'i]_{M'}$ assume per $i = 0, M' - 1$ una sola volta tutti i valori da 0 a $M' - 1$. Proseguire fino a $M - 1$ significa percorrere j volte questo ciclo, e quindi toccare i valori da 0 a $M' - 1$ j volte ciascuno. In corrispondenza di tali valori avremo i vertici $0, j, 2j, \dots, (M' - 1)j$ che sono proprio quelli del poligono regolare di $M' = M/j$ lati.

Una dimostrazione molto più semplice si può dare partendo dall'espressione

$$\sum_{m=0}^{M-1} e^{2\pi i k \frac{m}{M}} = \sum_{m=0}^{M-1} \cos\left(\frac{2\pi}{M} k m\right) + i \sum_{m=0}^{M-1} \sin\left(\frac{2\pi}{M} k m\right)$$

dove i rappresenta l'unità immaginaria. La sommatoria può essere messa nella forma di una serie armonica:

$$\sum_{m=0}^{M-1} e^{2\pi i k \frac{m}{M}} = 1 + e^{2\pi i k \frac{1}{M}} + e^{2\pi i k \frac{2}{M}} + \dots = \sum_{m=0}^{M-1} \left[e^{2\pi i k \frac{1}{M}} \right]^m$$

Se consideriamo una serie armonica generica

$$S_n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n$$

abbiamo due casi: se $\alpha = 1$ banalmente $S_n = n + 1$; se $\alpha \neq 1$, è ben noto il metodo per ottenere la somma della serie dalle relazioni

$$\alpha S_n = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n+1} \quad \text{da cui} \quad (1 - \alpha)S_n = 1 - \alpha^{n+1} \quad \text{e quindi} \quad S_n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}.$$

Osserviamo che $e^{2\pi i k \frac{1}{M}} = 1$ se e solo se l'esponente è nullo o multiplo intero di $2\pi i$, ossia se k è multiplo di M . In tale caso

$$\sum_{m=0}^{M-1} \cos\left(\frac{2\pi}{M} k m\right) + i \sum_{m=0}^{M-1} \sin\left(\frac{2\pi}{M} k m\right) = M$$

in accordo con la proprietà enunciata. In tutti gli altri casi

$$\sum_{m=0}^{M-1} e^{2\pi i k \frac{m}{M}} = \frac{1 - e^{2\pi i k \frac{M}{M}}}{1 - e^{2\pi i k \frac{1}{M}}} = 0$$

in quanto l'argomento dell'esponenziale al numeratore è $\forall k$ multiplo di $2\pi i$. Quest'ultima relazione completa la dimostrazione.

B: la “delta” di Dirac

La *delta* fu introdotta per la prima volta da P.A.M. Dirac in un suo lavoro di meccanica quantistica del 1927, come una *funzione* caratterizzata dalle seguenti proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \quad \forall f(x) \end{array} \right.$$

Lo scopo di Dirac era decisamente “fisico”: la sua *delta* doveva servire a mettere in formule un dualismo che esiste già nella fisica classica fra grandezze fisiche estensive, come massa e carica, di cui si suppone una densità finita nello spazio, e concetti come quello di punto materiale e carica puntiforme. I matematici del tempo impiegarono pochissimo a scoprire che la delta non aveva i requisiti per potersi chiamare *funzione*, ma ci vollero diversi anni prima che essa, ed altri “oggetti” del genere, fossero catalogati come *distribuzioni* ed inseriti in una teoria comprensiva e soddisfacente. Non vogliamo (né potremmo) fare qui una introduzione minimamente rigorosa: ci limiteremo ad un approccio esclusivamente intuitivo per dare un minimo di idea di come la cosa funzioni in pratica.

Possiamo pensare a famiglie di funzioni $g(x, a)$ con $a > 0$ tali che $\int_{-\infty}^{\infty} g(x, a) dx = 1$ e tali che al decrescere di a il contributo sostanziale all'integrale sia dato da una zona sempre più stretta di valori intorno a 0, ossia, come si suol dire, funzioni sempre più “piccate”

intorno a 0 (nello spirito di quanto detto sopra, questa non ha la minima pretesa di essere una definizione matematica!). Funzioni di questo tipo possono essere

$$\begin{aligned}
 g_1(x, a) &= \begin{cases} \frac{1}{2a} & \forall x \in [-a, a] \\ 0 & \forall x \notin [-a, a] \end{cases} \\
 g_2(x, a) &= \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}|x| & \forall x \in [-a, a] \\ 0 & \forall x \notin [-a, a] \end{cases} \\
 g_3(x, a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

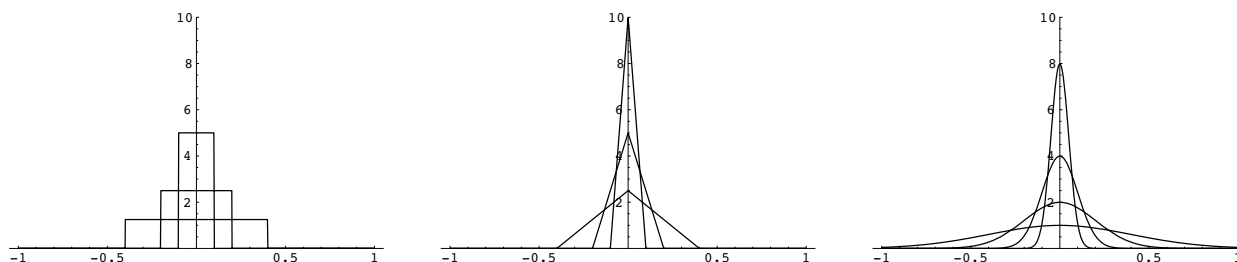


Fig a2: grafico delle funzioni (A.1) per diversi valori di a .

La delta può essere intesa come “limite”⁸ di una di queste famiglie di funzioni per $a \rightarrow 0$. Corrispondentemente avremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx \rightarrow \int_{-q(a)}^{q(a)} f(x)\delta(x) dx = \frac{f(\bar{x})}{q(a)} \int_{-q(a)}^{q(a)} \delta(x) dx \rightarrow f(0)$$

$q(a) \rightarrow 0$ $\bar{x} \in [-q(a), q(a)]$

dove abbiamo usato nel penultimo passaggio il teorema della media. Si vede anche che se l'integrale, anziché andare da meno a più infinito, è limitato in una zona finita intorno allo 0 il risultato non cambia.

C: formule ricorsive per lo sviluppo di potenze di funzioni trigonometriche

Possiamo trovare formule che aiutano a determinare i coefficienti della scomposizione in serie di Fourier di una funzione trigonometrica: consideriamo $\sin^n x$ e supponiamo di conoscere già i coefficienti della scomposizione di $\sin^{n-1} x$, che chiameremo $a_k^{(n-1)}$ e $b_k^{(n-1)}$. Dalle formule (1.2) risulta

$$\begin{aligned}
 a_k^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^n x \sin(kx) dx \\
 b_k^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^n x \cos(kx) dx
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

⁸ Il concetto di limite qui usato non è quello dell'analisi elementare, tanto che si parla di limite e convergenza *deboli*.

Gli integrali (A.3) possono essere scomposti come segue

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^n x \sin(kx) dx &= \int_0^{2\pi} \sin^{n-1} x \sin(kx) \sin x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^{n-1} x \{ \cos [(k-1)x] - \cos [(k+1)x] \} dx \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^n x \cos(kx) dx &= \int_0^{2\pi} \sin^{n-1} x \sin x \cos(kx) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^{n-1} x \{ \sin [(k+1)x] - \sin [(k-1)x] \} dx \end{aligned}$$

Confrontandosi con le definizioni dei coefficienti avremo immediatamente

$$\begin{aligned} a_k^{(n)} &= \frac{1}{2} [b_{k-1}^{(n-1)} - b_{k+1}^{(n-1)}] & k \geq 1 \\ b_k^{(n)} &= \frac{1}{2} [a_{k+1}^{(n-1)} - a_{k-1}^{(n-1)}] & k \geq 0 \end{aligned}$$

Nell'ultima formula va notato che nell'espressione di $b_0^{(n)}$ compare $a_{-1}^{(n-1)}$. Tale coefficiente non è definito nella serie di Fourier, ma se consideriamo l'integrale da cui l'abbiamo derivato vediamo che esso vale $-a_1^{(n-1)}$. Con questa precisazione abbiamo due formule che ci permettono di calcolare ricorsivamente i valori dei coefficienti. Un esempio di calcolo dei coefficienti fino a $n = 6$ è riportato in tabella.

n	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4	a_5	b_5	a_6	b_6
1		1											
2	1				$-\frac{1}{2}$								
3		$\frac{3}{4}$				$-\frac{1}{4}$							
4	$\frac{3}{4}$				$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{8}$					
5		$\frac{5}{8}$				$-\frac{5}{16}$				$\frac{1}{16}$			
6	$\frac{5}{8}$				$-\frac{15}{32}$				$\frac{3}{16}$				$-\frac{1}{32}$