

Misura del campo magnetico terrestre mediante una sonda di Hall ad alta sensibilità.

Premessa:

la sonda che si ha a disposizione è una sonda di Hall ad alta sensibilità. Essa misura la componente \mathbf{B}_S di \mathbf{B} lungo la direzione maggiore dell'involucro che contiene la sonda (il verso è indicato da una piccola freccia disegnata sull'involucro).

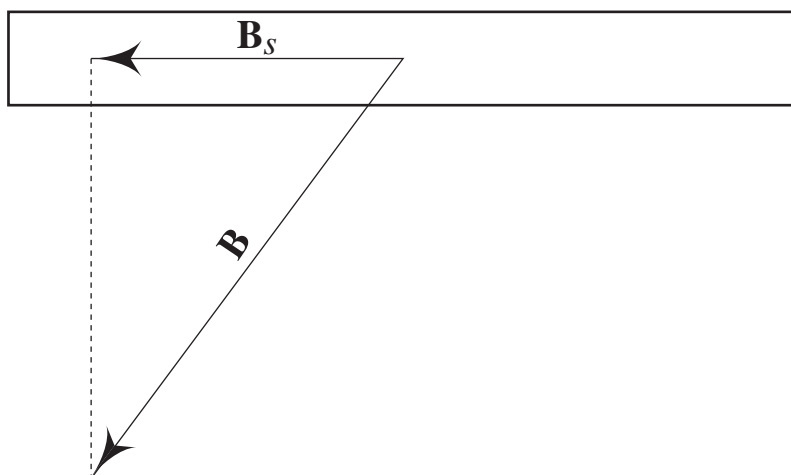


Fig 1: Schema della sonda con il campo effettivo e la componente misurata.

L'alta sensibilità della sonda è ottenuta, oltre che ottimizzandone le proprietà intrinseche, anche disponendo all'interno di essa del materiale ad alta permeabilità magnetica con lo scopo di "catturare" il maggior numero di linee di \mathbf{B} .

Questo metodo di "amplificazione" di \mathbf{B} presenta lo svantaggio di introdurre non linearità nella risposta della sonda per valori di \mathbf{B} superiori a qualche Gauss ($1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ T}$), dovuta presumibilmente alla saturazione del materiale ferromagnetico; sempre per questo motivo, inoltre – e questo è forse l'effetto che maggiormente disturba nelle nostre applicazioni – la sonda presenta il fenomeno dell'isteresi, ossia il fatto che, fissato il valore della componente \mathbf{B}_S lungo la sonda, la tensione presente in uscita dipende non solo da \mathbf{B}_S e da V_{off} (tensione di offset o di disallineamento) ma anche dalla "storia precedente", ovvero dall'ampiezza della componente \mathbf{B}_S misurata precedentemente dalla sonda.

$$V_H = k_H B_S + V_{\text{off}} + V_{IS} \quad (1)$$

Se non si tratta correttamente l'informazione contenuta in V_H (formula (1)) si potranno avere serie non riproducibilità delle misure. Più avanti vedremo come operare correttamente per tenere nel dovuto conto la presenza di V_{IS} ; per ora ci basti di sapere che, se la

misura di \mathbf{B}_S è preceduta da una situazione in cui \mathbf{B}_S assumeva un certo valore $\mathbf{B}_{S_{\max}}$ positivo, V_{IS} sarà positiva e approssimativamente proporzionale a $\mathbf{B}_{S_{\max}}$; se invece il valore estremo assunto da \mathbf{B}_S era stato $\mathbf{B}_{S_{\min}}$ (negativo) V_{IS} sarà negativa e – ovviamente – proporzionale a $\mathbf{B}_{S_{\min}}$.

L'apparato sperimentale

La sonda può ruotare attorno ad un asse perpendicolare alla dimensione maggiore del suo involucro, asse passante per il centro della sonda; questa rotazione è indicata nel seguito con l'angolo ψ , assunto 0 quando la sonda è allineata con l'asse delle bobine di Helmholtz (vedi sotto). L'angolo ψ è letto da un goniometro solidale col movimento.

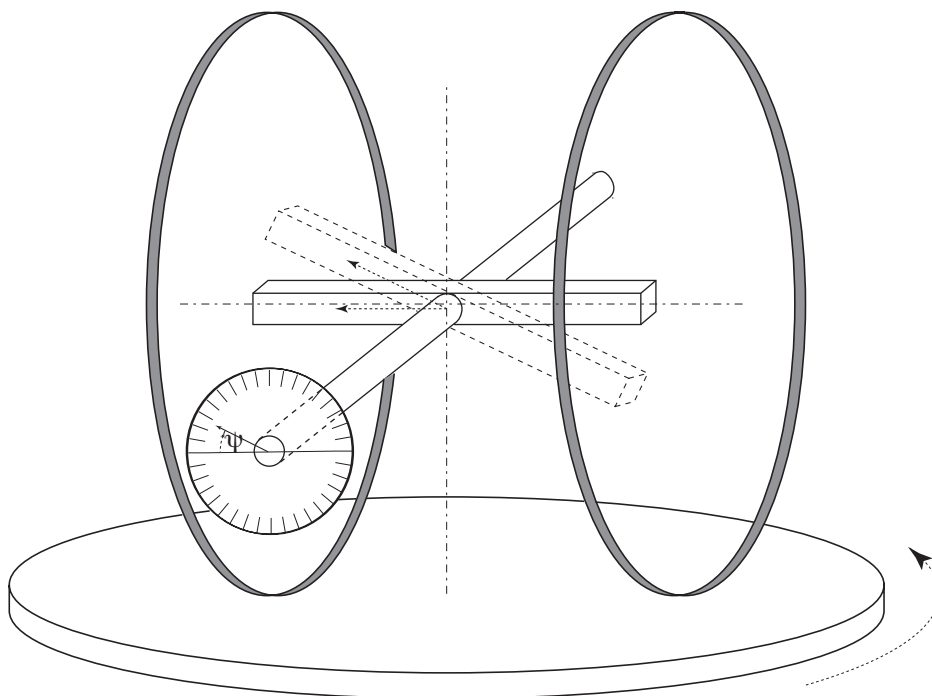


Fig 2: visione schematica del supporto della sonda.

La sonda è montata (quando $\psi = 0$) lungo l'asse di una coppia di bobine di Helmholtz che – a loro volta – sono rigide con una giostra che può ruotare intorno ad un asse verticale passante, idealmente, per il centro della sonda e quindi perpendicolare all'asse di rotazione già descritto (angolo ψ).

Tramite una vite con ampia manopola è possibile liberare questo movimento, ovvero bloccarlo in una posizione definita. Il disco orizzontale che serve da supporto per le bobine e la sonda è messo in piano mediante viti calanti bloccabili; una livella a bolla, posta sul disco stesso, fa da riferimento per la messa in piano.

Il disco reca incise delle tacche ogni 45° . Esse servono per definire la posizione angolare del supporto e quindi della sonda e delle bobine rispetto ad un indice fisso solidale col tavolo, a sua volta rigidamente fissato sul pavimento.

Si noti che tutti i materiali che circondano la sonda sono amagnetici (legno, ottone, plastiche, alluminio) per evitare che il campo magnetico terrestre venga alterato localmente in maniera significativa.

Definizione del sistema di riferimento

Viene suggerita una terna di mano destra con l'asse x diretto approssimativamente verso Nord, l'asse y verso Est e l'asse z secondo la verticale positiva discendente.

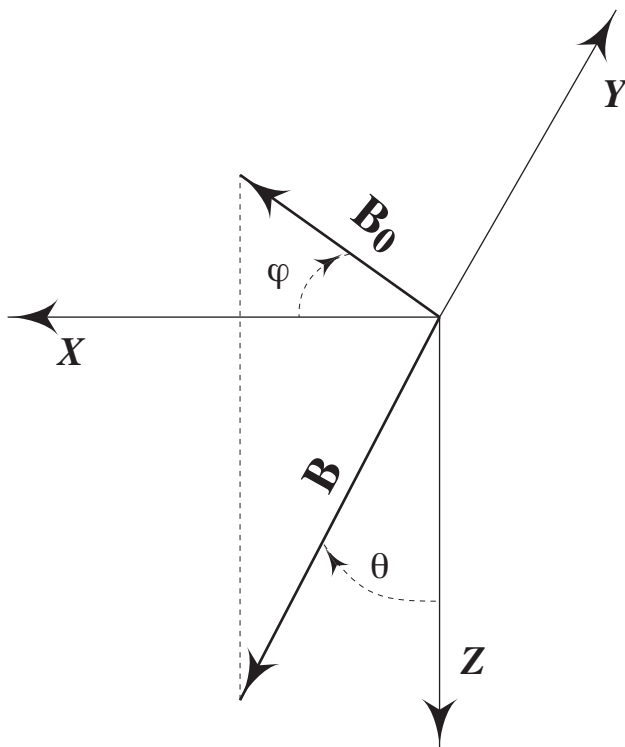


Fig 3: riferimento usato nell'esperienza; l'asse Z punta verso il basso e il riferimento è visto da sopra. \mathbf{B} : campo d'induzione magnetica terrestre, \mathbf{B}_0 : componente orizzontale.

Si definiscono anche gli angoli polari θ e φ , secondo quanto mostrato in fig. 3. Avremo allora

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \\
 B_z &= B \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos \frac{B_z}{B} \\
 \left. \begin{aligned} B_x &= B \sin \theta \cos \varphi \\ B_y &= B \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan \frac{B_y}{B_x}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Per definire il sistema di riferimento si scelga una tacca incisa sul disco e la si faccia coincidere con l'indice solidale al tavolo; la tacca suggerita è quella contrassegnata col numero 3 sul disco.

Il sistema di riferimento suggerito differisce da quello tradizionalmente usato, riportato in fig. 4:

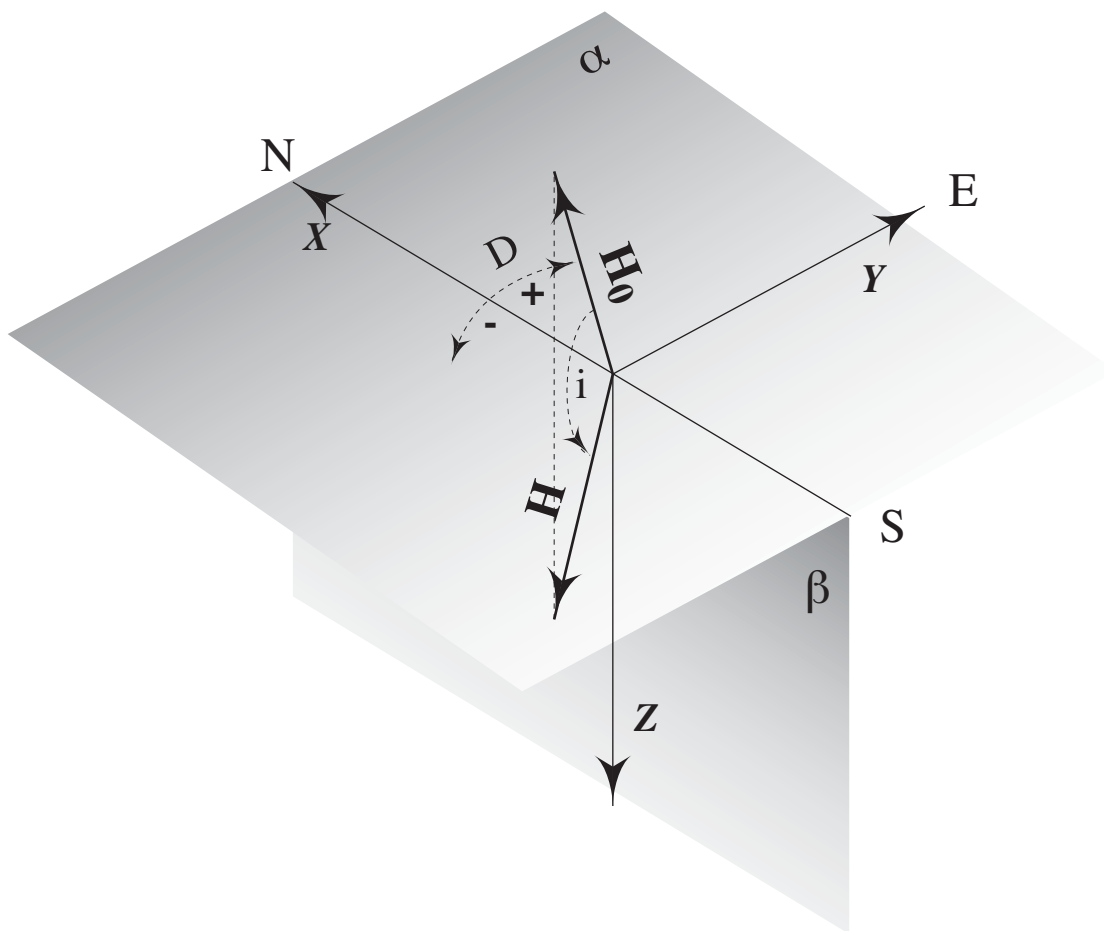


Fig 4: riferimento tradizionalmente usato nelle misure di campo magnetico terrestre (visto da sopra).

Il piano β che contiene X e Z è il piano del meridiano geografico del luogo, ovvero l'asse X punta verso il Nord geografico. Il piano α è il piano orizzontale del luogo. L'angolo che la componente orizzontale \mathbf{H}_0 del campo magnetico terrestre forma con l'asse delle X è detto *declinazione magnetica* e indicato con D . L'angolo fra la direzione di \mathbf{H} e la sua proiezione sul piano orizzontale si indica con i ed è detto *inclinazione magnetica*.

Questo sistema di riferimento si può impiegare solo se si è preventivamente individuata la direzione del Nord geografico; nel nostro caso, per semplicità, abbiamo definito un sistema di riferimento che **solo approssimativamente** ha l'asse orizzontale X allineato con il Nord geografico.

Si noti anche che quando si parla di campo magnetico terrestre propriamente si parla del campo magnetico \mathbf{H} . La distinzione fra il campo \mathbf{H} e il campo \mathbf{B} (propriamente: *campo di induzione magnetica*) sarà chiarita durante il corso di Fisica Generale II. Nel seguito ci riferiremo sempre al campo \mathbf{B} , anche se talvolta lo chiameremo impropriamente "campo magnetico".

La taratura della sonda

Prima di poter misurare un qualsiasi campo magnetico con la nostra sonda è necessario provvedere alla taratura della medesima mediante un campo magnetico noto. A questo scopo sul supporto della sonda sono state fissate anche due *bobine di Helmholtz*. Prende tale nome il dispositivo costituito da due bobine circolari disposte sullo stesso asse a una distanza fra i centri pari al raggio delle bobine stesse; esse devono avere inoltre lo stesso numero di spire ed essere attraversate da una stessa corrente nello stesso verso (normalmente sono disposte in serie nello stesso circuito). La caratteristica importante di questa configurazione è che nella zona intorno al punto situato sull'asse e equidistante dai centri delle bobine il campo, oltre ad avere una espressione nota, si mantiene approssimativamente costante. Le bobine di Helmholtz producono quindi un campo noto e costante sulle dimensioni della sonda di Hall (che, ricordiamo, è montata proprio nel punto centrale delle bobine) e permettono di tarare la sonda stessa. In particolare, il campo prodotto nel punto centrale da una coppia di bobine di raggio R , dotate ciascuna di n spire percorse da corrente i , nel vuoto (e anche, con ottima approssimazione, in aria) vale:

$$B_{BH} = \frac{n \mu_0 i}{R \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = k_{BH} \cdot i \quad (3)$$

dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ è la permeabilità magnetica del vuoto. Per il sistema del laboratorio abbiamo $n = 120$, $R = (0.313 \pm 0.005)$ m, da cui risulta $k_{BH} = 3.453 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1}$, con $\frac{\Delta k_{BH}}{k_{BH}} \simeq 1.6\%$.

Per eseguire la taratura si monter  il circuito di fig. 5.

I capi del circuito delle bobine di Helmholtz, gi  collegate in serie, e i terminali per l'alimentazione in corrente e la misura di tensione della sonda sono disponibili su un'apposita contattiera sul banco di misura. In particolare il generatore di corrente G_{BH} , destinato ad alimentare le bobine di Helmholtz, dispone di un controllo a manopola che consente di variare con continuit  la corrente erogata in un campo di valori simmetrico rispetto allo zero, caratteristica che, vedremo, si riveler  utile per eliminare la non riproducibilit  dovuta all'isteresi.

Per effettuare la taratura si orienter  la sonda secondo l'asse delle bobine ($\psi = 0$) e l'asse suddetto, per mezzo della giostra, in direzione dell'asse Y del riferimento (ossia circa verso Est). In tale modo sar  minimizzato il contributo del campo magnetico terrestre alle misure di taratura.

È utile tarare la sonda per diversi valori della corrente nelle bobine, cominciando dai valori vicini a 0 fino ad un massimo di 100 mA. Fissato un certo valore della corrente i_{BH} , registriamo il valore della d.d.p. di Hall V_H^+ corrispondente al segno di i_{BH} positivo. Si porti quindi la corrente gradatamente a 0 e quindi a valori negativi fino a raggiungere il valore opposto al precedente, $-i_{BH}$, e si registri corrispondentemente la d.d.p. V_H^- . Si torni quindi con continuit  a i_{BH} e si prenda un nuovo valore di V_H^+ ; si ripeta il ciclo pi  volte finch  i valori V_H^+ e V_H^- si stabilizzano. In tale modo abbiamo eliminato l'effetto dovuto all'isteresi e, vista la (1), ricaviamo facilmente:

$$V_H^+ - V_H^- = 2k_H B_{BH}(i) \quad (4)$$

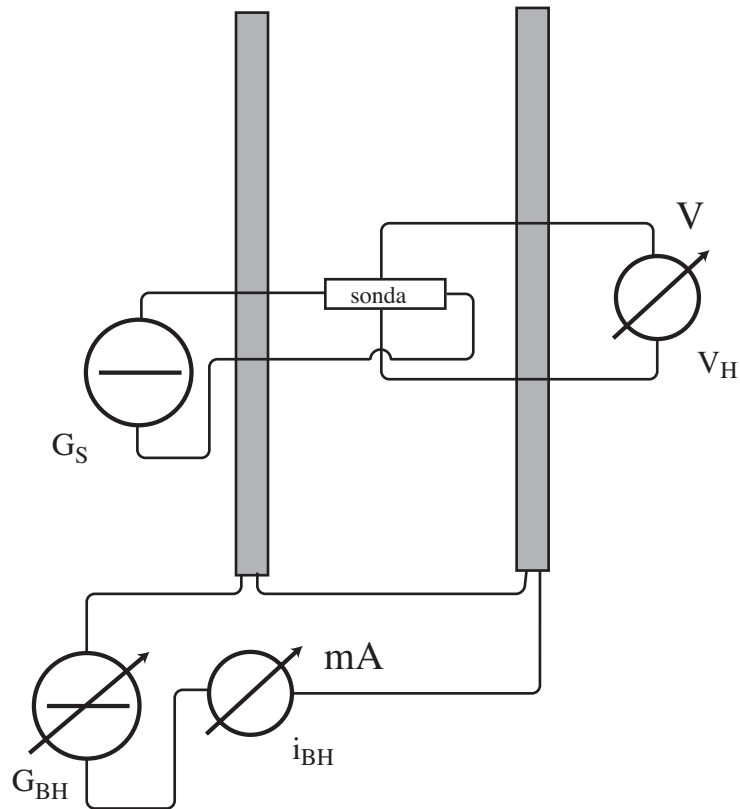


Fig 5: circuito per la taratura della sonda e la misura del campo magnetico.

Il procedimento per differenza elimina anche l'effetto di campi costanti, come il campo terrestre, eventualmente presenti oltre a quello delle bobine. La (4) permette di ricavare la costante di taratura k_H : la presenza di materiale ferromagnetico immediatamente intorno alla sonda fa sì che la relazione fra la d.d.p. di Hall e il campo \mathbf{B}_S , anche epurata degli effetti dovuti all'offset e all'isteresi, presenti una certa non linearità. Si avranno quindi valori di k_H lievemente diversi a seconda del valore di \mathbf{B} ; potremo tenere conto di questo effetto nella fase di misura, scegliendo il valore di k_H corrispondente alla d.d.p. di Hall rilevata nella misura (o comunque il più vicino fra quelli determinati durante la taratura). Nello studiare la linearità della relazione fra campo e d.d.p. di Hall si dovrà fare attenzione che parte considerevole dell'errore su ogni misura di k_H deriva dall'incertezza sulla geometria delle bobine di Helmholtz, con un contributo circa del 1.6%: questo errore è sistematico su tutte le misure di k_H e quindi non si dovrà tenerne conto nel confrontare i valori di k_H trovati a correnti diverse nelle bobine.

Nella procedura di taratura si può mettere in evidenza l'effetto dell'isteresi osservando che a corrente nulla nelle bobine corrisponderà un valore non nullo di V_H , diverso a seconda che si sia arrivati da valori positivi o negativi della corrente: prendendo vari punti durante il ciclo di taratura sarebbe possibile rilevare una curva come quella qualitativamente mostrata in fig. 6.

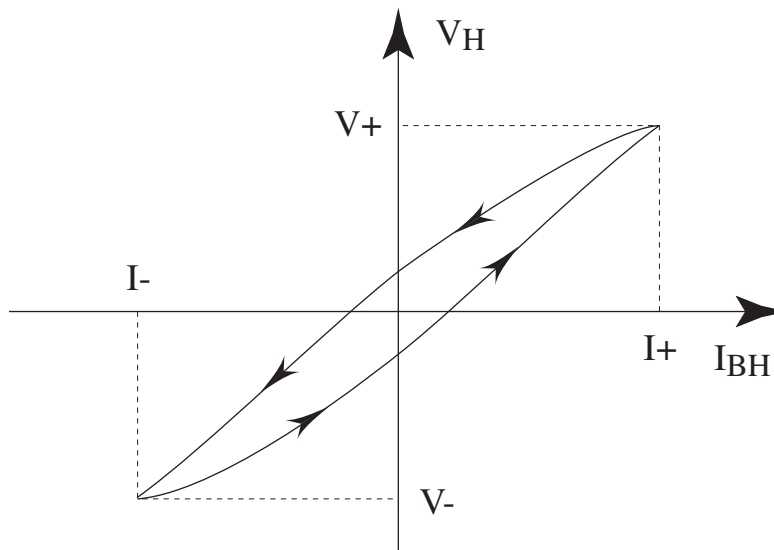


Fig 6: relazione fra corrente nelle bobine e lettura della sonda durante la taratura. Le frecce indicano il verso di percorrenza delle curve; l'effetto dell'isteresi è stato esagerato per evidenziarlo.

La misura di \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y , \mathbf{B}_z

Prima di procedere alla misura delle componenti del campo magnetico terrestre, si manderà definitivamente a 0 la corrente nelle bobine di Helmholtz.

Nel seguito si considera in dettaglio la misura della componente \mathbf{B}_x , essendo la procedura analoga nelle altre due determinazioni.

Si disponga la sonda lungo l'asse x ; si blocchi il movimento lungo l'asse z . Sappiamo già che, nota k_H , non è sufficiente un'unica misura per determinare \mathbf{B}_x ; infatti, come abbiamo visto nella (1), V_{Hx} dipende sia dalla tensione di offset che da quella d'isteresi. La tensione d'isteresi V_{IS} dipende dalle misure precedenti effettuate dalla sonda, in particolare dall'ultima che abbia riguardato valori particolarmente ampi (in valore assoluto) di \mathbf{B} . Lo studente potrà verificare che la misura di V_{Hx} cambia dopo che si sia fatta effettuare alla sonda una ampia rotazione ψ in senso orario o antiorario. Per rendere riproducibile la determinazione di \mathbf{B}_x (e successivamente delle altre componenti) si può procedere nel modo seguente:

Si faccia eseguire alla sonda almeno un paio di volte il ciclo illustrato in fig. 7, ruotandola in modo che ψ in successione tocchi i valori $0^\circ \rightarrow 180^\circ \rightarrow 360^\circ \rightarrow 180^\circ \rightarrow 0^\circ$ (le rispettive posizioni sono numerate da 0 a 4), con una rotazione completa in senso orario ed una in senso antiorario che riporta al punto di partenza. Ripetendo il ciclo almeno un paio di volte, le letture V_H^0 e V_H^4 , ossia quelle a $\psi = 0^\circ$ ad inizio e fine ciclo, dovranno stabilizzarsi su un unico valore. A questo punto si effettui un ulteriore ciclo registrando corrispondentemente $V_H^0, V_H^1, V_H^2, V_H^3, V_H^4 \simeq V_H^0$. È importante che in ciascuna rotazione la posizione finale sia raggiunta muovendo la sonda sempre nello stesso verso, senza mai tornare indietro. A motivo dell'isteresi, che introduce in ogni misura un contributo

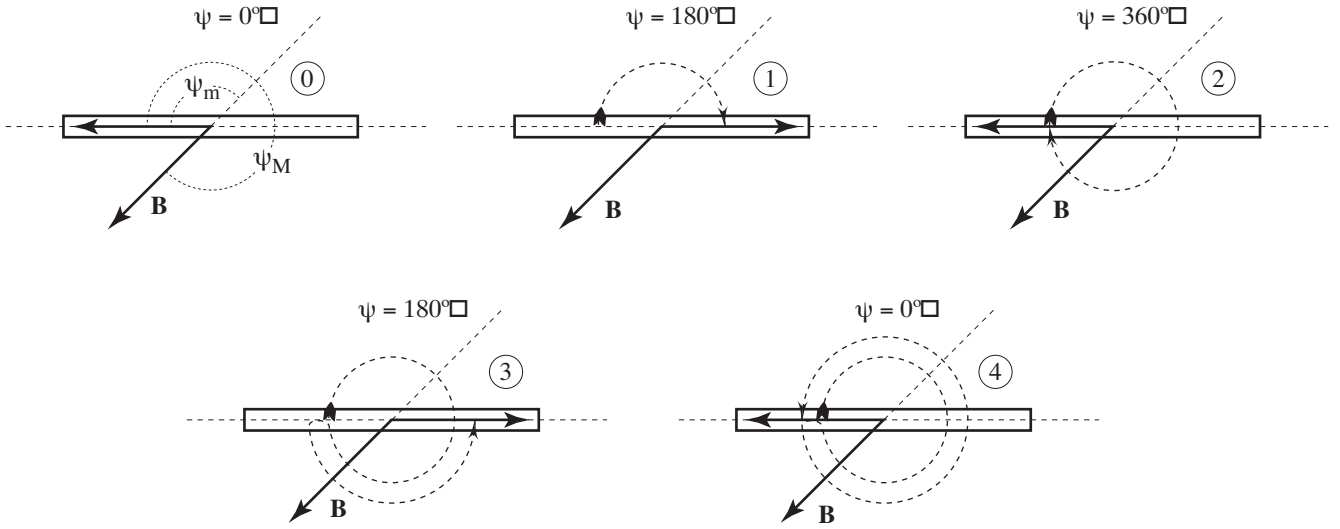


Fig 7: rotazioni successive della sonda per la compensazione dell'isteresi.

dipendente dalla storia precedente, si ha:

$$\begin{aligned}
 V_H^0 &= k_H B_x + V_{\text{off}} + V_{IS}^0 \\
 V_H^1 &= -k_H B_x + V_{\text{off}} + V_{IS}^1 \\
 V_H^2 &= k_H B_x + V_{\text{off}} + V_{IS}^2 \\
 V_H^3 &= -k_H B_x + V_{\text{off}} + V_{IS}^3 \\
 V_H^4 &= k_H B_x + V_{\text{off}} + V_{IS}^4
 \end{aligned} \tag{5}$$

Innanzitutto, essendo $V_H^0 \simeq V_H^4$, sarà $V_{IS}^0 \simeq V_{IS}^4$. Per quanto riguarda gli altri termini dovuti all'isteresi, osserviamo che alla misura 1 la sonda giunge dopo aver attraversato $\psi = \psi_m$, angolo corrispondente al minimo valore di \mathbf{B} lungo la direzione positiva della sonda; alla misura 2, viceversa, la sonda arriva dopo aver superato il valore $\psi_M = \psi_m + 180^\circ$ corrispondente al massimo allineamento di \mathbf{B} con la direzione positiva della sonda. Per la misura 3 vale quanto detto per la 2, mentre la 4 equivale alla 1. Se supponiamo (cosa che risulta sperimentalmente vera, almeno in buona approssimazione) che il valore $|V_{IS}|$ dipenda dal valore massimo di $|B_S|$ ultimamente incontrato dalla sonda e che il segno di V_{IS} dipenda dal segno di $B_{S\text{max}}$ otterremo:

$$V_{IS}^0 = V_{IS}^4 = V_{IS}^1 = -V_{IS}^2 = -V_{IS}^3 \tag{6}$$

Utilizzando la (5) e la (6) si ricava

$$V_H^* = V_H^2 + V_H^4 - V_H^3 + -V_H^1 = 4k_H B_x \tag{7}$$

Quindi V_H^* , costruito a partire dalle quattro misure effettuate, permette di valutare B_x eliminando gli effetti dovuti a V_{off} e V_{IS} . Combinando in modo diverso le quattro misure

sarebbe possibile determinare anche V_{off} e $|V_{IS}|$. Se avessimo scelto un ciclo di misure opposto, ossia con rotazione prima antioraria e poi oraria, avremmo ottenuto valori diversi per le quattro misure, ma la combinazione V_H^* avrebbe dato ancora la stima corretta di B_x .

Per la misura di B_y e B_z si usa una procedura del tutto analoga. Una volta determinate le tre componenti del vettore è possibile ricavare $|B|$ nonché gli angoli θ e ϕ . Nel propagare l'errore a questi risultati si deve fare attenzione al fatto che gli errori sulle componenti cartesiane di \mathbf{B} non sono indipendenti, in quanto contengono l'errore su k_H , e che gli errori su k_H , anche se si usano diversi valori della costante per le diverse componenti del campo, per correggere la non linearità della relazione fra B_S e V_H , contengono una parte sistematica comune dovuta all'incertezza sulla geometria delle bobine di Helmholtz.

Appendice: il campo al centro di una coppia di bobine di Helmholtz

N.B.: quanto segue è fornito per soddisfare l'eventuale curiosità dello studente ma **non** costituisce programma del corso di Esperimentazione Fisica II.

Per calcolare il campo di induzione magnetica generato da una coppia di bobine di Helmholtz utilizzeremo una nota formula, che permette di determinare il campo \mathbf{B} generato nel vuoto (e, con buona approssimazione, in aria), in un punto P dello spazio, da una spira filiforme percorsa da corrente costante i :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i \, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \quad (A1)$$

dove l'integrazione viene fatta sugli elementi infinitesimi $d\mathbf{l}$ della spira, orientati nella direzione della corrente, ed \mathbf{r} è il vettore che va da ciascun elemento al punto P (vedi fig. A1).

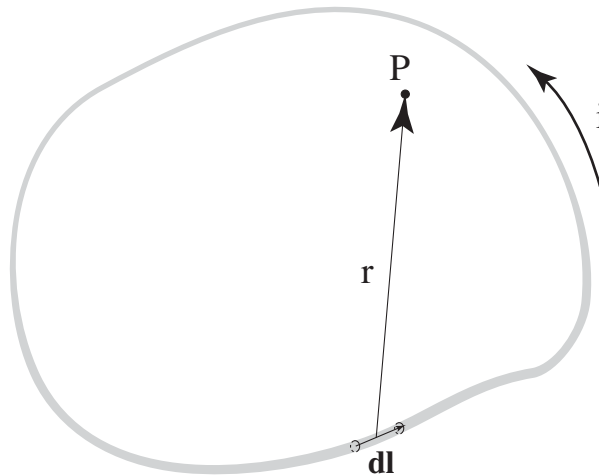


Fig A1: calcolo del campo di induzione magnetica prodotto da una spira.

Come prima cosa, calcoleremo il campo prodotto da una spira circolare in un punto sull'asse della spira stessa. Data la spira di raggio R , disponiamo un riferimento con l'origine nel suo centro e l'asse z coincidente con l'asse della spira, con verso tale che guardando dalla "punta" dell'asse z si veda la corrente circolare in senso antiorario (vedi fig.A2). Il punto in cui vogliamo calcolare il campo abbia coordinata $z = h$ sull'asse della spira.

Suddividiamo la spira in tratti infinitesimi di lunghezza $dl = R d\varphi$: è facile vedere che ciascun tratto dà un contributo $d\mathbf{B}$ perpendicolare sia al $d\mathbf{l}$ che a \mathbf{r} . Tutti i $d\mathbf{B}$ hanno lo stesso modulo e formano uno stesso angolo θ con l'asse della spira. Si ha:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R d\varphi}{r^2} \quad \cos \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{(R^2 + h^2)}} \quad (A2)$$

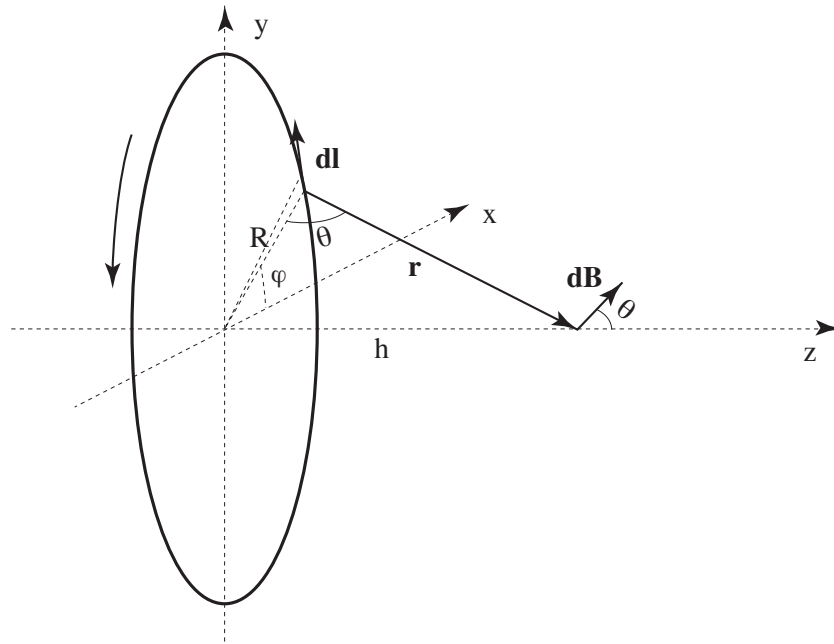


Fig A2: riferimento per il calcolo del campo in un punto sull'asse della spira.

Se integriamo su tutta la spira, facendo andare φ da 0 a 2π , le componenti dei $d\mathbf{B}$ perpendicolari all'asse danno risultato nullo, mentre si sommano semplicemente le componenti lungo z . Avremo quindi

$$B_z = \oint dB \cos \theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (A3)$$

Il campo sull'asse della spira è quindi diretto tutto lungo l'asse stesso con verso parallelo a quello dell'asse z . Si può anche vedere facilmente che se avessimo considerato un punto da parte opposta rispetto al centro della spira ($z = -h$) avremmo trovato un campo identico a quello determinato. A questo punto risulta immediato scrivere il campo al centro delle bobine di Helmholtz: esso è la somma di due campi uguali, rispettivamente con $h = -\frac{R}{2}$ e $h = \frac{R}{2}$, e quindi troviamo la relazione (3) del testo.

Per studiare più facilmente l'andamento nel campo assiale, possiamo introdurre la variabile adimensionale $\gamma = \frac{h}{R}$ per cui la (A3) diventa:

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{2R} f(\gamma) \quad \text{dove} \quad f(\gamma) = (1 + \gamma^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (A4)$$

$f(\gamma)$ dà l'andamento spaziale del campo: è una funzione pari ($f(\gamma) = f(-\gamma)$) con un massimo in $\gamma = 0$ e due flessi in $\gamma = \pm\frac{1}{2}$.

L'andamento del campo assiale generato da una coppia di bobine nell'intorno del centro può essere ottenuto considerando la somma di due funzioni come $f(\gamma)$ traslate simmetricamente nei due sensi lungo l'asse delle ascisse (vedi fig. A4). Se trasliamo le due funzioni di un tratto $\pm\gamma_0$ la loro somma $f_s(\gamma)$ sarà data da $f_s(\gamma) = f(-\gamma_0 + \gamma) + f(\gamma_0 + \gamma)$ Se

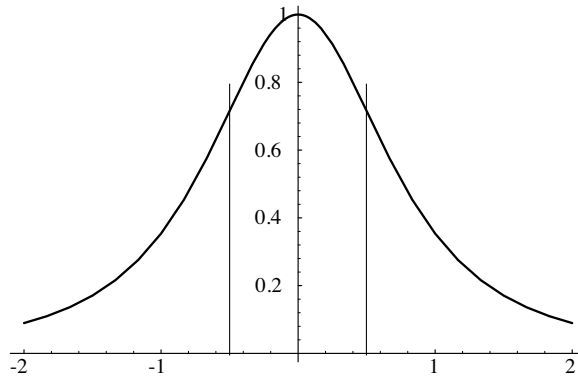


Fig A3: grafico di $f(\gamma)$ con indicata la posizione dei flessi.

sviluppiamo f_s nell'intorno di 0 avremo $f_s(\gamma) \simeq [f(-\gamma_0) + f(\gamma_0)] + [f'(-\gamma_0) + f'(\gamma_0)]\gamma + \frac{1}{2!} [f''(-\gamma_0) + f''(\gamma_0)]\gamma^2 + \dots$. Per una nota proprietà la derivata di una funzione pari o dispari risulta rispettivamente dispari o pari¹; questo implica che nello sviluppo saranno non nulli solo i termini relativi alle derivate di ordine pari. In ogni caso il punto $\gamma = 0$ risulterà un massimo o un minimo; se poi faremo sovrapporre le due funzioni nei rispettivi punti di flesso, distanziandole di $\pm \frac{1}{2}$, annulleremo anche il contributo delle derivate seconde e il primo termine non nullo nello sviluppo, dopo quello costante, sarà del quarto ordine.

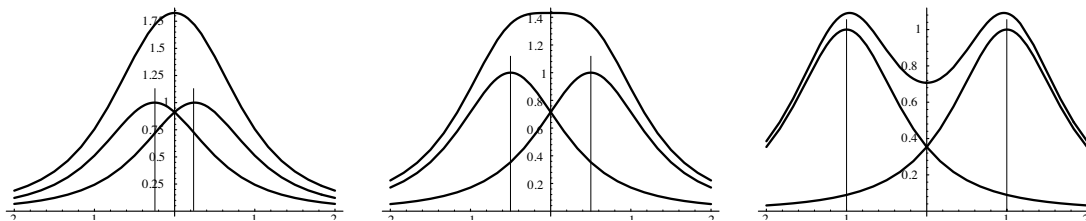


Fig A4: andamento del campo assiale come somma dei campi delle due bobine con spostamenti rispettivamente ± 0.25 , ± 0.5 , ± 1 .

Passiamo adesso a determinare quantitativamente l'andamento del campo assiale. Utilizziamo per le bobine di Helmholtz un nuovo sistema di riferimento, con z coincidente con l'asse delle bobine e l'origine nel punto centrale (ossia sull'asse, a ugual distanza dai centri delle bobine). Il campo B_z delle bobine di Helmholtz in un qualsiasi punto di coordinata z sull'asse è dato quindi dalla somma di due espressioni come in (A3), in una delle quali $h = -\frac{R}{2} + z$, mentre nell'altra $h = \frac{R}{2} + z$:

$$B_{z\text{Helm}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left[\left(\frac{5}{4} R^2 + z^2 - Rz \right)^{-\frac{3}{2}} + \left(\frac{5}{4} R^2 + z^2 + Rz \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \quad (\text{A5})$$

¹ Sia $f(x)$ una funzione tale che $f(-x) = p f(x)$, con $p = \pm 1$: per definizione avremo $f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p f(x-h) - p f(x)}{h}$; ponendo $k = -h$ risulta $f'(-x) = \lim_{k \rightarrow 0} -p \frac{f(x+k) - f(x)}{k} = -p f'(x)$.

Se chiamiamo $f_- = \frac{5}{4}R^2 + z^2 - Rz$ e $f_+ = \frac{5}{4}R^2 + z^2 + Rz$ possiamo scrivere facilmente la derivata parziale

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{3\mu_0 i R^2}{4} \left[f_-^{-\frac{5}{2}}(2z - R) + f_+^{-\frac{5}{2}}(2z + R) \right] \quad (A6)$$

In $z = 0$ la derivata parziale è nulla, come aspettato. Possiamo procedere a valutare la derivata seconda che risulta

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = 6\mu_0 i R^2 \left[f_-^{-\frac{7}{2}}(z^2 - Rz) + f_+^{-\frac{7}{2}}(z^2 + Rz) \right] \quad (A7)$$

anch'essa nulla in $z = 0$. Possiamo calcolare la derivata successiva

$$\frac{\partial^3 B_z}{\partial z^3} = \frac{15\mu_0 i R^2}{2} \left[f_-^{-\frac{9}{2}}(2z - R)(R^2 + 2Rz - 2z^2) + f_+^{-\frac{9}{2}}(2z + R)(R^2 - 2Rz - 2z^2) \right] \quad (A8)$$

ultima derivata nulla nell'origine. Valutiamo infine la derivata quarta: diamo il risultato direttamente in $z = 0$, visto che non dovremo calcolare ulteriori derivate.

$$\left. \frac{\partial^4 B_z}{\partial z^4} \right|_{z=0} = -\frac{27 \cdot 2^{10}}{625\sqrt{5}} \frac{\mu_0 i}{R^5} \simeq -19.78 \frac{\mu_0 i}{R^5} \quad (A9)$$

Il primo termine non nullo nello sviluppo in serie del campo assiale è quindi quello del quarto ordine, per cui la variazione del campo assiale in una zona per cui $|z| \ll R$ risulta particolarmente limitata.

Il calcolo elementare sopra svolto si applica solo alla componente z del campo nel centro, tuttavia le leggi della fisica ci permettono di ricavare altri risultati. Infatti sappiamo che in generale in ogni punto $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ e per la simmetria del sistema avremo al centro $\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial x}$ per cui anche queste ultime derivate risultano nulle. Possiamo dire quindi che nell'intorno del centro la componente assiale del campo varia come z^4 per piccoli spostamenti lungo l'asse, mentre le componenti perpendicolari all'asse, che sono nulle nel centro, variano al più come x^2 e y^2 per piccoli spostamenti nelle rispettive direzioni. L'informazione così ottenuta comunque è incompleta: non sappiamo, ad esempio, come varia il campo assiale per spostamenti perpendicolari all'asse.

Se vogliamo andare oltre nel nostro studio del campo, dovremo cercare di calcolarlo in un punto fuori dell'asse di simmetria. Partiremo dal campo di una singola bobina, e sceglieremo un punto \mathbf{P} di coordinate $(\mathbf{P} - \mathbf{O}) = b\mathbf{i} + h\mathbf{k}$ (vedi fig. A5).

Non si perde di generalità a considerare nullo lo spostamento dall'asse in direzione y , in quanto, per la simmetria del sistema, il campo in qualsiasi punto è determinabile in base a quello calcolato in un punto come \mathbf{P} , semplicemente operando una rotazione intorno all'asse z . Per calcolare l'integrale in (A1), se consideriamo l'elemento infinitesimo di circuito intorno al punto \mathbf{Q} tale che $(\mathbf{Q} - \mathbf{O}) = R \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \varphi \mathbf{j}$ avremo $d\mathbf{l} = R d\varphi (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})$, $\mathbf{r} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = (b - R \cos \varphi) \mathbf{i} - R \sin \varphi \mathbf{j} + h \mathbf{k}$, $d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r} = R d\varphi [h \cos \varphi \mathbf{i} + h \sin \varphi \mathbf{j} + (R - b \cos \varphi) \mathbf{k}]$. L'integrale in (A1) risulta quindi

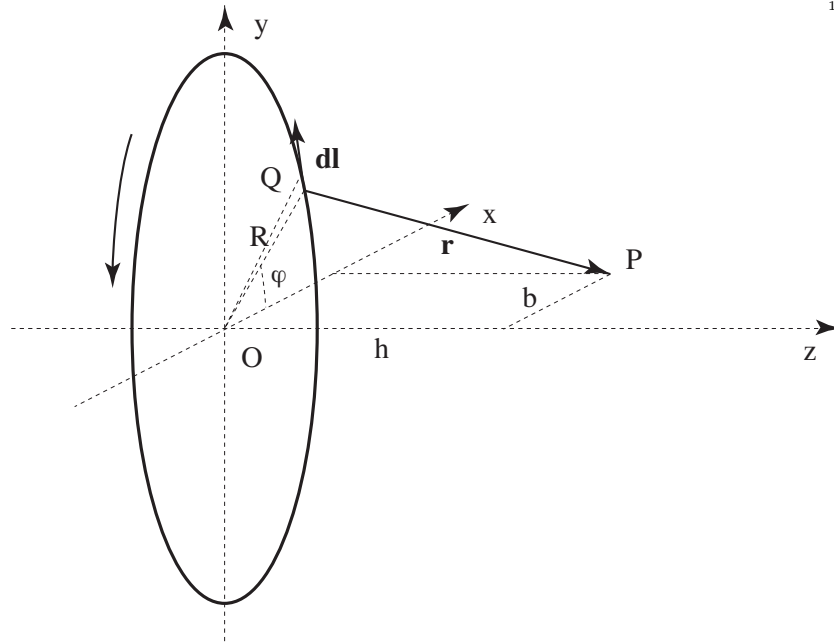


Fig A5: riferimento per il calcolo del campo in un punto fuori dall'asse della spira.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi [h \cos \varphi \mathbf{i} + h \sin \varphi \mathbf{j} + (R - b \cos \varphi) \mathbf{k}]}{(R^2 + h^2 + b^2 - 2bR \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A10})$$

Si vede facilmente che l'integrale della componente y , che contiene $\sin \varphi$ al numeratore, è sempre nullo, in quanto per ogni valore $0 < \varphi < \pi$ esiste un valore corrispondente $2\pi - \varphi$ per cui il numeratore dell'integrando è opposto, con lo stesso denominatore. Questo risultato può essere messo in relazione al fatto che, per il nostro sistema, le leggi dell'elettromagnetismo implicano che $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ per ogni traiettoria chiusa che non si concateni con il circuito. Se esistesse una componente B_y non nulla, in ogni punto di un cerchio di raggio b con centro sull'asse z e contenuto nel piano passante per \mathbf{P} parallelo a quello della spira si avrebbe una componente costante in direzione tangente al cerchio stesso, per cui la circuitazione risulterebbe diversa da 0. Viceversa gli integrali delle altre due componenti non sono esprimibili analiticamente per mezzo di funzioni trascendenti elementari, ma risultano determinati mediante funzioni ellittiche e/o ipergeometriche. Dal momento che siamo interessati a calcolare il campo solo nell'intorno del punto centrale delle bobine di Helmholtz, affronteremo il problema in modo approssimato. Prima di tutto dalla (A10) possiamo ricavare il campo per le bobine di Helmholtz come abbiamo già fatto nel caso assiale, ossia sommando due contributi per cui $h = -\frac{R}{2} + z$ e $h = \frac{R}{2} + z$, rispettivamente. Inoltre è conveniente esprimere gli spostamenti dal centro mediante due

parametri adimensionali, ponendo $z = \alpha R$ e $b = \beta R$. Avremo

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\frac{1}{2} + \alpha}{\left(\frac{5}{4} + \alpha^2 - \alpha + \beta^2 - 2\beta \cos \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{2} + \alpha}{\left(\frac{5}{4} + \alpha^2 + \alpha + \beta^2 - 2\beta \cos \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \right] d\varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (1 - \beta \cos \varphi) \left\{ \left(\frac{5}{4} + \alpha^2 - \alpha + \beta^2 - 2\beta \cos \varphi\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(\frac{5}{4} + \alpha^2 + \alpha + \beta^2 - 2\beta \cos \varphi\right)^{-\frac{3}{2}} \right\} d\varphi$$
(A11)

Essendo interessati all'intorno del centro, avremo sempre $\alpha \ll 1$ e $\beta \ll 1$. Potremo quindi esprimere gli integrandi come polinomi di Taylor in due variabili² fino ad un ordine opportuno ed integrare poi le funzioni approssimate, cosa che è possibile fare in termini elementari. Il calcolo dei coefficienti della serie è comunque abbastanza laborioso, tanto che si è preferito utilizzare il programma di calcolo simbolico *Mathematica* della Wolfram Research Inc.. Si sono svolti i calcoli sviluppando fino al sesto ordine e troncando poi al primo ordine significativo. Per la componente assiale abbiamo:

$$B_z(\alpha, \beta) \simeq \frac{\mu_0 i}{R} \frac{8 \left(1 - \frac{54\beta^4}{125} + \frac{432\beta^2\alpha^2}{125} - \frac{144\alpha^4}{125}\right)}{5\sqrt{5}}$$
(A12)

$$\simeq \frac{\mu_0 i}{R} 0.715542 (1 - 0.432\beta^4 + 3.456\beta^2\alpha^2 - 1.152\alpha^4)$$

e per quella perpendicolare all'asse:

$$B_x(\alpha, \beta) \simeq \frac{\mu_0 i}{R} \frac{-1728\beta^3\alpha + 2304\beta\alpha^3}{625\sqrt{5}}$$
(A13)

$$\simeq \frac{\mu_0 i}{R} 0.715542 (-1.728\beta^3\alpha + 2.304\beta\alpha^3)$$

Questi dati permettono di valutare entro quali limiti si mantiene costante il campo nella zona centrale delle bobine: se consideriamo ad esempio la zona data da $-0.1 \leq \alpha \leq 0.1$, $-0.1 \leq \beta \leq 0.1$, ossia spostamenti in direzione assiale e perpendicolare, in entrambi i sensi, di una lunghezza pari a un decimo del raggio delle bobine (nel caso del laboratorio, circa 3 cm per parte), avremo uno scostamento relativo massimo per la componente assiale di $\simeq 1.8 \cdot 10^{-4}$, mentre la componente perpendicolare arriva al massimo ad essere in rapporto $\simeq 10^{-4}$ con la componente assiale nel centro.

In fig. A6 sono riportati gli andamenti delle quantità adimensionali $\frac{B_z R}{\mu_0 i}$ e $\frac{B_x R}{\mu_0 i}$ in funzione di α e β .

² Si ricorda che l'approssimazione all'ordine n secondo Taylor in due variabili di una funzione $f(x, y)$ risulta: $f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial^i}{\partial x^{i-j} \partial y^j} f(x, y) \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)^{i-j} (y - y_0)^j$.

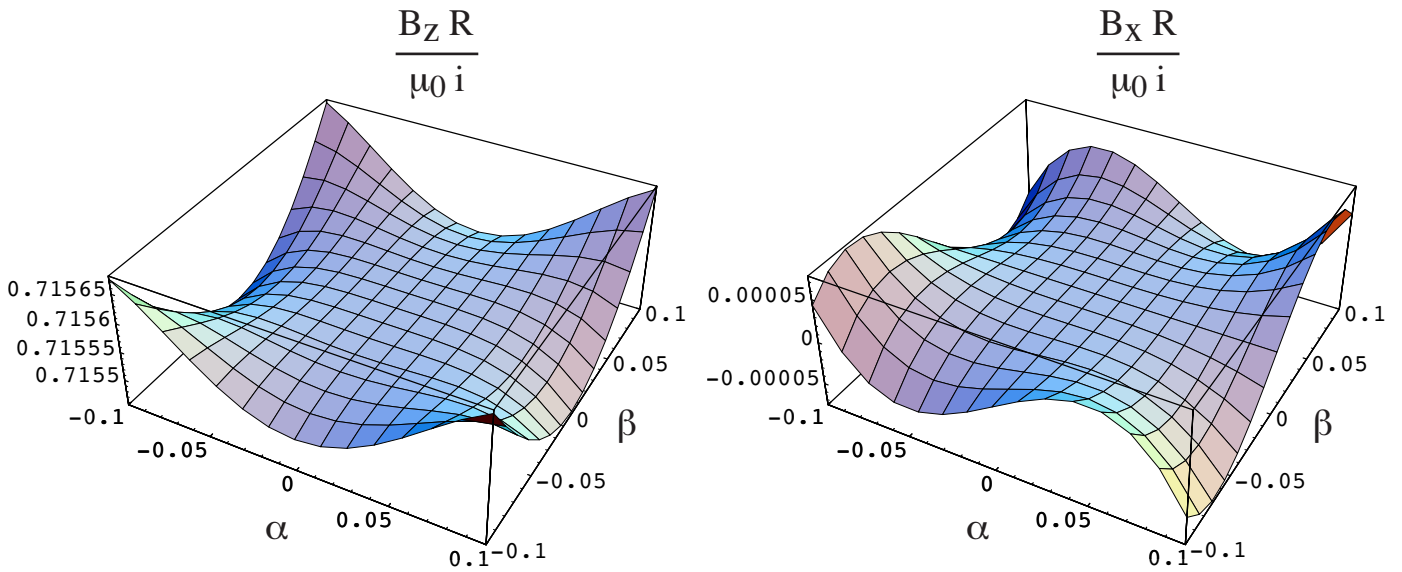


Fig A6: andamento delle componenti assiale e perpendicolare del campo.

Va infine ricordato che il risultato quantitativo appena ricavato per la costanza del campo si riferisce ad una coppia di bobine *ideali*: in pratica avremo sempre un limite di precisione nel posizionamento delle bobine e soprattutto dovremo tener conto della dimensione finita dell'avvolgimento, per cui avremo un contributo piccolo ma non nullo anche dalle derivate di ordine inferiore nello sviluppo, e conseguentemente una variazione più rapida del campo nella zona centrale. Per dare una stima di questo effetto, abbiamo provato a ripetere il calcolo precedente dopo aver introdotto un errore di posizionamento delle bobine del 2% sulla distanza, mantenendole comunque parallele fra loro e sullo stesso asse: variando ancora α e β di ± 0.1 otteniamo variazioni relative di circa $5 \cdot 10^{-4}$ per la componente assiale mentre la componente perpendicolare arriva circa a $5 \cdot 10^{-4}$ della componente assiale nel centro. Dobbiamo aspettarci inoltre stabilità ancora peggiori se disassiamo le bobine e/o le orientiamo su piani non paralleli.