

Fotonica

Proprietà generali 1

Sommario

$$\hat{\Theta} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r})$$

Master equation

$$\hat{\Theta} \vec{H}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right)$$

Operatore Hermitiano

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$$

Vincolo onde TM

ω

Frequenza reale e positiva

$$(\vec{H}_1, \vec{H}_2) = 0$$

Ortogonalità autovettori

Relazioni autovettori

Noto $(\vec{H}_2(\vec{r}), \vec{H}_1(\vec{r}))$ quanto vale $(\vec{E}_2(\vec{r}), \vec{E}_1(\vec{r}))$

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega_i\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}_i(\vec{r}) \quad i = 1, 2$$

$$(\vec{H}_2(\vec{r}), \vec{H}_1(\vec{r})) = \frac{1}{(\omega_1\omega_2\mu_0^2)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}_2(\vec{r}), \vec{\nabla} \times \vec{E}_1(\vec{r}))$$

Essendo

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(r) \vec{E}$$

Quindi

$$(\vec{H}_2(\vec{r}), \vec{H}_1(\vec{r})) = \frac{\omega_1}{\omega_2(\mu_0 c)^2} (\vec{E}_2(\vec{r}), \epsilon(\vec{r}) \vec{E}_1(\vec{r}))$$

Principio variazionale in MQ

$$E_g \leq \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad \psi = \sum_n c_n \phi_n$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= \left\langle \sum_n c_n \phi_n \left| \hat{H} \right| \sum_m c_m \phi_m \right\rangle = \\ &= \sum_n c_n^* \sum_m c_m E_m \langle \phi_n | \phi_m \rangle = \\ &= \sum_n |c_n|^2 E_n \geq E_g \sum_n |c_n|^2 = E_g \end{aligned}$$

Principio variazionale in MQ

$$E_g \leq \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$U_f(\psi) \equiv \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad \text{funzionale energia}$$

if $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ then $U_f(\psi + \delta\psi) \geq U_f(\psi)$

Vedi anche principio di minima azione e/o principio di Fermat

Principio variazionale

$$U_f(\vec{H}) \equiv \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \quad \text{funzionale energia}$$

$$\begin{aligned} U_f(\vec{H} + \delta\vec{H}) &= \frac{(\vec{H} + \delta\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H} + \hat{\Theta}\delta\vec{H})}{(\vec{H} + \delta\vec{H}, \vec{H} + \delta\vec{H})} = \\ &= \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H}) + (\vec{H}, \hat{\Theta}\delta\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H}) + (\vec{H}, \delta\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \vec{H})} = \\ &= \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H}) + (\vec{H}, \hat{\Theta}\delta\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \left(1 - \frac{(\vec{H}, \delta\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \right) \end{aligned}$$

Principio variazionale

$$\begin{aligned}
 U_f(\vec{H} + \delta\vec{H}) &= \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \left(1 - \frac{(\vec{H}, \delta\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \right) + \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\delta\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} = \\
 &= U_f(\vec{H}) - \frac{(\vec{H}, \delta\vec{H})(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \vec{H})(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})(\vec{H}, \vec{H})} + \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\delta\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} = \\
 &= U_f(\vec{H}) - \frac{(\vec{H}, \delta\vec{H})(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \vec{H})(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})(\vec{H}, \vec{H})} + \frac{(\hat{\Theta}\vec{H}, \delta\vec{H}) + (\delta\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \\
 &= U_f(\vec{H}) + \frac{1}{(\vec{H}, \vec{H})} \left[(\delta\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H} - A\vec{H}) + (\hat{\Theta}\vec{H} - A\vec{H}, \delta\vec{H}) \right]
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})(\vec{H}, \vec{H})} \quad (\text{si usa } (\vec{H}, \hat{\Theta}\delta\vec{H}) = (\hat{\Theta}\vec{H}, \delta\vec{H}))$$

Principio variazionale $(\vec{H}, \hat{\Theta} \delta \vec{H}) = (\hat{\Theta} \vec{H}, \delta \vec{H})$

$$\begin{aligned} \delta U_f(\vec{H}) &= U_f(\vec{H} + \delta \vec{H}) - U_f(\vec{H}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[(\delta \vec{H}, \vec{G}(\vec{H})) + (\vec{G}(\vec{H}), \delta \vec{H}) \right] \end{aligned}$$

$$\vec{G}(\vec{H}) \equiv \frac{2}{(\vec{H}, \vec{H})} \left(\hat{\Theta} \vec{H} - \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \vec{H} \right)$$

Ricordando che

$$df(\vec{r}) = \frac{d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}}{2}$$

$\vec{G}(\vec{H})$ è il rate di variazione del funzionale energia rispetto ad H

Principio variazionale

$$\forall \text{ autostato } \vec{H}_i \quad \hat{\Theta} \vec{H}_i = \frac{\omega_i^2}{c^2} \vec{H}_i$$

quindi

$$\vec{G}(\vec{H}_i) \equiv \frac{2}{(\vec{H}_i, \vec{H}_i)} \left(\hat{\Theta} \vec{H}_i - \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H}_i)}{(\vec{H}_i, \vec{H})} \vec{H}_i \right) = 0$$

Principio variazionale:

gli autostati minimizzano il funzionale energia

$$\delta U_f(\vec{H}) = 0 \quad \forall \delta \vec{H}$$

Funzionale energia per gli autostati

$$U_f(\vec{H}) \equiv \frac{\left(\vec{H}, \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \right)}{(\vec{H}, \vec{H})}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \omega \vec{E} \quad \vec{H} = \frac{1}{i\mu_0 \omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{H}, \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \right) &= \left(\frac{1}{i\mu_0 \omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}, \vec{\nabla} \times (-i\epsilon_0 \omega \vec{E}) \right) = \\ &= \int d^3 r \left(\frac{1}{i\mu_0 \omega} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right)^* \cdot \vec{\nabla} \times (-i\epsilon_0 \omega \vec{E}) = \\ &= \int d^3 r \frac{i\epsilon_0 \omega}{i\mu_0 \omega} (\vec{\nabla} \times \vec{E})^* \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{E}) = \\ &= \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \int d^3 r |\vec{\nabla} \times \vec{E}|^2 \end{aligned}$$

Funzionale energia per gli autostati

$$U_f(\vec{H}) \equiv \frac{\left(\vec{H}, \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \right)}{(\vec{H}, \vec{H})}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \omega \vec{E} \quad \vec{H} = \frac{1}{i\mu_0 \omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\left(\vec{H}, \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \right) = \left(\frac{1}{i\mu_0 \omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}, \vec{\nabla} \times (-i\epsilon_0 \omega \vec{E}) \right)$$

$$(\vec{H}, \vec{H}) = \frac{1}{(\mu_0 c)^2} (\vec{E}, \epsilon(\vec{r}) \vec{E}) \quad \text{Vedi passaggi relazioni autovettori}$$

$$U_f(\vec{H}) = \frac{\int d^3r |\vec{\nabla} \times \vec{E}|^2}{\int d^3r \epsilon(\vec{r}) |\vec{E}|^2}$$

Minimizzare i nodi
(modulo derivata massimo negli zeri)

Massimizzare campo nel dielettrico

Principio variazionale

Principio variazionale:

gli autostati minimizzano il funzionale energia, quindi i modi fotonici di più bassa frequenza

hanno ampiezza concentrata nella regione ad alto dielettrico. Inoltre un dato modo in generale conterrà più nodi rispetto a un modo di minore frequenza.

In (MQ) le funzioni d'onda di più bassa energia hanno ampiezza concentrata nelle regioni a potenziale minore. Vale anche in MQ la “legge dei nodi”.

$$U_f(\vec{H}) \equiv \frac{\int d^3 r |\vec{\nabla} \times \vec{E}|^2}{\int d^3 r \epsilon(\vec{r}) |\vec{E}|^2}$$

$$\langle \hat{H} \rangle \equiv \frac{\int d^3 r \psi^* \hat{H} \psi}{\int d^3 r |\psi|^2}$$

Energia elettromagnetica

$$U_E = \frac{1}{2} (\epsilon_o \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r})) = \frac{\epsilon_o}{2} \int d^3 r \epsilon(\vec{r}) |\vec{E}(\vec{r})|^2 = \int d^3 r u_E$$

$$U_H = \frac{1}{2} (\mu_o \vec{H}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r})) = \frac{\mu_o}{2} \int d^3 r |\vec{H}(\vec{r})|^2 = \int d^3 r u_H$$

Continuo scambio fra E e H

$$\begin{aligned} U_H &= (\mu_o \vec{H}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r})) = \left(\mu_o \vec{H}(\vec{r}), \frac{1}{i\omega\mu_o} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \right) = \\ &= \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}), \frac{1}{i\omega} \vec{E}(\vec{r}) \right) = \left(\frac{1}{i\omega} i\omega\epsilon_o \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_o \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r})) = U_E \end{aligned}$$

Proprietà di scala 1

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r})$$

Che succede se?

$$\varepsilon'(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}/s)$$

Partiamo dal problema iniziale e assumiamo

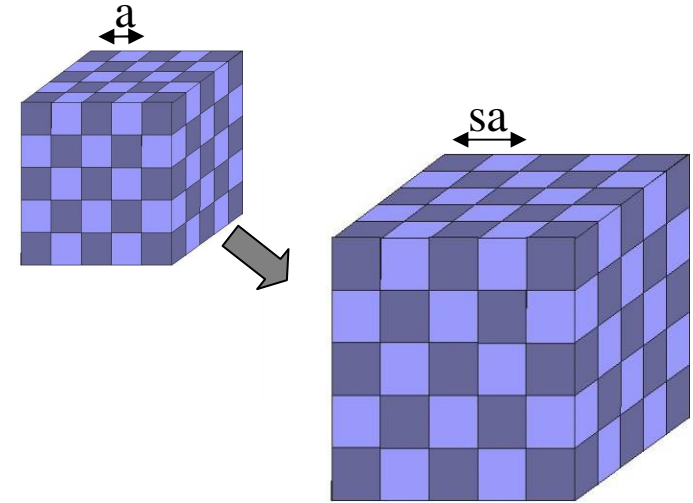
$$\vec{r}' = s\vec{r} \quad \vec{\nabla}' = \vec{\nabla} / s$$

Sostituendo

$$\vec{\nabla}' \times \left(\frac{1}{\varepsilon'(\vec{r}')} \vec{\nabla}' \times \vec{H}(\vec{r}'/s) \right) = \frac{\omega^2}{s^2 c^2} \vec{H}(\vec{r}'/s)$$

Quindi se vale $\varepsilon'(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}/s)$

$$\vec{H}'(\vec{r}') = \vec{H}(\vec{r}'/s) \quad \omega' = \frac{\omega}{s}$$



Ogni effetto è identico nelle microne, nell'IR, in ottica o in raggi X

$$\text{In MQ } a_o = \frac{\hbar}{m_e c \alpha}$$

Proprietà di scala 2

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r})$$

Supponiamo

$$\epsilon'(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r}) / s^2$$

Sostituendo

$$\vec{\nabla}' \times \left(\frac{1}{\epsilon'(\vec{r})} \vec{\nabla}' \times \vec{H}(\vec{r}') \right) = \frac{(s\omega)^2}{s^2 c^2} \vec{H}(\vec{r}')$$

$$\vec{H}' = \vec{H} \quad \omega' = s\omega$$

Gli autovettori
(i modi) restano
invariati ma le
frequenze sono
scalate di s

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \quad \text{Vettore di Poynting}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{E}^*(\vec{r}, t) \right) \times \left(\vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{H}^*(\vec{r}, t) \right)$$

$$\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}^*(\vec{r}, t) \rangle + \langle \vec{E}^*(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \rangle \right)$$

$$\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}^*(\vec{r}, t) \rangle \right]$$

$$\vec{S} \equiv (u_E + u_H) \vec{v}_e \quad \vec{v}_e = \vec{v}_g = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega(\vec{k})$$