

INTRODUZIONE ALLA FISICA DEL PLASMA

Appunti dal corso di Fisica del plasma

Claudio Chiuderi

March 4, 2010

1 Introduzione

I plasmi possono a buon titolo essere considerati il **quarto stato** della materia: infatti essi posseggono caratteristiche uniche rispetto agli altri stati tradizionali, solido, liquido e gassoso. Così come le transizioni solido-liquido e liquido-gas si ottengono portando il sistema in esame a temperature sempre più elevate, anche la transizione gas-plasma si ottiene scaldando il sistema. A temperature sufficientemente alte, le molecole o gli atomi del gas si scindono nelle loro componenti primarie, cioè elettroni e ioni positivi, formando una *gas ionizzato*. Nel gas sono quindi presenti cariche elettriche libere di muoversi e di generare densità di carica e di corrente, che a loro volta generano campi elettrici e magnetici. Un gas ionizzato è un esempio di **plasma** ed è anche il tipo di plasma più frequente in natura. Si calcola che oltre il 95 % della materia nell'Universo si trovi nello stato di plasma. Da questo punto di vista, l'ambiente terrestre rappresenta un'eccezione. La definizione di plasma richiede alcune precisazioni che saranno esaminate tra poco. Una prima definizione abbastanza generale è la seguente:

Si dice plasma un sistema la cui dinamica è dominata dalle forze elettromagnetiche: il plasma è l'insieme delle particelle cariche e dei campi da esse generate.

E' importante sottolineare quest'ultimo aspetto: anche se talvolta può essere conveniente separare le particelle cariche dai campi, solo il loro insieme rappresenta il plasma nella sua totalità. Questa affermazione risulta più chiara se la si inquadra in uno schema quantistico. In meccanica quantistica anche i campi possono essere rappresentati da particelle e ciò permette di descrivere un plasma come un insieme di particelle discrete, che comprende appunto sia le particelle "vere" (elettroni, ioni, atomi), sia le particelle che rappresentano il campo elettromagnetico (fotoni) o le eccitazioni del sistema (plasmoni, fononi...). Lo schema quantistico permette di comprendere meglio la natura delle interazioni tra le varie componenti del plasma: da questo punto di vista l'interazione onda-onda, cioè, ad esempio, plasmone-plasmone, non differisce sostanzialmente dalle scattering elettrone-ione o elettrone-plasmone. Queste considerazioni contribuiranno a rendere più trasparente il concetto di smorzamento non collisionale, che verrà discusso in seguito. In questo testo tuttavia faremo esclusivamente uso di una descrizione classica.

In base alla nostra definizione, anche gli elettroni di conduzione in un metallo formano un plasma. Infatti gli ioni del reticolo cristallino formano semplicemente uno "sfondo" immobile e la dinamica del "gas" elettronico è governata per intero dalle interazioni elettromagnetiche. In questo corso tuttavia considereremo quasi esclusivamente plasmi costituiti da gas ionizzati.

A questo punto viene naturale chiedersi quale debba essere il grado di ionizzazione di un gas per poterlo considerare un plasma. Una risposta a questa domanda può venire dal calcolo elementare della conducibilità elettrica di un gas parzialmente ionizzato. Consideriamo quindi un plasma composto di elettroni, ioni positivi e atomi neutri. Supponendo che ioni e atomi siano immobili, l'equazione di moto degli elettroni (carica $-e$ e massa m_e) in presenza

di un campo elettrico costante, \mathbf{E} , si scrive:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \nu_c \mathbf{v}$$

cioè

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nu_c \mathbf{v} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}.$$

ν_c rappresenta l'effetto frenante dovuto alle collisioni degli elettroni con le altre particelle. La soluzione stazionaria della precedente equazione è:

$$\mathbf{v} = -\frac{e}{m_e \nu_c} \mathbf{E}.$$

Definendo la densità di corrente come $\mathbf{J} = -en_e \mathbf{v}$, e ricordando la relazione che definisce la conducibilità elettrica, σ , cioè $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, otteniamo :

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_c}, \quad (1.1)$$

dove n_e è la densità numerica degli elettroni. Resta da valutare ν_c . Le collisioni che ci interessano sono quelle tra gli elettroni e gli ioni e quelle tra gli elettroni e gli atomi:

$$\nu_c = \nu_c^i + \nu_c^a.$$

D'altra parte,

$$\nu_c = \frac{\bar{v}}{\lambda} = n \sigma_c \bar{v} = \alpha n; \quad \alpha = \sigma_c \bar{v},$$

dove \bar{v} è la velocità media degli elettroni (tipicamente la velocità termica), λ il cammino libero medio, σ_c la sezione d'urto per il processo considerato e n la densità numerica dei centri di scattering. Potremo dunque scrivere:

$$\nu_c = \alpha^i n_i + \alpha^a n_a = \alpha^i n_i \left(1 + \frac{\alpha^a n_a}{\alpha^i n_i}\right).$$

Introducendo il grado di ionizzazione, χ ,

$$\chi = \frac{n_i}{n_i + n_a} = \frac{1}{1 + \frac{n_a}{n_i}},$$

si ottiene:

$$\nu_c = \alpha^i n_i \left(1 + \frac{\alpha^a}{\alpha^i} \frac{1 - \chi}{\chi}\right),$$

e finalmente, tenendo conto che $n_e = Z n_i$, dove Ze è la carica degli ioni,

$$\sigma = \frac{Ze^2}{m_e \alpha^i} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^a}{\alpha^i} \frac{1 - \chi}{\chi}} = \frac{\sigma_{max}}{1 + \frac{\alpha^a}{\alpha^i} \frac{1 - \chi}{\chi}},$$

dove σ_{max} è il valore massimo che assume la conducibilità in corrispondenza alla completa ionizzazione, $\chi = 1$. Per stimare l'effetto del grado di ionizzazione sulla conducibilità possiamo calcolare il valore χ_0 per cui $\sigma = \sigma_{max}/2$. Ricaviamo così:

$$\frac{\alpha^a}{\alpha^i} \frac{1 - \chi_0}{\chi_0} = 1.$$

Poichè

$$\frac{\alpha^a}{\alpha^i} = \frac{\sigma_c(a)}{\sigma_c(i)},$$

e poichè la sezione d'urto per lo scattering elettrone-atomo neutro è molto minore di quella per lo scattering elettrone-ione (sperimentalmente si trova che questo rapporto vale circa 10^{-2}) se ne deduce che è sufficiente un grado di ionizzazione dell'ordine dell' 1% per avere una conducibilità pari alla metà di quella di un gas completamente ionizzato. Con un grado di ionizzazione dell'8% la conducibilità è pari a $0.9\sigma_{max}$.

1.1 L'equazione di Saha

Il grado di ionizzazione dipende dai parametri fisici che caratterizzano lo stato di equilibrio termodinamico di un plasma. Per determinare χ consideriamo un insieme di particelle di energia E_m alla temperatura T . La loro densità numerica, n_m , è data dalla formula di Boltzmann:

$$n_m = g_m \exp(-E_m/kT),$$

dove g_m è il *fattore di degenerazione*, cioè il numero di stati che corrisponde all'energia E_m e k è la costante di Boltzmann. Quindi il rapporto \mathcal{R}_{lm} delle densità degli stati corrispondenti rispettivamente alle energie E_l e E_m è :

$$\mathcal{R}_{lm} = \frac{n_l}{n_m} = \frac{g_l}{g_m} \exp[-(E_l - E_m)/kT].$$

Se identifichiamo lo stato l come quello di una coppia elettrone-ione e lo stato m come lo stato fondamentale dell'atomo neutro , avremo

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{g_i}{g_0} \exp[-I/kT],$$

dove I è l'energia di ionizzazione. L'espressione per i fattori di degenerazione, g , ci è fornita dalla meccanica quantistica, che, con buona approssimazione, dà:

$$\frac{g_i}{g_0} \simeq \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{1}{n_i} \simeq 2.4 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_i},$$

Utilizzando la precedente espressione si ottiene la *equazione di Saha*

$$n_i/n_0 \simeq 2.4 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp(-I/kT). \quad (1.2)$$

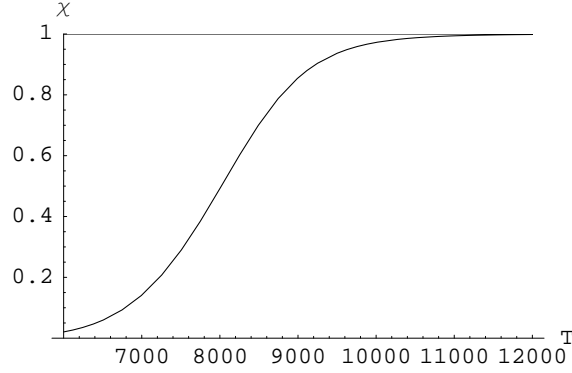


Figure 1: χ in funzione di T per $n_{tot} = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$

Nel caso dell'idrogeno ricordando che l'energia di ionizzazione è 13.6 eV , si ha

$$n_i/n_0 \simeq 2.4 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp(-1.58 \times 10^3/T)$$

Infine, introducendo il grado di ionizzazione:

$$\chi = \frac{n_i}{n_0 + n_i} = \frac{n_i}{n_{tot}}$$

e usando l'equazione di Saha, si ottiene:

$$\frac{1 - \chi}{\chi^2} \simeq 4.14 \times 10^{-16} n_{tot} T^{-3/2} \exp(1.58 \times 10^3/T).$$

Nelle formule precedenti ed in tutto il testo i valori numerici si intendono riferiti al sistema *cgs misto*, cioè un sistema in cui tutte le quantità elettromagnetiche si misurano in unità del sistema *cgs elettromagnetico*, tranne la carica elettrica che è misurata nel sistema *cgs elettrostatico*. Questo porta all'apparizione di fattori c nelle formule, ma questo inconveniente è compensato dal fatto che nel sistema misto vi sono tre sole grandezze fondamentali, lunghezze (cm), masse (g) e tempi (s), ciò che semplifica considerevolmente le verifiche dimensionali. Le temperature vengono misurate in gradi Kelvin (K).

Un grafico del grado di ionizzazione dell'idrogeno in funzione della temperatura per una densità $n_{tot} = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ è riportato in Fig. 1.1. Come si vede, la ionizzazione è pressoché totale anche per temperature notevolmente inferiori a $T \simeq I/k \simeq 1.58 \times 10^5 \text{ K}$.

1.2 La lunghezza di Debye

La presenza di un grado di ionizzazione più o meno elevato non è una condizione sufficiente per considerare il gas un vero e proprio plasma. Bisogna infatti completare la nostra definizione tenendo presente una caratteristica fondamentale dei plasmi, la condizione di *quasi-neutralità*. Una carica in un plasma è, in linea di principio, in grado di interagire con tutte le altre attraverso le interazioni coulombiane, che sono interazioni a *grande raggio d'azione*. Il potenziale di una carica nel vuoto decresce infatti "lentamente", cioè come $1/r$. Tuttavia le cariche sono libere di muoversi e questo fa sì che nell'intorno di una carica positiva vi sia una rarefazione di cariche positive ed un addensamento di cariche negative, per cui la carica positiva risulta circondata da una regione a carica prevalentemente negativa. Di conseguenza a una certa distanza la carica risulta schermata e di fatto il potenziale è nullo o quasi. Se indichiamo con r_s il valore della distanza alla quale l'azione di schermo diviene importante, ne consegue che volumi di dimensioni lineari maggiori di r_s saranno elettricamente neutri. Detta $Q(r)$ la carica contenuta nella sfera di raggio r , la condizione di quasi-neutralità può essere espressa da $Q(r_s) \simeq 0$.

Cerchiamo ora di determinare l'ordine di grandezza di r_s . Supponiamo di introdurre in plasma di idrogeno una carica aggiuntiva $e_0 > 0$ nel punto $\mathbf{r} = 0$. Questa genererà un campo elettrico dato da:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \Phi = 4\pi q = 4\pi e(n_i - n_e) + 4\pi e_0 \delta(\mathbf{r}),$$

dove e è la carica del protone e si è introdotto il potenziale elettrostatico Φ , legato al campo elettrico da :

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

In condizioni di equilibrio a temperatura T la densità degli elettroni sarà data dalla distribuzione di Boltzmann:

$$n_e = n_0 \exp[-(-e\Phi)/kT] \quad (1.3)$$

dove n_0 è la densità in assenza della carica aggiuntiva. Analogamente, i protoni saranno distribuiti come

$$n_i = n_0 \exp[-(e\Phi/kT)] \quad (1.4)$$

L'equazione per Φ risulta quindi:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 4\pi n_0 e [\exp(e\Phi/kT) - \exp(-e\Phi/kT)] - 4\pi e_0 \delta(\mathbf{r}) \\ &= 8\pi n_0 e \sinh(e\Phi/kT) - 4\pi e_0 \delta(\mathbf{r}) \\ &\simeq 8\pi n_0 e (e\Phi/kT) - 4\pi e_0 \delta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

dove si è supposto $e\Phi/kT \ll 1$, approssimazione sulla cui validità torneremo tra poco.

Esplicitando la precedente equazione in coordinate polari sferiche:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= 8\pi n_0 e (e\Phi/kT) - 4\pi e_0 \delta(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\Phi}{\lambda^2} - 4\pi e_0 \delta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

dove si è posto

$$\lambda = \sqrt{\frac{kT}{8\pi n_0 e^2}}$$

. La precedente equazione può anche essere scritta nella forma:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) = \frac{r\Phi}{\lambda^2} - 4\pi e_0 r \delta(\mathbf{r})$$

da cui, poichè l'ultimo termine è identicamente nullo:

$$\Phi = e_0 \frac{\exp(-r/\lambda)}{r} \quad (1.7)$$

dove si è imposta la condizione che nel vuoto, ($n_0 = 0, \lambda \rightarrow \infty$) il potenziale sia quello usuale. In fisica del plasma si definisce la *lunghezza di Debye*, λ_D , come

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n_0 e^2}} = \sqrt{2}\lambda \simeq 6.9 T^{1/2} n_0^{-1/2} \quad (1.8)$$

In Fig. 1.2 è mostrato il confronto tra l'andamento del potenziale coulombiano (curva tratteggiata) e del potenziale schermato, Eq. (1.7).

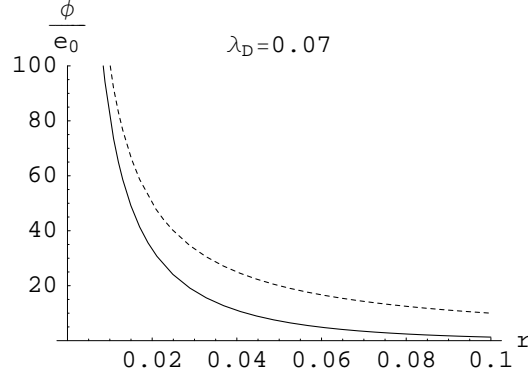


Figure 2: Confronto tra il potenziale coulombiano e il potenziale schermato

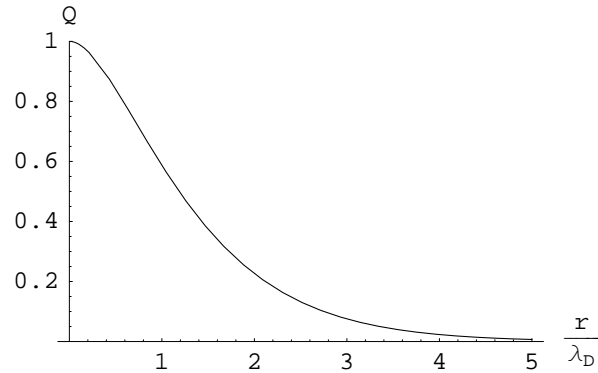


Figure 3: La carica contenuta all'interno della sfera di raggio r

L'effetto di schermo appare evidente se si calcola la carica contenuta all'interno della sfera di raggio r ,

$$\begin{aligned}
 Q(r) &= \int_V q dV = \int_0^r 4\pi q r^2 dr = \int_0^r (-\nabla^2 \Phi) r^2 dr \\
 &= - \int_0^r \left(\frac{\Phi}{\lambda^2}\right) r^2 dr + e_0 \int_V \delta(\mathbf{r}) dV \\
 &= -\frac{e_0}{\lambda^2} \int_0^r r \exp(-r/\lambda) dr + e_0 \\
 &= e_0 \exp(-r/\lambda)(1 + r/\lambda)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Come si vede dalla Fig. 1.3 la carica contenuta nella sfera di raggio r è praticamente nulla per valori di r pari a qualche unità di λ .

E' importante sottolineare che l'uso della meccanica statistica, cioè delle funzioni di distribuzione di Boltzmann per descrivere la densità delle particelle in regioni di dimensioni lineari dell'ordine della lunghezza di Debye, ha senso solo se $\bar{d} \ll \lambda_D$, dove \bar{d} è la distanza media tra le particelle. Ricordando che $\bar{d} \simeq n^{-1/3}$, la precedente condizione può essere scritta nella forma:

$$n\lambda_D^3 \gg 1 \tag{1.10}$$

che rappresenta l'espressione formale della condizione di quasi-neutralità.

Se ora calcoliamo il rapporto $e\Phi/kT$ per $r = \bar{d}$, tenendo conto che $\bar{d} \ll \lambda$, otteniamo:

$$(e\Phi/kT)_{\bar{d}} = \frac{e^2}{kT} \frac{\exp(-\bar{d}/\lambda)}{\bar{d}} \simeq \frac{e^2}{kT} \frac{1}{\bar{d}} \simeq \frac{e^2}{kT} n^{1/3} \simeq \left(\frac{\bar{d}}{\lambda}\right)^2 \ll 1$$

e vediamo che l'approssimazione $e\Phi/kT \ll 1$ usata precedentemente è pienamente giustificata per un plasma.

1.3 Parametri caratteristici dei plasmi

La lunghezza di Debye introdotta nel paragrafo precedente costituisce un primo esempio di stima dei parametri caratteristici di un plasma. Possiamo ora cercare di individuarne alcuni altri. Come *velocità* caratteristica si considera abitualmente la *velocità termica* delle particelle, definita come:

$$v_T = \sqrt{3kT/m}.$$

Un *tempo* caratteristico, τ_p , si ottiene dalla combinazione λ_D/v_T . Una *frequenza* caratteristica, proporzionale all'inverso di τ_p , è la *frequenza di plasma* è definita da :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}} \quad (1.11)$$

Nell'equazione precedente compaiono sia la carica che la massa della particella considerata e quindi bisognerà distinguere la frequenza di plasma degli elettroni, ω_{pe} , da quella dei protoni, ω_{pi} e così via. Nel caso degli elettroni si ha:

$$\omega_{pe} \simeq 5.64 \times 10^4 n_e^{1/2}.$$

La frequenza di plasma, da noi ottenuta da considerazioni puramente dimensionali, ha tuttavia un preciso significato fisico. Per vederlo, consideriamo il caso di un plasma in cui, in condizioni di equilibrio, sia $n_e = n_i = n_0 = \text{cost.}$. Supponiamo ora di introdurre una piccola perturbazione nella distribuzione degli elettroni, $n_e = n_0 + n'_e$ con $|n'_e| \ll n_0$. Supponiamo inoltre che la distribuzione degli ioni non subisca variazioni, cioè che gli ioni costituiscano semplicemente uno sfondo immobile. L'equazione di moto per gli elettroni (in una dimensione) si può quindi scrivere:

$$m_e \frac{\partial v}{\partial t} = -eE \quad (1.12)$$

con il campo elettrico dato dall'equazione:

$$\nabla \cdot E = 4\pi q \rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e n'_e$$

L'equazione di continuità, tenendo conto che n'_e , v e E sono quantità piccole del primo ordine, si scrive:

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Derivando la (1.12) rispetto a x e utilizzando le due equazioni successive, si può ricavare un'equazione per v che risulta:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} v = -\omega_{pe}^2 v.$$

Gli elettroni eseguono quindi un moto armonico con frequenza ω_{pe} . Questo moto ordinato è la conseguenza della nascita di un campo elettrico dovuto alla violazione locale della neutralità di carica.

Un'altra frequenza importante è la *frequenza di collisione*. Una maniera approssimata di calcolarla è la seguente. Definiamo collisione (binaria) l'interazione che avviene tra due particelle quando la loro distanza scende al disotto di una lunghezza caratteristica, b , per esempio quella in cui l'energia elettrostatica sia pari all'energia cinetica del moto relativo. Si osservi che questa condizione non è in contrasto con quella precedentemente utilizzata che imponeva che l'energia elettrostatica fosse molto minore dell'energia termica quando le particelle si trovano ad una distanza pari alla *distanza media* \bar{d} . Ciò significa semplicemente che $b \ll \bar{d}$. Se le particelle in questione hanno cariche $Z_1 e$ e $Z_2 e$ e masse m_1 e m_2 , avremo:

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{b} \simeq \frac{3}{2} kT,$$

La sezione d'urto per collisioni sarà quindi:

$$\sigma_c = \pi b^2 = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(3kT)^2},$$

e la frequenza di collisione:

$$\nu_c = n\sigma_c v_T = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 n}{m^{1/2} (3kT)^{3/2}}. \quad (1.13)$$

Le precedenti formule approssimate hanno la corretta dipendenza dai parametri delle particelle che collidono: una trattazione esatta deve però tener conto che in realtà in un plasma le collisioni non vanno pensate come un singolo evento che coinvolge due sole particelle, poichè, all'interno della sfera di Debye, ogni particella interagisce con tutte le altre. Le modifiche alla precedente espressione consistono nell'introduzione di fattori numerici e, soprattutto, in quella di un termine moltiplicativo, il cosiddetto *logaritmo coulombiano*, $\ln\Lambda$. La formula corretta per la frequenza di collisione per una coppia elettrone-elettrone è:

$$\begin{aligned} \nu_{ee} &= 1.43 \frac{4\pi e^4 n_e}{m_e^{1/2} (3kT)^{3/2}} \ln\Lambda_{ee} \\ &\simeq 3.75 n_e T^{-3/2} \ln\Lambda_{ee}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

L'analogia formula per le collisioni tra due ioni identici di carica Ze è:

$$\begin{aligned}\nu_{ii} &= 1.43 \frac{4\pi Z^4 e^4 n_i}{m_i^{1/2} (kT)^{3/2}} \ln \Lambda_{ii} \\ &\simeq 8.76 \times 10^{-3} n_i T^{-3/2} \ln \Lambda_{ii},\end{aligned}\tag{1.15}$$

dove il valore numerico finale si riferisce al caso di una collisione protone-protone. Poichè dalla quasi-neutralità segue che $n_e = Zn_i$, vale la seguente relazione:

$$\frac{\nu_{ee}}{\nu_{ii}} \simeq \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{1}{Z^3},$$

dove si è supposto che $\Lambda_{ee} \simeq \Lambda_{ii}$.

Infine per le collisioni elettrone-ione la teoria completa dà :

$$\begin{aligned}\nu_{ei} &= \frac{8(6\pi)^{1/2} Z^2 e^4 m_e^{1/2} n_i}{m_i (3kT)^{3/2}} \ln \Lambda_{ei} \\ &= 3.96 \times 10^{-3} n_i T^{-3/2} \ln \Lambda_{ei},\end{aligned}\tag{1.16}$$

dove il valore numerico finale si riferisce al caso di una collisione elettrone-protone.

Il logaritmo coulombiano è definito da :

$$\ln \Lambda = \ln(4\pi n \lambda_D^3) \simeq 8.33 - \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{3}{2} \ln(T),\tag{1.17}$$

ed ha ovviamente una debole dipendenza dalla densità e dalla temperatura, oltre che dalla carica delle particelle coinvolte. Il valore numerico nella precedente equazione vale per un plasma di elettroni e protoni.

Le collisioni sono la causa della *termalizzazione*, cioè del processo che porta popolazioni inizialmente a temperature differenti al raggiungimento dell'equilibrio termodinamico. Durante una collisione si ha la possibilità di trasferimento di energia dalla particella più energetica a quella meno energetica. In una collisione tra particelle di ugual massa, le energie dopo la collisione sono le stesse. Se indichiamo con τ il tempo caratteristico in cui le popolazioni raggiungono l'equilibrio termico, avremo $\tau_{ee} \simeq (\nu_{ee})^{-1}$ e analogamente $\tau_{ii} \simeq (\nu_{ii})^{-1}$. Nel caso di una collisione elettrone-ione si ha che l'elettrone cede solo una frazione pari a (m_e/m_i) allo ione (per rendersene conto basta applicare le leggi della conservazione dell'impulso e dell'energia nel sistema in cui lo ione è inizialmente fermo). Quindi la termalizzazione richiede un tempo più lungo,

$$\tau_{ei} \simeq (m_i/m_e) \nu_{ei}^{-1}.$$

Ne consegue che in un plasma di elettroni e protoni $\tau_{ei} \gg \tau_{ii} \gg \tau_{ee}$ e quindi la termalizzazione di elettroni e ioni richiede tempi assai più lunghi di quelle tra specie uguali. Gli elettroni e gli ioni in un plasma possono esistere per lunghi tempi a temperature diverse.

Le frequenze di collisione sono quantità che caratterizzano moti *disordinati* delle particelle di un plasma, mentre la frequenza di plasma si riferisce ad un moto *ordinato*. Perchè si

possa parlare di un moto ordinato, è necessario che sia $v_{ei} \ll \omega_{pe}$. Utilizzando l'Eq.(1.13) e la definizione di ω_p si può verificare che la precedente diseuguaglianza è soddisfatta. Infatti

$$\frac{v_{ei}}{\omega_{pe}} \ll \frac{v_{ee}}{\omega_{pe}} \simeq (n\lambda_D^3)^{-1} \ll 1,$$

utilizzando la (1.10).

In presenza di un campo magnetico, vi sono due altre grandezze caratteristiche che giocano un ruolo assai importante e che incontreremo spesso nel seguito. Esse sono : la *frequenza di ciclotrone* o *frequenza di Larmor* e la *velocità di Alfvén* definite rispettivamente da:

$$\omega_c = \frac{|e|B}{mc} \quad (1.18)$$

e

$$c_a = \sqrt{\frac{B}{4\pi\rho}} = \sqrt{\frac{B}{4\pi m_i n_i}} \simeq 2.18 \times 10^{11} B n_i^{-1/2}. \quad (1.19)$$

Si avrà quindi

$$\omega_{ce} \simeq 1.76 \times 10^7 B,$$

e

$$\omega_{ci} = \frac{m_e}{m_1} \omega_{ce} \simeq 9.58 \times 10^3 B.$$

La teoria dei plasmi che esporremo avrà sempre carattere classico (cioè non quantistico) e non relativistico. Possiamo facilmente stimare quando queste approssimazioni perdono la loro validità. Avremo necessità di considerare correzioni relativistiche quando l'energia termica $kT \gtrsim mc^2$. Nel caso degli elettroni questo avverrà per

$$T \gtrsim 6 \times 10^9 K$$

circostanza che raramente si verifica. Ciò non significa che i plasmi relativistici non esistano, ma semplicemente che le correzioni relativistiche non hanno interesse nei plasmi in *equilibrio termodinamico*. Nulla vieta tuttavia che ci siano particelle con energia molto superiore a kT , particelle che daranno luogo a processi *non termici*, circostanza tutt'altro che rara.

Infine, gli effetti quantistici diverranno importanti quando le distanze tipiche del plasma saranno dell'ordine o minori della *lunghezza d'onda di De Broglie*, $\lambda_q = \hbar/p$, dove p è l'impulso della particella. Nel caso di moto termico avremo:

$$\lambda_q = \frac{\hbar}{(3mkT)^{1/2}},$$

e quindi si dovranno tenere in conto effetti quantistici quando:

$$\bar{d} \simeq n^{-1/3} \lesssim \lambda_q$$

cioè

$$T n^{-2/3} \lesssim \frac{\hbar^2}{3mk} \simeq 2.95 \times 10^{-12}.$$

dove il valore numerico si riferisce agli elettroni. Gli effetti quantistici si faranno dunque sentire a basse temperature e/o alte densità.

1.4 Descrizione classica di un plasma

La descrizione classica di un plasma si basa comunemente su un approccio di tipo *microscopico*. Con questo si intende che si considera il plasma come un insieme di particelle immerse nello spazio *vuoto*. Le equazioni di Maxwell per i campi si scrivono quindi nella forma:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi q \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.20}$$

dove q e \mathbf{J} rappresentano le densità di carica e corrente *totali*, comprendenti cioè anche le eventuali densità di carica e corrente *esterne*. Prendendo la divergenza della seconda delle (1.20) e combinandola con la derivata della terza rispetto al tempo, si ottiene *l'equazione di continuità per la carica elettrica*:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0.$$

Si osservi ora che le due equazioni per le divergenze nelle (1.20) sono in realtà delle condizioni iniziali. Infatti:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B}$$

e quindi è sufficiente imporre $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ a un certo istante per garantire che tale condizione sia sempre soddisfatta. Analogamente, derivando rispetto al tempo l'equazione per $\nabla \cdot \mathbf{E}$ e utilizzando l'equazione di continuità per la carica, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi q) = c \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0.$$

Ciò non significa che le equazioni per le divergenze non si possano usare, ma semplicemente che non vanno inserite nel computo delle equazioni indipendenti.

D'altra parte, ciascuna particella obbedisce all'equazione di moto:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = e_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{B} \right).\tag{1.21}$$

Per la conoscenza completa del sistema sarà necessario accoppiare N di tali equazioni, con N pari al numero delle particelle, con le (1.20). Si ha quindi un totale di $3N + 6$ equazioni nelle $3N + 10$ incognite \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{j} , q . Mancano ancora le relazioni tra le densità di carica e di

corrente e le variabili dinamiche delle particelle. Queste si possono scrivere nella forma:

$$\begin{aligned}
 q(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^N e_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \\
 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)]
 \end{aligned}
 \tag{1.22}$$

dove e_i è la carica della particella i -esima e $\mathbf{r}_i(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$ sono rispettivamente la traiettoria e la velocità della particella i -esima. Le precedenti definizioni (4 equazioni scalari) forniscono le relazioni mancanti e permettono di ottenere un sistema di $3N + 10$ equazioni in $3N + 10$ incognite.

A parte problemi di carattere pratico (la soluzione di un tale sistema è ovviamente impossibile), questo schema è completo e fornisce in linea di principio la soluzione richiesta. E' chiaro tuttavia che se anche fosse possibile risolvere un tale sistema, la quantità d'informazione contenuta nella soluzione sarebbe enormemente sovrabbondante rispetto a qualsiasi possibilità di utilizzo e di verifica osservativa o sperimentale. Una descrizione ragionevole può essere ottenuta passando da una descrizione microscopica completa, come quella appena delineata, ad una descrizione statistica, che rappresenta il migliore compromesso possibile tra accuratezza e possibilità di utilizzo. Questa transizione implica tuttavia una perdita d'informazione, poichè si rinuncia alla conoscenza delle traiettorie individuali delle particelle, conoscenza che viene considerata superflua. Come vedremo, anche un approccio statistico può rivelarsi eccessivamente dettagliato e in questo caso potremo far ricorso ad un ulteriore schema, lo schema fluido, in cui ancora una volta viene perduta una parte dell'informazione, quella sulla distribuzione in velocità delle particelle microscopiche. La scelta dello schema dipende essenzialmente da un giudizio sulla rinunciabilità o meno di certe informazioni. Ad ogni passo si guadagna in semplicità, ma si perde in "potere risolutivo".

La descrizione completa, quella cioè che fa uso delle Equazioni (1.20) - (1.22) può essere tuttavia utilizzata se nelle (1.22) $N = 1$ e se i campi che compaiono nelle (1.20) sono in realtà campi **esterni**, cioè quando ci si limiti a considerare il moto di una sola particella in campi assegnati. In questo caso si ha a che fare con la "Teoria delle Orbite", che di fatto appartiene solo marginalmente alla fisica del plasma, se per plasma intendiamo un sistema la cui dinamica è dominata dagli effetti collettivi. La teoria delle orbite è tuttavia utile per avere una percezione del moto delle particelle e per un successivo utilizzo in teoria cinetica.

2 Teoria delle orbite

In questo capitolo saranno esaminati alcuni casi semplici di moto di una singola particella in campi elettromagnetici assegnati. Come vedremo, anche in questi casi la dinamica tende a divenire complessa e questo fa capire come sia necessario sviluppare, per quanto possibile, una visione intuitiva dei processi in gioco prima di affrontare il problema nella sua interezza.

2.1 Campo magnetico omogeneo e costante

Consideriamo il caso di un campo magnetico omogeneo e costante, cioè indipendente sia dalle coordinate spaziali che dal tempo, definito, rispetto ad un opportuno sistema di coordinate cartesiane, da $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. L'equazione di moto di una particella in tale campo sarà data da:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

dove e è la carica della particella, che può essere positiva o negativa. Il moto lungo il campo è quindi caratterizzato da

$$\ddot{z} = 0$$

e quindi $\dot{z} = v_{\parallel} = \text{costante}$. Moltiplicando scalarmente l'equazione di moto per $\dot{\mathbf{r}}$ si ottiene

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

e quindi

$$\frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 = W = W_{\parallel} + W_{\perp} = \text{costante}.$$

L'energia totale dunque si conserva, com'è logico visto che la forza di Lorentz non compie lavoro. Poichè inoltre $W_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \text{costante}$, anche W_{\perp} resta costante durante il moto.

La traiettoria si ottiene integrando la (??) che scriviamo per componenti nella seguente forma:

$$\frac{dv_x}{dt} = \Omega v_y \quad (2.2a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\Omega v_x \quad (2.2b)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0, \quad (2.2c)$$

dove

$$\Omega = \frac{eB}{mc}.$$

Le soluzioni della (2.2) sono:

$$v_x = v_{\perp} \cos(\Omega t + \alpha) \quad (2.3a)$$

$$v_y = -v_{\perp} \sin(\Omega t + \alpha) \quad (2.3b)$$

$$v_z = v_{\parallel}. \quad (2.3c)$$

Integrando ancora una volta le (2.3) si ottengono le equazioni della traiettoria:

$$x = x_0 + \left(\frac{v_{\perp}}{\Omega}\right) \sin(\Omega t + \alpha) \quad (2.4a)$$

$$y = y_0 + \left(\frac{v_{\perp}}{\Omega}\right) \cos(\Omega t + \alpha) \quad (2.4b)$$

$$z = z_0 + v_{\parallel} t. \quad (2.4c)$$

La traiettoria è un'elica percorsa con senso di rotazione orario (antiorario) dalle particelle positive (negative) per un osservatore che guardi in direzione antiparallela a \mathbf{B} . Il moto proiettato sul piano (x, y) è una circonferenza di raggio $R_L = v_{\perp}/|\Omega|$, detto *raggio di Larmor* percorsa con velocità angolare $|\Omega|$. $|\Omega|$ viene detta *frequenza di Larmor*, *frequenza di ciclotrone* o *girofrequenza*.

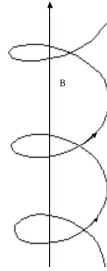


Figure 4: traiettoria di una carica negativa in campo magnetico omogeneo

Le quantità ω_{ce} e ω_{ci} definite nel Cap. 1 sono semplicemente i valori che $|\Omega|$ assume per un elettrone e un protone.

2.2 Campo magnetico e campo elettrico ortogonali

La configurazione di campo che consideriamo è la seguente:

$$\mathbf{E} = (0, E, 0),$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B).$$

con E e B indipendenti dallo spazio e dal tempo. Anche in questo caso l'equazione (2.1) può essere risolta direttamente senza difficoltà. Infatti l'unico cambiamento rispetto al caso precedente riguarda la componente y dell'equazione di moto, (2.3b) che diviene:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\Omega v_x + \frac{e_0 E}{m} = -\Omega \left(v_x - c \frac{E}{B} \right).$$

Se $E \ll B$ è possibile considerare un sistema di riferimento S' , definito dalle coordinate $[x' = x - c(E/B)t, y, z]$, cioè un sistema che si muova nella direzione positiva delle x con velocità pari a cE/B . In S' la precedente equazione si scrive:

$$\frac{dv'_y}{dt} = -\Omega v'_x,$$

identica alla (2.2b), e quindi la soluzione è quella data dalla (2.4). Ritornando al sistema di riferimento originario si vede che la traiettoria in questo caso è la sovrapposizione di un moto elicoidale con una traslazione lungo l'asse x con velocità costante pari a cE/B . È chiaro che per $E/B = O(1)$, si dovrà tener conto delle correzioni relativistiche all'equazione di moto. La velocità di deriva ottenuta può essere scritta in forma generale come:

$$\mathbf{v}_E = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.5)$$

La forza generata dal campo elettrico lungo y , che comporterebbe una continua accelerazione in tale direzione, è perfettamente compensata dal termine $\frac{e}{c} \mathbf{v}_E \times \mathbf{B}$ e come conseguenza il moto lungo x resta confinato in un intervallo finito ed è periodico.

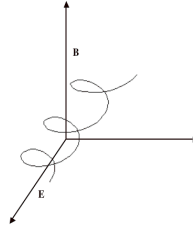


Figure 5: Moto in campi elettrici e magnetici ortogonali e costanti

Il caso $E > B$ è più delicato. Infatti ripetendo la precedente procedura, si ottiene facilmente la seguente equazione per v_x :

$$v_x = c \frac{E}{B} + v_{0x} \cos(\Omega t).$$

Ma, per rimanere nell'ambito della teoria non relativistica fin qui usata, bisognerebbe che fosse $cE/B \ll 1$, contrariamente alla nostra ipotesi. Quindi, se $E > B$, bisognerà sempre usare la forma relativistica delle equazioni di moto. Per comprendere meglio la differenza tra i due casi è utile considerare le trasformazioni relativistiche per i campi elettromagnetici. Considerando una trasformazione di Lorentz lungo l'asse positivo delle x con velocità v , si ha :

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned}$$

Nella configurazione da noi scelta avremo $E'_x = 0$, $E'_z = 0$, $E'_y = \gamma(E - \beta B)$. E' chiaro dunque che, se $E < B$, scegliendo $\beta = \frac{E}{B}$, cioè una traslazione lungo x con velocità pari a v_E , il campo elettrico sarà nullo nel sistema S' . In tale sistema si avrà dunque solo un campo magnetico lungo z' , $B'_z = \gamma(B - \beta E) = \gamma(B - E^2/B^2) = B/\gamma$ ed il moto sarà quindi del tipo elicoidale già visto. Nel sistema S , cioè nel nostro sistema di partenza, avremo dunque una sovrapposizione del moto elicoidale e del moto traslatorio. La possibilità di scegliere un sistema di riferimento in cui sia $E = 0$ deriva dal fatto che le quantità $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ e $E^2 - B^2$ sono invarianti relativistici. Se $E \perp B$ e $E < B$, il primo dei due invarianti è nullo ed il secondo è negativo, per cui è sempre possibile trovare un sistema in cui $E = 0$. Se viceversa $E > B$, il secondo invariante è positivo e quindi sarà possibile trovare un sistema di riferimento inerziale in cui $B = 0$. La soluzione in questo caso si potrà trovare eseguendo una trasformazione di Lorentz con $\beta = B/E$, risolvendo il problema del moto di una particella in un campo elettrico nel nuovo sistema di riferimento e applicando la trasformazione di Lorentz inversa al risultato per ottenere la traiettoria nel

Una caratteristica importante messa in luce dall'Eq. (2.5) è che la velocità di deriva non dipende dal segno della carica. Elettroni e protoni si muovono con la stessa velocità e quindi questo moto di deriva non dà luogo a correnti. Se le particelle sono sottoposte, oltre che all'azione del campo magnetico, anche a quella di una forza \mathbf{F} *non elettrica, costante e ortogonale a B* , si avrà ancora una deriva ortogonale sia a \mathbf{F} che a B il cui valore è dato dalla (2.5) in cui \mathbf{E} è sostituito da \mathbf{F}/e :

$$\mathbf{v}_F = c \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{e B^2} \quad (2.6)$$

In questo caso la velocità di deriva dipende dal segno della carica e dà luogo ad una corrente elettrica.

2.3 Campi magnetici lentamente variabili

Qualora il campo magnetico sia debolmente disomogeneo, cioè subisca una variazione lenta con la posizione, o vari lentamente con il tempo è possibile risolvere l'equazione di moto (2.1) in maniera approssimata. Esamineremo ora alcuni casi interessanti che ci daranno modo di introdurre il concetto di *invariante adiabatico*.

2.3.1 Campi debolmente disomogenei

L'Eq. (2.6) ci permette di trattare il caso di campi magnetici con variazione lenta rispetto ad una variabile spaziale, effettuando un'analisi locale. Consideriamo per esempio una linea di forza del campo magnetico che abbia una certa curvatura. Localmente la particella sarà vincolata a girare intorno al campo magnetico, che potrà essere considerato costante su dimensioni dell'ordine del raggio di Larmor (campo debolmente variabile!). La particella

tuttavia si sposterà anche parallelamente alla linea di forza di B e, a causa della curvatura, sarà sottoposta ad una forza centrifuga $\mathbf{F} = \frac{m v_{\parallel}^2 \mathbf{R}_c}{R_c^2}$, dove R_c è il raggio di curvatura locale. La (2.6) ci dice allora che la particella è soggetta un moto di deriva con velocità

$$\mathbf{v}_C = \frac{c v_{\parallel}^2 (\mathbf{R}_c \times \mathbf{B})}{e R_c^2 B^2} = \frac{2 c W_{\parallel}}{e R_c B} (\hat{\mathbf{R}}_c \times \hat{\mathbf{B}}), \quad (2.7)$$

dove $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{R}}_c$ sono rispettivamente i versori del campo magnetico e del raggio di curvatura. Il fattore in parentesi è quindi un termine puramente geometrico che descrive la struttura locale delle linee di forza.

Questo moto traslatorio viene indicato col nome di *deriva da curvatura (curvature drift)*

Se invece si considera un campo unidirezionale, il cui valore dipende da una coordinata in direzione normale a \mathbf{B} , cioè se, per esempio, $B = (0, 0, B(y))$, con $B(y)$ funzione lentamente variabile su dimensioni dell'ordine del raggio di Larmor,

$$\frac{dB/dy}{B} R_L \ll 1,$$

potremo analizzare localmente il problema nel modo seguente.

La forza di Lorentz nell'intorno di un punto y_0 è data da :

$$\mathbf{F}(y) = \mathbf{F}(y_0 + \delta y) = \frac{e}{c} [B(-v_x \mathbf{e}_y + v_y \mathbf{e}_x)]_{y_0 + \delta y},$$

dove si è preso in esame solo il moto nel piano normale a \mathbf{B} .// Ma $B(y_0 + \delta y) = B(y_0) + \delta y B'(y_0) = B_0 + \delta y B'_0$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(y) &= \frac{e B_0}{c} v_{\perp} [-v_x \mathbf{e}_y + v_y \mathbf{e}_x] + \\ &+ \frac{e B_0}{c} v_{\perp} [-v_x \mathbf{e}_y + v_y \mathbf{e}_x] \delta y (B'_0/B_0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Per valori di δy dell'ordine di R_L il fattore $\delta y (B'_0/B_0) \ll 1$ e quindi il primo termine descrive il moto circolare imperturbato, mentre il secondo rappresenta una correzione al primo ordine. Questo ci autorizza ad usare per $v_x, v_y, \delta y = y - y_0$ le espressioni ricavate per un campo magnetico costante, che sono funzioni periodiche dell'argomento $\Phi = \Omega t + \alpha$. Calcolando il valor medio di \mathbf{F} su un periodo di Larmor, $P = 2\pi/|\Omega|$, valutando cioè

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P \mathbf{F} dt$$

ci si rende facilmente conto che l'unico termine a media non nulla è il termine proporzionale a $v_x \delta y B'_0$ a secondo membro della (2.8). Il risultato finale è:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = -\frac{e}{c} v_{\perp} R_L \frac{1}{P} \int_0^P \sin^2(\Phi) dt B'_0 \mathbf{e}_y = -\frac{e v_{\perp} R_L}{2c |\Omega_0|} B'_0 \mathbf{e}_y = -\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{B'_0}{B} \mathbf{e}_y.$$

Si vede quindi che in ogni punto è presente una forza costante e ortogonale a \mathbf{B} che, secondo la (2.6), dà luogo ad una velocità di deriva ortogonale sia a \mathbf{B} che a $\langle \mathbf{F} \rangle$. Introducendo la precedente espressione nella (2.6) si ottiene:

$$\mathbf{v}_G = \frac{c W_{\perp} B B'_0}{e B^2} \mathbf{e}_x,$$

che si può scrivere in generale:

$$\mathbf{v}_G = \frac{c W_{\perp} (\mathbf{B} \times \nabla) \mathbf{B}}{e B^3}. \quad (2.9)$$

Questo moto traslatorio viene indicato col nome di *deriva da gradiente* (*gradient drift*).

2.3.2 Invarianza adiabatica del momento magnetico

Consideriamo una configurazione magnetica a simmetria cilindrica in cui il campo sia diretto predominantemente nella direzione assiale e vari poco su distanze dell'ordine del raggio di Larmor.. In un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z si abbia cioè

$$\mathbf{B} = (B_r(r, z), 0, B_z(r, z)) \quad ; \quad B_z \gg B_r \quad \rightarrow \quad B = (B_r^2 + B_z^2)^{1/2} \simeq B_z.$$

In coordinate cilindriche la condizione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ si scrive:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Integrando la precedente relazione si ottiene:

$$\int_0^r \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) dr = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \simeq - \left\langle \frac{\partial B}{\partial z} \right\rangle \frac{r^2}{2},$$

dove si è tenuto conto del fatto che r è dell'ordine del raggio di Larmor e che il campo e il suo gradiente varia poco su tali distanze. Avremo dunque :

$$B_r \simeq - \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z},$$

dove per semplificare la notazione abbiamo tralasciato di indicare i simboli $\langle \rangle$. L'equazione per il moto parallelo a B nella nostra configurazione è:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = - \frac{e_0}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z = - \frac{e_0}{c} v_{\theta} B_r.$$

Tenendo conto del diverso senso di girazione di particelle con opposto segno della carica si ha

$$v_{\theta} = - \frac{e_0}{|e_0|} v_{\perp},$$

e quindi

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{e_0}{c} \left(-\frac{e_0}{|e_0|} v_{\perp} \right) \left(-\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \simeq \left(\frac{|e_0|}{c} R_L |\Omega| \frac{R_L}{2} \right) \frac{\partial B}{\partial z} = -\left(\frac{|e_0|}{c} \frac{\pi R_L^2}{P} \right) \frac{\partial B}{\partial z},$$

dove si è introdotto il periodo $P = 2\pi/|\Omega|$. Il moto periodico della carica e_0 può essere assimilato ad una spira percorsa da una corrente di intensità $I = |e_0|/P$. Secondo la legge di Ampère, questa spira è equivalente a un dipolo magnetico, il cui *momento magnetico*, μ , è dato da:

$$\mu = \frac{I S}{c} = \frac{|e_0| \pi R_L^2}{c P} = \frac{1}{2B} m v_{\perp}^2 = \frac{W_{\perp}}{B}. \quad (2.10)$$

In conclusione l'equazione per il moto parallelo a \mathbf{B} risulta:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z},$$

da cui:

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = m v_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu \frac{dB}{dt},$$

dove si è tenuto conto della relazione

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Poichè l'energia totale si conserva durante il moto si avrà:

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = -\frac{dW_{\parallel}}{dt} = \mu \frac{dB}{dt},$$

relazione che può essere verificata direttamente utilizzando l'equazione per il moto perpendicolare a \mathbf{B} . A questo punto, possiamo calcolare la derivata temporale del momento magnetico, μ , come

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt} (W_{\perp}/B) = \frac{1}{B} \frac{dW_{\perp}}{dt} - \frac{1}{B^2} W_{\perp} \frac{dB}{dt} = \frac{\mu}{B} \frac{dB}{dt} - \frac{1}{B^2} (\mu B) \frac{dB}{dt} = 0.$$

Il momento magnetico dunque obbedisce ad una legge di conservazione, ma solo se il campo magnetico in cui si muove la particella ha una debole variazione spaziale. Per questo motivo si dice che il momento magnetico è un *invariante adiabatico*. In un sistema che sia solidale con la particella il campo magnetico appare variabile nel tempo, a causa del moto della particella stessa. Ci possiamo quindi aspettare che il momento magnetico sia invariante anche per il moto in un campo magnetico lentamente variabile nel tempo, come ora dimostreremo.

Consideriamo dunque campi magnetici che dipendano dal tempo, ma che siano "lentamente variabili", tali cioè da poter essere considerati approssimativamente costanti su scale di tempo dell'ordine del periodo di Larmor, $2\pi/|\Omega|$. Per semplicità consideriamo un campo unidirezionale, che in coordinate cilindriche abbia solo la componente assiale: $\mathbf{B} = (0, 0, B(t))$.

Un campo magnetico assiale variabile nel tempo induce un campo elettrico azimutale \mathbf{E} che deve essere introdotto nell'equazione di moto per la particella. Moltiplicando scalarmente l'equazione di moto per \mathbf{v}_\perp otteniamo:

$$m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \cdot \mathbf{v}_\perp = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\perp,$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\perp.$$

Integrando la precedente espressione rispetto al tempo tra 0 e $P = 2\pi/|\Omega|$, otteniamo a primo membro la variazione dell'energia perpendicolare in un periodo di Larmor, cioè ΔW_\perp :

$$\Delta W_\perp = \int_0^P \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\perp dt = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}_\perp = e \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S},$$

dove $d\mathbf{r}_\perp = \mathbf{v}_\perp dt$ e $d\mathbf{S}$ è un elemento orientato della superficie che si appoggia sull'orbita della particella. Utilizzando le equazioni di Maxwell, la precedente equazione si può scrivere:

$$\Delta W_\perp = -e \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \simeq \pi R_L^2 |e| \dot{B},$$

dove il termine $\langle \partial \mathbf{B} / \partial t \rangle = \dot{B}$ è stato portato fuori dal segno d'integrale a causa dell'ipotesi di variazione lenta del campo e si è tenuto conto del diverso senso di percorrenza dell'orbita per particelle di carica opposta.

Utilizzando l'espressione per R_L otteniamo infine:

$$\Delta W_\perp = W_\perp \frac{2\pi}{|\Omega|} \frac{\dot{B}}{B}.$$

D'altra parte, $(2\pi/|\Omega|)\dot{B}$ è la variazione di B in un periodo di Larmor, cioè ΔB , e quindi possiamo scrivere:

$$\Delta W_\perp = W_\perp \frac{\Delta B}{B},$$

o, ricordando la (2.10),

$$\Delta(W_\perp/B) = \Delta(\mu) = 0, \tag{2.11}$$

Anche in questo caso, Il momento magnetico è un invariante adiabatico, come già anticipato.

2.3.3 Specchi e bottiglie magnetiche

Il concetto dell'invarianza adiabatica del momento magnetico trova una sua applicazione nello studio dei cosiddetti specchi magnetici. Consideriamo una campo magnetico, per esempio con simmetria assiale, che si intensifichi nella direzione positiva dell'asse z , come mostrato in figura.

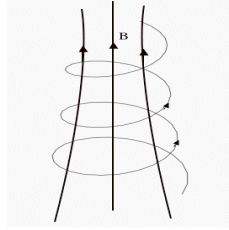


Figure 6: traiettoria in campo magnetico variabile

Poichè B aumenta all'aumentare di z , l'invarianza di μ implica che anche W_{\perp} deve aumentare. D'altra parte la conservazione dell'energia implica che $W = W_{\parallel} + W_{\perp} = costante$ e quindi all'aumento di W_{\perp} deve corrispondere una diminuzione di W_{\parallel} . Può accadere che per un valore di $B = B_R$ sufficientemente grande W_{\parallel} si annulli. In tal caso la particella, che non può più avanzare nella direzione positiva di z , viene riflessa. Una configurazione in cui questo accade viene chiamata *specchio magnetico*. Introducendo l'*angolo di lancio (pitch angle)* ϑ , definito come l'angolo formato dal vettore \mathbf{v} con l'asse z , cioè con la componente dominante del campo B , si avrà $v_{\perp} = v \sin \vartheta$ e la condizione di invarianza di μ potrà essere scritta nella forma :

$$\frac{1}{2}mv^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{B} = costante \quad \text{cioè} \quad \frac{\sin^2 \vartheta}{B} = costante$$

poichè l'energia totale $\frac{1}{2}mv^2$ si conserva. Valutando la costante nel punto di riflessione, si ha:

$$\sin^2 \vartheta = \frac{B}{B_R}. \quad (2.12)$$

Se il campo presenta un massimo, B_{max} , è chiaro che dovrà essere $B_R < B_{max}$. Infatti se la particella riesce ad arrivare a B_{max} con $v_{\parallel} \neq 0$ continuerà a muoversi nella stessa direzione, poichè dopo B_{max} il campo diminuisce e quindi W_{\parallel} aumenta a scapito di W_{\perp} . Dalla (??) segue che la condizione di riflessione si può scrivere come

$$\sin^2 \vartheta = \frac{B}{B_R} \geq \frac{B}{max}.$$

Le particelle che hanno un angolo di lancio tale che $\sin^2 \vartheta < \frac{B}{B_{max}}$ non verranno riflesse.

Se consideriamo ora una configurazione magnetica, come quella in figura, ottenuta accoppiando due specchi magnetici, potremo confinare nella regione tra gli specchi le particelle con angoli di lancio sufficientemente grandi.

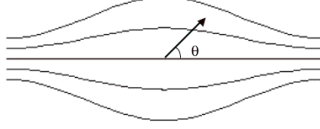


Figure 7: La bottiglia magnetica

Indicando con B_0 il valore del campo nel punto di minimo, saranno confinate le particelle con

$$\sin^2 \vartheta_0 \geq \frac{B_0}{B_{max}} = 1/R,$$

dove si è posto $R = B_{max}/B_0$. R vien chiamato *rappporto speculare (mirror ratio)*. Le altre particelle, cioè quelle contenute nel cono con apertura ϑ_0 , detto *cono di perdita (loss cone)* non vengono confinate. La probabilità \mathcal{P} di perdere una particella dipende dal rapporto tra l'angolo solido sotteso dal cono e 2π , cioè

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_0} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{\vartheta_0} \sin \vartheta \, d\vartheta = 1 - \sqrt{1 - 1/R} \simeq 1/2R \quad \text{per } R \gg 1.$$

Il processo di perdita non si arresta perchè le collisioni provvedono continuamente a riempire di particelle il cono di perdita. La configurazione a *bottiglia magnetica* non è quindi particolarmente efficiente per il confinamento ed è stata quindi abbandonata.

Una configurazione di tipo bottiglia magnetica, ma con campo magnetico lentamente variabile nel tempo, possiede un altro invariante adiabatico, il cosiddetto *invariante adiabatico longitudinale*. Si definisce la quantità J come

$$J = \int_{s_1}^{s_2} v_{\parallel} \, ds,$$

dove s_1 e s_2 sono i due punti di riflessione del moto parallelo e si suppone che, per effetto della dipendenza temporale di B , essi si muovano su tempi scala lunghi rispetto al tempo di transito della particella tra s_1 e s_2 . Si può dimostrare (vedi Boyd & Sanderson : *The Physics of Plasmas*, pag. 28) che anche J è un invariante adiabatico.

Un'interessante applicazione di questo invariante riguarda l'accelerazione dei raggi cosmici. Il problema può essere schematizzato come segue. Un insieme di particelle si trova in un ambiente in cui sono presenti delle nubi magnetizzate in movimento che possono essere assimilate a degli specchi magnetici in movimento. Nello spazio tra le nubi il campo magnetico

è molto inferiore a quello nelle nubi. Le particelle con un angolo di lancio sufficientemente grande vengono confinate tra le nubi. Sia s_0 la separazione tra le nubi a un certo tempo e s'_0 quella ad un tempo successivo. L'invarianza di J implica che

$$v_{\parallel} s_0 \simeq v'_{\parallel} s'_0 \quad \text{cioè} \quad v'_{\parallel} \simeq v_{\parallel} \frac{s_0}{s'_0},$$

dove v_{\parallel} e v'_{\parallel} sono le velocità medie al tempo t e t' rispettivamente. L'energia W'_{\parallel} risulta dunque $W'_{\parallel} = W_{\parallel} (s_0/s'_0)^2$ e quindi aumenta per un moto in avvicinamento delle nubi e diminuisce per un moto in allontanamento. Poichè $W_{\perp} = \mu B = \text{costante}$ (μ è costante perchè invariante adiabatico e B non cambia sostanzialmente durante il moto), si ha che anche l'energia totale $W = W_{\parallel} + W_{\perp}$ aumenta per un moto in avvicinamento e viceversa. Poichè il moto delle nubi può considerarsi casuale, sembrerebbe che il guadagno medio di energia debba essere nullo. Tuttavia questo non è vero perchè in un certo intervallo di tempo vi sono più urti "di testa" che urti "di coda" e quindi si ha un guadagno netto di energia. Questo meccanismo di accelerazione dei raggi cosmici vien detto *meccanismo di accelerazione di Fermi del secondo ordine* (venne infatti proposto da Fermi nel 1949). Esso non è tuttavia molto efficiente a causa della perdita delle particelle che si trovano nel cono di perdita. Oggi si ritiene che il meccanismo più efficiente sia il cosiddetto *meccanismo di accelerazione di Fermi del primo ordine* che sfrutta l'accelerazione di particelle sui fronti delle onde d'urto.

3 Descrizione cinetica dei plasmi

Come già indicato nell'Introduzione, quando il numero delle particelle del sistema diventa grande un buon compromesso tra completezza e praticità nella descrizione di un plasma è quello fornito da un *approccio statistico*. Una trattazione esauriente della teoria cinetica dei plasmi esula dagli scopi di questo testo. Ci limiteremo pertanto a fornire i concetti essenziali di tale teoria, anche come presupposto dei più comuni modelli fluidi, che saranno trattati nel prossimo capitolo.

3.1 La funzione di distribuzione

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, la descrizione completa dello stato di una particella richiede la conoscenza istantanea della sua posizione e della sua velocità. Questo suggerisce di introdurre uno spazio a sei dimensioni, detto *spazio delle fasi*, definito da tre coordinate di posizione (x, y, z) e tre coordinate di velocità (v_x, v_y, v_z) , in cui, a un qualunque istante t , lo stato dinamico di una particella sarà rappresentato da un punto. Lo stato dell'intero sistema sarà dato dall'insieme dei punti rappresentativi delle particelle costituenti il sistema. La transizione ad una descrizione statistica si ottiene introducendo una funzione densità nello spazio delle fasi, che fornisce il numero medio di particelle presenti in una piccola cella di tale spazio. Questa densità, che sarà funzione delle sei coordinate che

definiscono lo spazio delle fasi e del tempo, viene detta *funzione di distribuzione*, $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Il numero medio di particelle che hanno coordinate comprese tra \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ e velocità comprese tra \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ sarà quindi dato da:

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Quando il numero di particelle è sufficientemente grande da permettere di considerare la funzione di distribuzione come una funzione *continua* delle sue variabili, sarà possibile determinare il numero totale di particelle, N , come

$$N = \int_{V_6} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

dove V_6 rappresenta il volume dello spazio delle fasi.

Per determinare l'equazione che descrive l'evoluzione dinamica della funzione di distribuzione poniamoci nella situazione in cui il *numero totale* di particelle, N , non cambi durante l'evoluzione del sistema. Così facendo, trascuriamo, per esempio, i processi di ionizzazione o di ricombinazione che tuttavia possono facilmente essere reintrodotti nella trattazione. Come sempre in fisica, quando si è in presenza di una grandezza conservata (nel nostro caso N) è possibile scrivere una *equazione di continuità*. Per fare un esempio noto, in meccanica non relativistica la massa è una quantità conservata. Scrivendo la massa contenuta nel volume V come $M = \int_V \rho dV$, si avrà:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

dove il primo integrale rappresenta la diminuzione della massa contenuta nel volume V ed il secondo il flusso di massa attraverso la superficie S che delimita V (\mathbf{n} è la normale *esterna* all'elemento dS). Trasformando l'integrale di superficie in un integrale di volume, la precedente relazione si scrive:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0,$$

e, poichè V è arbitrario:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Si può procedere allo stesso modo per qualunque grandezza conservata, in particolare per N . In questo caso tuttavia bisognerà tener conto del fatto che il volume di cui parliamo è il volume dello spazio delle fasi e che la definizione dell'operatore ∇ dovrà essere modificata per tener conto della dipendenza di f dalle velocità oltre che dalla posizione. Porremo quindi:

$$\nabla \rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_i} = \nabla + \nabla_{\mathbf{v}}. \quad (3.2)$$

La legge di conservazione del numero di particelle nello spazio delle fasi potrà quindi essere espressa nella forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f\mathbf{a}) = 0, \quad (3.3)$$

dove \mathbf{a} è l'accelerazione applicata alla celle elementare dello spazio delle fasi. La precedente equazione si semplifica notando che :

- nello spazio delle fasi \mathbf{r} e \mathbf{v} sono variabili *indipendenti*. Pertanto, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e il secondo termine della (4.31) diviene semplicemente $\mathbf{v} \cdot \nabla f$,
- il termine $f \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a} = f \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F}/m) = 0$. Infatti, le forze normalmente in gioco non dipendono dalla velocità, tranne la forza di Lorentz, $\mathbf{F} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Tuttavia anche in questo caso si ha

$$\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} = \frac{e}{c} \sum_i \frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i}{\partial v_i} = 0$$

perchè la componente *i-esima* di $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ non contiene v_i .

Tenendo conto di quanto sopra, la (4.31) diviene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (3.4)$$

Fin qui abbiamo implicitamente supposto che tutte le particelle che si trovano nella stessa cella dello spazio delle fasi subiscano la stessa accelerazione. Se questo è vero per quel che riguarda gli effetti *collettivi*, cioè per le forze generate dall'insieme delle particelle del plasma, cessa di esserlo per le *collisioni*, cioè per le interazioni che coinvolgono due sole particelle. E' quindi ragionevole separare, nel computo delle forze, quelle collettive da quelle collisionali. Si osservi che anche le traiettorie nello spazio delle fasi generate dai due tipi di forze sono assai diverse tra loro. Infatti, gli effetti collettivi danno luogo a forze lentamente variabili con la posizione e generano delle traiettorie regolari, mentre le collisioni provocano una variazione brusca della velocità nelle posizioni in cui esse si verificano. Scriveremo dunque

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{lent.var.} + \mathbf{F}_{coll},$$

e separeremo il contributo collisionale portandolo a secondo membro dell'equazione (3.4). Introducendo la notazione

$$-\frac{\mathbf{F}_{coll}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll},$$

otteniamo la forma finale dell'equazione che descrive l'evoluzione dinamica della funzione di distribuzione:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}, \quad (3.5)$$

dove si sottintende che le forze \mathbf{F} che compaiono al primo membro sono quelle dovute agli effetti collettivi.

Tutto quanto detto finora vale sia per un gas neutro che per un plasma. Nel caso di un plasma il termine di forza si potrà scrivere nella forma

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{f},$$

dove \mathbf{f} sono altre forze di natura non elettromagnetica che agiscono sul plasma. In astrofisica il caso più comune è rappresentato dalle forze gravitazionali. La (3.5) dovrà essere accoppiata alle equazioni di Maxwell (1.20) che determinano i campi elettrici e magnetici e dalle altre equazioni che determinano \mathbf{f} . Trascurando per il momento le forze non elettromagnetiche potremo scrivere:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}. \quad (3.6)$$

A questo punto è necessario specificare la natura delle collisioni che determinano il secondo membro della (3.5): per ogni modello di collisione avremo una diversa equazione. Se ad esempio consideriamo un plasma rarefatto dominato dagli effetti collettivi, le collisioni possano essere trascurate e potremo quindi uguagliare a zero il secondo membro della (3.5) ottenendo l'*equazione di Vlasov*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (3.7)$$

Se adottiamo il modello di Boltzmann (collisioni binarie elastiche) otterremo l'*equazione di Boltzmann*, dove il termine collisionale è rappresentato da un integrale che coinvolge il prodotto di due funzioni di distribuzione. L'equazione di Boltzmann è particolarmente importante per i gas neutri in cui le collisioni binarie sono quelle dominanti, ma non è la più adatta a descrivere i plasmi. Infatti, come abbiamo già notato, all'interno della sfera di Debye ogni particella interagisce con molte particelle contemporaneamente e la deflessione che la particella subisce è il frutto di molte piccole deviazioni piuttosto che di una sola interazione. Il termine collisionale deve quindi essere opportunamente modificato, dando luogo alla cosiddetta *equazione di Fokker-Planck*.

3.2 I momenti della funzione di distribuzione

La soluzione analitica delle equazioni cinetiche è in generale impossibile, anche nel caso più semplice dell'equazione di Vlasov. Anche la soluzione numerica presenta difficoltà formidabili a causa dell'elevato numero di variabili (sette nel caso generale) da cui f dipende. Infatti, le poche soluzioni analitiche e quasi tutte le soluzioni numeriche si riferiscono a configurazioni che possiedono proprietà di simmetria con la conseguente diminuzione del numero di variabili indipendenti. Un'altra causa di complessità è legata al fatto che in un plasma sono presenti almeno due specie di particelle con opposto segno della carica (tipicamente elettroni e ioni positivi). Quindi in generale avremo tante equazioni cinetiche quante sono le specie di

particelle presenti. Osserviamo poi che al primo membro delle equazioni cinetiche, (3.6) la funzione di distribuzione appare linearmente **solo se** i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono campi *esterni*, cioè prodotti indipendentemente dalla dinamica delle particelle del plasma. Negli altri casi, le equazioni cinetiche andranno accoppiate con le equazioni di Maxwell i che legano i campi elettromagnetici alle distribuzioni di carica e di corrente che, a loro volta, dovranno essere espresse in termini del moto delle particelle cariche che costituiscono il plasma e quindi della funzione di distribuzione. I campi dipenderanno dunque dalla funzione di distribuzione e l'equazione cinetica sarà un'equazione *non lineare* in f .

Supponiamo tuttavia di aver risolto una o l'altra delle equazioni cinetiche ed avere quindi una forma esplicita della f . Abbiamo la possibilità di verificare sperimentalmente che la nostra soluzione corrisponde alla realtà fisica? La risposta è in generale negativa: la funzione di distribuzione non è un osservabile. Per determinare sperimentalmente la f , bisognerebbe *misurare*, all'interno di un volume dato, il numero di particelle che hanno una certa velocità e questo per tutti i valori del modulo e della direzione della velocità stessa. Misure di questo tipo sono possibili. sia pure in maniera approssimata, riducendo cioè il numero di direzioni lungo le quali si misura la velocità, solo in un plasma estremamente rarefatto, cioè in condizioni difficilmente realizzabili in laboratorio. Nello spazio tuttavia tali condizioni esistono e sonde spaziali sono riuscite a determinare la forma delle funzioni di distribuzione delle particelle che compongono il cosiddetto *vento solare*, cioè il flusso di particelle emesse dal Sole che riempie l'intero spazio interplanetario. Questo dimostra in modo convincente che lo spazio esterno può e deve essere considerato uno straordinario laboratorio cosmico, dove si svolgono esperimenti non realizzabili nei laboratori terrestri.

Se la funzione di distribuzione non può essere misurata, qual'è la sua utilità? Possiamo usarla per determinare grandezze più facilmente accessibili a una misura diretta? Per rispondere a queste domande, dobbiamo innanzi tutto chiederci se abbiamo veramente bisogno di tutta l'informazione contenuta in f . Ci troviamo ancora una volta nella situazione di dover decidere sulla rinunciabilità o meno di certe informazioni. Se, per esempio, noi giudicassimo che le informazioni essenziali sono quelle che si riferiscono allo spazio geometrico ordinario e non quelle all'intero spazio delle fasi, potremmo decidere di rinunciare all'informazione sulla distribuzione di velocità introducendo un processo di media sulle velocità. Consideriamo ad esempio l'integrale

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \iiint f(\mathbf{r}, v_x, v_y, v_z; t) dv_x dv_y dv_z. \quad (3.8)$$

Tenendo conto della definizione di f , Eq. (3.1), l'integrale definisce il numero medio di particelle con posizione compresa tra \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ *qualunque sia la loro velocità*, cioè la densità numerica delle particelle nello spazio ordinario, che indicheremo con $n(\mathbf{r}, t)$

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.9)$$

Allo stesso modo potremo definire il valor medio di qualunque grandezza dipendente dalla

velocità, $\Phi(\mathbf{v})$ come

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\int \Phi(\mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}} = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \Phi(\mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.10)$$

Nella definizione della media è necessario dividere per $n(\mathbf{r}, t)$ perchè la f non rappresenta la *probabilità* di trovare una particella in una cella spazio delle fasi, come nella normale definizione di media, ma il *numero medio* di particelle nella cella. In altre parole, la f non è normalizzata all'unità, ma a N . Tutti i valori medi sono evidentemente funzioni di \mathbf{r} e t .

Di particolare interesse sono le funzioni Φ che sono prodotti multilineari di componenti di \mathbf{v} , cioè $\Phi = v_i v_j \cdots v_k$. Si definisce *momento di ordine n* della f l'integrale della funzione di distribuzione per il prodotto di n componenti delle velocità:

$$\text{momento di ordine } n = \int (v_i v_j \cdots v_k) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.11)$$

dove il prodotto di componenti nell'integrando contiene n fattori. Ricordando la definizione di media, Eq. (3.10), è evidente che

$$\int (v_i v_j \cdots v_k) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = n(\mathbf{r}, t) \langle (v_i v_j \cdots v_k) \rangle \quad (3.12)$$

Dalla definizione di momento vediamo che la densità numerica è un momento di ordine zero (in questo caso $\Phi = 1$). Il valor medio della velocità, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, sarà dato da

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.13)$$

Le componenti della velocità media sono quindi legate ai momenti di ordine uno della funzione di distribuzione. Si osservi che $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ rappresenta la velocità media delle particelle che si trovano "nel punto \mathbf{r} " e non la velocità di una singola particella, grandezza che abbiamo indicato con \mathbf{v} .

In maniera analoga si possono definire la densità di carica, $q(\mathbf{r}, t)$ e la densità di corrente, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Infatti, se f_e e f_i sono rispettivamente le funzioni di distribuzione degli elettroni e degli ioni positivi, che per semplicità supporremo ionizzati una sola volta, si avrà:

$$q(\mathbf{r}, t) = \int e(f_i - f_e) d\mathbf{v}, \quad \text{e} \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int e \mathbf{v} (f_i - f_e) d\mathbf{v}. \quad (3.14)$$

Da questi primi esempi concludiamo che i momenti della funzione di distribuzione hanno un significato fisico ben preciso e che rappresentano grandezze suscettibili di essere confrontate con gli esperimenti. E' chiaro tuttavia che, come già sottolineato, nel processo di media si perdono informazioni, quelle relative al comportamento delle particelle nello spazio delle velocità. Questo perdita non è essenziale nei casi in cui le velocità delle particelle

individuali non si scostino dalla media in maniera significativa. Se tuttavia un gruppo di particelle avesse un comportamento peculiare rispetto alle altre, questa peculiarità verrebbe attenuata o addirittura perduta nel processo di media, col conseguente rischio di trascurare effetti fisici importanti. Un esempio di questa situazione sarà discusso quando verrà trattato il cosiddetto *smorzamento di Landau*.

I momenti della funzione di distribuzione obbediscono a loro volta ad un'equazione evolutiva, detta equazione generale dei momenti. Per ricavarla, moltiplichiamo l'equazione cinetica (3.6) per $\psi(\mathbf{v}) = v_i, v_j, \dots, v_k$ e integriamo sullo spazio delle velocità. Il primo termine, ricordando la (3.12), diviene:

$$\int \psi(\mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} (n \langle \psi \rangle),$$

poichè la ψ non dipende dal tempo.

Analogamente, poichè la ψ è anche indipendente da \mathbf{r} , il secondo termine diviene:

$$\int \psi \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} = \nabla \cdot \int \mathbf{v} \psi f d\mathbf{v} = \nabla \cdot (n \langle \mathbf{v} \psi \rangle).$$

Nel terzo termine, che contiene \mathbf{F}/m , separiamo la parte di forze indipendente dalla velocità dalla forza di Lorentz scrivendo $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Per le prime si avrà

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int \psi(\mathbf{v}) (\mathbf{F}' \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f) d\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{F}'}{m} \cdot \int \psi (\nabla_{\mathbf{v}} f) d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}'}{m} \cdot \int [\nabla_{\mathbf{v}} (\psi f) - f (\nabla_{\mathbf{v}} \psi)] d\mathbf{v} \\ &= -\frac{n}{m} \mathbf{F}' \cdot \langle \nabla_{\mathbf{v}} f \rangle. \end{aligned}$$

Il primo termine in parentesi quadra infatti si annulla se

$$\lim_{|\mathbf{v}| \rightarrow \infty} (\psi f) = 0.$$

Operando allo stesso modo con il termine $\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ e ricordando che la componente *i-esima* di $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ non contiene v_i si ottiene:

$$\frac{e}{m c} \int \psi(\mathbf{v}) (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla_{\mathbf{v}} f) d\mathbf{v} = -\frac{n e}{m c} \langle (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \psi \rangle.$$

Riunendo i precedenti risultati, si giunge a scrivere l'*equazione generale dei momenti*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n \langle \psi \rangle) + \nabla \cdot (n \langle \mathbf{v} \psi \rangle) - \frac{n}{m} \mathbf{F} \cdot \langle \nabla_{\mathbf{v}} f \rangle &= \\ &= \int \psi(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Il termine collisionale a secondo membro dipende dal modello di collisione utilizzato. Ricordando che $(\partial f/\partial t)_{coll}$ rappresenta la variazione temporale di f dovuta alle collisioni, si può ipotizzare che, analogamente a quanto visto per il termine $\partial f/\partial t$, che rappresenta la variazione temporale di f dovuta alle forze collettive, si possa scrivere:

$$\int \psi(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} (n\langle\psi\rangle) \right)_{coll}.$$

Queste considerazioni stanno alla base dei modelli fluidi che saranno trattati nel prossimo Capitolo

3.3 L'equazione di Vlasov e il teorema di Jeans

L'equazione di Vlasov (3.7) è la più semplice delle equazioni cinetiche ed è una equazione caratteristica dei plasmi. Infatti, nel caso di un gas neutro è assai raro poter trascurare le collisioni, in quanto gli effetti collettivi non sono in generale molto importanti. Una interessante eccezione verrà discussa brevemente nel seguito.

Anche la soluzione dell'equazione di Vlasov rappresenta un problema di notevole difficoltà nel caso generale. Se tuttavia i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} che compaiono nella (3.7) sono campi *esterni*, e quindi l'equazione di Vlasov è un'equazione lineare in f , la soluzione può essere trovata. Dimostreremo infatti che, se il sistema possiede una o più costanti del moto, è possibile scrivere immediatamente una forma generale della soluzione, un risultato che va sotto il nome di teorema di Jeans.

Per farlo, introduciamo il concetto di *derivata lungo una curva* e per semplicità consideriamo il caso dello spazio geometrico ordinario. Sia allora $g = g(x, y)$ l'equazione di una superficie. Il differenziale di g , cioè la variazione di g per variazioni *arbitrarie* di x e y sarà:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy.$$

Supponiamo ora che le variazioni di x e y non siano indipendenti, ma che il punto rappresentativo sul piano (x, y) sia costretto a muoversi lungo la curva di equazione $y = y(x)$, cosicchè $dy = \frac{dy}{dx} dx$. Si avrà allora:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} dx.$$

La quantità

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \quad (3.16)$$

viene detta derivata di g rispetto ad x lungo la curva $y = y(x)$.

Consideriamo ora la derivata rispetto al tempo della f , funzione di $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ lungo la traiettoria del punto rappresentativo nello spazio delle fasi, traiettoria data in forma parametrica dalle funzioni

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(c_j, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(c_j, t) \quad j = 1 \cdots 6, \quad (3.17)$$

dove le quantità c_j sono le 6 costanti di integrazione necessarie a definire completamente la traiettoria. Invertendo il sistema (3.17) potremo scrivere

$$c_j = c_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad j = 1 \cdots 6, \quad (3.18)$$

ed è chiaro che una qualunque costante del moto sarà esprimibile in termini delle c_j e quindi delle variabili primarie \mathbf{r}, \mathbf{v} per mezzo delle (3.18). Ricordando la definizione di derivata lungo una curva, potremo scrivere:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt}.$$

Siccome $dx_i/dt = v_i$ e $dv_i/dt = F_i/m$, la precedente equazione diviene:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f$$

Quindi, se f è una soluzione dell'equazione di Vlasov possiamo concludere che $\frac{df}{dt} = 0$, cioè che *la funzione di distribuzione è costante lungo una traiettoria nello spazio delle fasi*. Verifichiamo ora che la soluzione generale dell'equazione di Vlasov può essere scritta come:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathcal{F}(c_1, c_2 \cdots c_6),$$

dove \mathcal{F} è una funzione arbitraria dei suoi argomenti. Si intende che le c_j debbano poi essere espresse in termine delle variabili fisiche \mathbf{r} e \mathbf{v} tramite le (3.18) e che la funzione così ottenuta abbia le necessarie proprietà di convergenza per $\mathbf{v} \rightarrow \infty$. Avremo dunque :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{F} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{F} &= \sum_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c_j} \left[\frac{\partial c_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_j + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} c_j \right] \\ &= \sum_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c_j} \left[\frac{dc_j}{dt} \right]_{\text{traiettoria}} = 0, \end{aligned}$$

poichè per definizione le quantità c_j sono costanti lungo la traiettoria. Ne segue il

Teorema di Jeans: *qualunque funzione delle costanti del moto è una soluzione dell'equazione di Vlasov.*

Come semplice applicazione del teorema di Jeans, consideriamo il caso di una particella di massa m e carica e_0 soggetta ad un campo elettrostatico di potenziale $\Phi(\mathbf{r})$. L'energia totale della particella

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + e_0\phi(\mathbf{r})$$

è una costante del moto e quindi qualunque funzione dell'energia è una soluzione dell'equazione di Vlasov. In particolare, se per $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, dove il potenziale Φ si annulla, il sistema è all'equilibrio termodinamico con densità n_0 e temperatura T_0 , la funzione di distribuzione è asintoticamente una maxwelliana:

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp^{-\left(\frac{1}{2} m v^2 / k T_0\right)} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp^{-\left(E / k T_0\right)} .$$

In un generico punto (\mathbf{r}, \mathbf{v}) il teorema di Jeans ci permette di scrivere la soluzione come:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp^{-\left[\frac{1}{2} m v^2 + e_0 \phi(\mathbf{r})\right] / k T_0} .$$

Questa forma della funzione di distribuzione è quella che era stata implicitamente utilizzata nella discussione della lunghezza di Debye, Cap. 1.3.

L'equazione di Vlasov può essere usata in alcuni casi anche in sistemi composti da particelle neutre. Il caso più interessante per l'astrofisica è quello dei sistemi stellari. Un sistema composto da un gran numero di stelle, per esempio una galassia, può essere considerato una specie di "gas", le cui "molecole" sono rappresentate dalle stelle. Gli effetti collettivi sono qui dovuti alle interazioni gravitazionali tra le stelle e in molte circostanze le collisioni dirette tra le stelle possono essere trascurate. L'equazione che descrive la dinamica di un tal sistema è ancora la (3.4) dove \mathbf{F}/m rappresenta ora l'accelerazione di gravità dovuta all'azione collettiva di tutte le stelle del sistema.

Storicamente, la descrizione di un sistema stellare per mezzo della (3.4) ha preceduto la formulazione dell'equazione di Vlasov (1945) per i plasmi, grazie ai lavori di Jeans (1915) e Chandrasekhar (1942).

Si ha dunque una profonda analogia tra la dinamica di un sistema di punti massa e quella di un sistema di particelle cariche. La legge che esprime l'interazione gravitazionale tra due punti massa (Newton) è identica a quella che esprime l'interazione elettrostatica tra due cariche (Coulomb), la forza di Coriolis in un sistema di riferimento rotante è perfettamente analoga alla forza di Lorentz che agisce su una particella carica in presenza di un campo magnetico.

Vi sono tuttavia anche delle profonde differenze che sono principalmente legate al fatto che l'interazione gravitazionale è sempre attrattiva, mentre quella elettrostatica può essere sia attrattiva che repulsiva. Di conseguenza per i "plasmi gravitazionali" non esiste l'effetto di schermo che dà luogo al concetto di lunghezza di Debye.

4 I modelli fluidi

Nel capitolo precedente abbiamo visto che i momenti della funzione di distribuzione rappresentano quantità fisiche che, almeno in linea di principio, sono misurabili. Tuttavia, i

momenti sono definiti in termini della funzione di distribuzione e quindi la conoscenza di quest'ultima è necessaria alla loro determinazione. Ci si può chiedere a questo punto se non sia possibile trovare un sistema di equazioni differenziali in cui compaiano *soltanto* i momenti. Se ciò fosse possibile, i momenti, cioè le grandezze fisiche misurabili, sarebbero definiti come le soluzioni del suddetto sistema, senza far più riferimento alla funzione di distribuzione, dalla cui conoscenza potremmo dunque prescindere. Questo approccio è quello che porta ai modelli fluidi, che ora svilupperemo.

4.1 Il caso dei gas neutri

Per illustrare la procedura, cominceremo col considerare il caso semplice di un gas neutro, composto di particelle uguali di massa m . Si avrà dunque una sola funzione di distribuzione, che indicheremo ancora con f . E' chiaro che il punto di partenza del nostro programma dovrà essere l'equazione generale dei momenti, cioè la (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(n\langle\psi\rangle) + \nabla \cdot (n\langle\mathbf{v}\psi\rangle) - \frac{n}{m}\mathbf{F} \cdot \langle\nabla_{\mathbf{v}}\psi\rangle - \frac{ne}{mc}\langle(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\psi\rangle = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial t}(n\langle\psi\rangle)\right)_{coll}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si avrà evidentemente una equazione per ciascun momento, passando quindi da una singola equazione cinetica ad un *sistema di equazioni*. Ci si rende facilmente conto che in realtà si tratta di un sistema di *infinite* equazioni. Infatti, supponiamo che la funzione ψ che compare nella (4.1) sia un momento di ordine n , cioè il prodotto di n componenti della velocità. Il secondo termine della (4.1) contiene tuttavia la quantità $\langle\mathbf{v}\psi\rangle$, cioè momenti di ordine $n + 1$. Se ne conclude che l'equazione per il momento n - *esimo* coinvolge inevitabilmente momenti $(n + 1)$ - *esimi* e quindi la catena di equazioni dei momenti è infinita. E' chiaro che se non viene trovato un modo per troncata la catena di equazioni, il programma che ci eravamo proposti non è realizzabile. Questo è il cosiddetto *problema della chiusura* che sarà esaminato tra breve.

Cominciamo intanto a scrivere le equazioni per i vari momenti. All'**ordine zero** porremo $\psi = m$ nella (4.1), ottenendo:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = m\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{coll}, \quad (4.2)$$

dove si è fatto uso della (3.13) che definisce \mathbf{u} .

Al **primo ordine**, porremo $\psi = m v_i$ e scrivendo la (4.1) per per la componente i - *esima*

della velocità otterremo::

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(nm u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(nm \langle v_i v_k \rangle) - n F_k \langle \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \rangle &= \\ \frac{\partial}{\partial t}(nm u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(nm \langle v_i v_k \rangle) - n F_i &= \\ \frac{\partial}{\partial t}(nm u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(nm \langle v_i v_k \rangle) - n F_i &= \left(\frac{\partial(nm \langle v_i \rangle)}{\partial t} \right)_{coll}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove si è usata la convenzione di somma sugli indici ripetuti. Come previsto, nella (4.3) sono apparsi momenti del secondo ordine, $nm \langle v_i v_k \rangle$. Per apprezzare il significato fisico di questi termini, scriviamo la velocità \mathbf{v} della singola particella come

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad (4.4)$$

separando cioè il *moto medio*, \mathbf{u} dal *moto peculiare*, \mathbf{w} . Poichè $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle$, prendendo la media della (4.4) si ottiene:

$$\langle \mathbf{w} \rangle = 0. \quad (4.5)$$

\mathbf{w} è dunque una velocità a media nulla, cioè una velocità caotica, che identificheremo con la velocità della particella dovuta al moto di agitazione termica. Introducendo l'espressione (??) in $\langle v_i v_k \rangle$ e osservando che $\langle u_i \rangle = u_i$ perchè \mathbf{u} è funzione solo delle coordinate spaziali e quindi il processo di media sulle velocità rappresentato da $\langle \rangle$ lascia \mathbf{u} inalterata, si ha:

$$\langle v_i v_k \rangle = \langle (u_i + w_i)(u_k + w_k) \rangle = u_i u_k + \langle w_i w_k \rangle. \quad (4.6)$$

Potremo dunque scrivere:

$$nm \langle v_i v_k \rangle = nm u_i u_k + nm \langle w_i w_k \rangle = nm u_i u_k + \mathbf{P}_{ik},$$

dove il tensore $\mathbf{P}_{ik} = nm \langle w_i w_k \rangle$ è detto *tensore di pressione*. Poichè $nm u_k$ è la densità di impulso nella direzione k , $nm u_i u_k = u_i (nm u_k)$ rappresenta il flusso della componente k -esima dell'impulso attraverso una superficie unitaria la cui normale è diretta lungo l'asse x_i . Il primo termine della (4.6) rappresenta dunque tale flusso riferito al moto *ordinato*, mentre il secondo termine rappresenta il flusso riferito al moto *disordinato*, cioè al moto termico. I termini diagonali del tensore \mathbf{P}_{ik} , che sono uguali tra loro nel caso di un mezzo isotropo, corrispondono alla normale definizione di pressione di un fluido, mentre quelli non diagonali, evidentemente legati a *sforzi di taglio*, sono diversi da zero solo in presenza di forze viscosi. Tali forze infatti agiscono in direzione normale alla velocità del fluido.

Il tensore di pressione è evidentemente un tensore simmetrico. Può essere utile distinguere la parte diagonale da quella non diagonale scrivendo, sempre in un mezzo isotropo,

$$\mathbf{P}_{ik} = P \delta_{ik} + \Pi_{ik},$$

dove il tensore Π_{ik} è un tensore simmetrico con tutti gli elementi diagonali nulli. Tornando alla (4.3) scriveremo dunque:

$$\frac{\partial}{\partial t}(nm u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(nm u_i u_k + \mathbf{P}_{ik}) - n F_i = \left(\frac{\partial(nm \langle v_i \rangle)}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (4.7)$$

Passando all'equazione per il momento del **secondo ordine**, è sufficiente considerare $\psi = \frac{1}{2} m v_i v_i = \frac{1}{2} m v^2$ e scrivere

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle) + \nabla \cdot (n \langle \mathbf{v} \frac{1}{2} m v^2 \rangle) - n \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle) \right)_{coll}. \quad (4.8)$$

Utilizzando ancora una volta la decomposizione (4.4) potremo esprimere il termine $n \langle v_k \frac{1}{2} m v^2 \rangle$ come:

$$n \langle v_k \frac{1}{2} m v^2 \rangle = n \left(\frac{1}{2} m \langle u^2 + \langle w^2 \rangle \right) u_k + u_i P_{ik} + n \langle w_k \left(\frac{1}{2} m w^2 \right) \rangle.$$

Si ha poi:

$$n \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \sum_i P_{ii} = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} (3P),$$

cosicchè

$$n \langle v_k \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} P \right) u_k + u_i P_{ik} + n \langle w_k \left(\frac{1}{2} m w^2 \right) \rangle.$$

Se il gas obbedisce all'equazione di stato dei gas perfetti, $P = nkT$, il termine $\frac{3}{2}P$ è l'energia interna (per unità di volume) del gas, ϵ .¹ Quindi, il primo termine a secondo membro rappresenta il flusso di energia totale (energia cinetica del moto ordinato + energia interna) trasportata con la velocità ordinata, il terzo il flusso di energia interna trasportata con la velocità termica, ovvero il *flusso di calore*, e il secondo rappresenta il lavoro compiuto dalle forze di pressione. Facendo uso della precedente espressione, potremo scrivere la (4.8) nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} P \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} P \right) u_k + u_i P_{ik} + q_k \\ - n F_i u_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle) \right)_{coll}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

dove si è introdotto il vettore flusso di calore, $\mathbf{q} = n \langle \mathbf{w} \left(\frac{1}{2} m w^2 \right) \rangle$.

Prima di procedere è necessario discutere i termini collisionali presenti a secondo membro delle (4.2), (4.7) e (4.9). Una teoria rigorosa dovrebbe partire da un modello specifico di collisione, per esempio quello delle collisioni elastiche e binarie usato da Boltzmann. Utilizzando tale termine collisionale è possibile dimostrare che le leggi di conservazione del numero di particelle, dell'impulso totale e dell'energia totale in una collisione implicano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} &= 0 \\ \int m \mathbf{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} &= 0 \\ \int \frac{1}{2} m v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

¹Si è qui implicitamente supposto che il gas sia monoatomico con 3 gradi di libertà. Nel caso generale con g gradi di libertà si avrà $\epsilon = P/(\gamma - 1)$, con $\gamma = (g + 2)/g$.

L'importanza di queste relazioni, che riflettono le fondamentali leggi di conservazione, è tale che la loro validità viene considerata come una condizione necessaria perchè un termine collisionale, diverso da quello di Boltzmann, sia considerato accettabile. In altre parole le relazioni contenute nella (4.10) debbono essere verificate da *qualunque termine collisionale*.

Le(4.10) implicano che tutti i termini a secondo membro delle (4.2), (4.7) e (4.9) sono nulli.

Questo risultato può essere reso plausibile considerando ad esempio la (4.2). Il termine collisionale rappresenta, a parte il fattore m , la variazione temporale del numero di particelle dovuta alle collisioni. Ma il numero di particelle si conserva durante una collisione se, come abbiamo supposto, non consideriamo processi, quali la ionizzazione o la ricombinazione, che modificano il numero di particelle interagenti. Quindi il termine collisionale della (4.2) è nullo e potremo scrivere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.11)$$

in cui si riconosce la familiare equazione di continuità per la massa della meccanica dei fluidi.

Analogamente, i termini collisionali nelle (4.7) e (4.9) rappresentano rispettivamente le variazioni temporali dell'impulso e dell'energia dovute alle collisioni, che sono entrambe nulle per collisioni elastiche. Nella (4.7) potremo dunque annullare il secondo membro e scrivere, tenendo conto della (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) &= \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + u_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} \right) \\ &= \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Ma, ricordando la (3.16), l'espressione a secondo membro è la derivata di u_i lungo la traiettoria $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, cioè quella che in meccanica dei fluidi viene definita la *derivata lagrangiana* di u_i e che viene indicata con l'operatore

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla). \quad (4.12)$$

In definitiva si avrà:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i. \quad (4.13)$$

Nella precedente espressione si riconosce l'**equazione di moto** per un fluido. Nel caso di un fluido *perfetto*, $P_{ik} = P \delta_{ik}$ e la (4.13) diviene l'*equazione di Eulero*:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P + n \mathbf{F}, \quad (4.14)$$

mentre in presenza di viscosità ($\Pi_{ik} n_e 0$) si avrà l'*equazione di Navier-Stokes*:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i. \quad (4.15)$$

In entrambe queste equazioni si è effettuata una distinzione fra le forze dovute alla pressione e gli altri tipi di forze.

Annullando il termine collisionale, la (4.9) diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} P \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left[\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} P \right] u_k + P u_k + u_i \Pi_{ik} + q_k \right) + n F_i u_i. \quad (4.16)$$

E' questa l'*equazione dell'energia* che ci dice che la variazione nel tempo dell'energia totale contenuta in un certo volume è uguale al flusso della stessa quantità attraverso la superficie che lo delimita, più il lavoro di tutte le forze, sia di pressione che di altra natura. Si osservi che nel primo termine al secondo membro tutti gli addendi sono proporzionali a una componente della velocità, tranne q_k . Questi termini rappresentano quindi dei flussi di energia collegati a moti macroscopici di materia, in altre parole sono termini **convettivi**. Il termine che contiene \mathbf{q} invece rimane anche se $\mathbf{u} = 0$ ed è quindi un termine legato alla **conduzione** del calore.

Un'utile formulazione alternativa per l'equazione dell'energia è la seguente. Riscriviamo la (4.16) nella forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 u_k \right) \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{5}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (P u_k) \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_i \Pi_{ik} + q_k \right) + n F_i u_i. \end{aligned}$$

Sviluppando le derivate e utilizzando le equazioni di continuità (4.11) e di moto (4.13) si ottiene:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{5}{3} u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + P \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = - \Pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}.$$

Utilizzando ancora una volta la (4.11) per eliminare $\partial u_k / \partial x_k$ e ricordando la definizione di derivata lagrangiana, Eq. (4.12), si ottiene:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{dP}{dt} - \frac{5}{3} \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = - \Pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}.$$

Moltiplicando e dividendo per $\rho^{-5/3}$ il primo membro si ottiene infine

$$\frac{3}{2} \rho^{5/3} \frac{d}{dt} \left(P \rho^{-5/3} \right) = - \Pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}. \quad (4.17)$$

La (4.17) vale per un gas monoatomico. Nel caso generale, si avrà

$$\frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma \frac{d}{dt} \left(P \rho^{-\gamma} \right) = - \Pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}. \quad (4.18)$$

Si osservi che nel caso di un gas perfetto in cui, per definizione, sono nulle la viscosità e la conducibilità termica ($\Pi_{ik} = 0, q_k = 0$), la precedente equazione si riduce a

$$\frac{d}{dt} \left(P \rho^{-\gamma} \right) = 0,$$

cioè all'equazione dell'*adiabatica* di un gas perfetto.

E' facile generalizzare la (4.11) nel caso che si vogliono includere processi che implicino una variazione del numero di particelle. Il secondo membro non si annullerà e verrà sostituito dalla somma di termini positivi, che rappresentano l'aumento del numero di particelle (e quindi della densità) per unità di tempo e di termini negativi che rappresentano la sua diminuzione.

E' possibile includere nella (4.18), oltre alla viscosità e dalla conduzione di calore, anche altri processi dissipativi, come ad esempio le perdite radiative, di fondamentale importanza in astrofisica. Infatti, introducendo l'espressione dell'entropia (per unità di massa) di un gas perfetto, $s = c_V \ln(P \rho^{-\gamma})$ e utilizzando la relazione

$$c_V = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{1}{\gamma - 1},$$

dove c_V è il calore specifico a volume costante, \mathcal{R} la costante dei gas e μ il peso molecolare medio, si può riscrivere il primo membro della (4.18) nella forma $\rho T ds/dt$, in cui si riconosce l'espressione per il calore scambiato dal sistema. Questo suggerisce di scrivere la (4.18) come

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \mathcal{G} - \mathcal{P}, \quad (4.19)$$

dove \mathcal{G} e \mathcal{P} rappresentano rispettivamente i guadagni e le perdite di energia.

Abbiamo dunque formalmente ricavato le equazioni della meccanica dei fluidi, ma non abbiamo ancora portato a termine il nostro programma di ottenere delle relazioni tra i momenti che prescindano dalla necessità della conoscenza della funzione di distribuzione. Infatti, anche in assenza di forze non legate alla pressione ($\mathbf{F} = 0$), le (4.11), (4.15) e (4.18) costituiscono un sistema di 5 equazioni scalari nelle 11 incognite $P, \rho, \mathbf{u}, \mathbf{q}, \Pi_{ik}$. Quindi 6 grandezze risultano ancora definite solo in termini della funzione di distribuzione. E' chiaro che nulla si guadagna scrivendo le equazioni dei momenti di ordine superiore al secondo. Infatti, ci si convince facilmente che il numero di incognite aumenta più rapidamente di quello delle equazioni. Si deve quindi trovare uno schema che permetta di esprimere i momenti di ordine superiore in funzione di quelli di ordine inferiore e di ottenere alla fine un numero di incognite pari a quello delle equazioni.

Il caso di un gas neutro dominato dalle collisioni è quello più semplice. In questo caso infatti, il sistema evolve verso uno stato di equilibrio termodinamico, in cui la funzione di distribuzione è una maxwelliana:

$$\begin{aligned} f_0 &= n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\frac{1}{2}m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{kT} \right] \\ &= n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\frac{1}{2}mw^2}{kT} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Possiamo distinguere i casi in cui le quantità macroscopiche n, T e \mathbf{u} sono delle costanti o dipendono dallo spazio e dal tempo. Nel primo caso ci troviamo in uno stato di equilibrio

termodinamico, nel secondo di equilibrio termodinamico *locale*, intendendo con questo che le funzioni $n(\mathbf{r}, t)$, $T(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ variano poco su distanze dell'ordine del cammino libero medio. In entrambi i casi è facile verificare che $\Pi_{ik} = 0$ e che $q_k = 0$. Infatti, la definizione dei momenti coinvolge solo integrazioni nello spazio delle velocità ed il fatto che T, n e \mathbf{u} dipendano dalle coordinate spaziali e temporali non influisce sul risultato. Quindi $P_{ik} = P \delta_{ik}$ e le equazioni (4.11), (4.15) e (4.18) sono sufficienti a determinare le 5 incognite P, ρ, \mathbf{u} .

Nel caso di un gas in condizioni di non-equilibrio, si può ricorrere ad una teoria perturbativa, supponendo cioè che $f = f_0 + f_1$ con $|f_1| \ll |f_0|$. Linearizzando il sistema di equazioni fluide è possibile ricavare delle espressioni per i termini non diagonali del tensore di pressione e per il flusso di calore. Una discussione di questo metodo, detto di *Chapman-Enskog*, esula tuttavia dagli scopi di questo testo.

4.2 Il caso dei plasmi: il modello a due fluidi

Per applicare la stessa procedura al caso di un gas ionizzato, è necessario tener conto di alcune difficoltà aggiuntive. Per prima cosa, si avranno più funzioni di distribuzione. Limitandoci per semplicità al caso di un plasma di idrogeno completamente ionizzato, costituito da protoni ed elettroni, si avranno due equazioni cinetiche, una per ciascuna specie: le indicheremo con f_p e f_e . Se le sole forze in gioco sono quelle elettromagnetiche, le equazioni cinetiche per ciascuna specie saranno date dalla (3.6):

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll}, \quad s = e, p. \quad (4.21)$$

Procedendo come nel caso di un gas neutro, otterremo l'equazione equivalente alla (4.2):

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}^{(s)}) = m \left(\frac{\partial n_s}{\partial t} \right)_{coll}, \quad (4.22)$$

dove, evidentemente,

$$n_s = \int f_s d\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}^{(s)} = \frac{1}{n_s} \int \mathbf{v} f_s d\mathbf{v}.$$

L'equazione di moto analoga alla (4.3) diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_s m_s u_i^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (n_s m_s \langle v_i v_k \rangle_s) - e_s n_s E_i - \frac{e_s n_s}{c} (\mathbf{u}^{(s)} \times \mathbf{B})_i = R_i^{(s)},$$

dove la notazione $\langle \rangle_s$ indica che la media va fatta rispetto alla funzione di distribuzione f_s e si è introdotta la forma abbreviata $R_i^{(s)}$ per il termine collisionale,

$$\mathbf{R}^{(s)} = \int m_s \mathbf{v} \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v}.$$

Definendo ora un tensore di pressione per ciascuna specie:

$$\mathbf{P}_{ik}^{(s)} = n_s m_s \langle w_i w_k \rangle = P^{(s)} \delta_{ik} + \Pi_{ik}^{(s)},$$

si giunge alle equazioni di moto per gli elettroni e i protoni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_s m_s u_i^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (n_s m_s u_i^{(s)} u_k^{(s)} + \mathbf{P}_{ik}^{(s)}) - \\ - e_s n_s E_i - \frac{e_s n_s}{c} (\mathbf{u}^{(s)} \times \mathbf{B})_i = R_i^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Infine, si otterranno in maniera analoga le due equazioni per l'energia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_s n_s (u^{(s)})^2 + \frac{3}{2} P^{(s)} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left[\frac{1}{2} m_s n_s (u^{(s)})^2 + \frac{5}{2} P^{(s)} \right] u_k + u_i^{(s)} \Pi_{ik}^{(s)} + q_k^{(s)} \right) - \\ - e_s n_s E_i u_i^{(s)} = Q^{(s)}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

con

$$Q^{(s)} = \int \frac{1}{2} m_s v^2 \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v}.$$

Esaminiamo ora i termini collisionali che appaiono a secondo membro delle precedenti equazioni. Rispetto al caso del gas neutro, in cui tutte le particelle avevano ugual massa, siamo ora in presenza anche di collisioni tra particelle di massa diversa. Per ogni specie il termine collisionale sarà la somma dei contributi dovuti agli urti tra particelle uguali e di quelli dovuti agli urti tra particelle differenti. Per trattare questi casi e semplificare la notazione poniamo

$$C(s, s') = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll} \quad (s, s' = e, p).$$

Utilizzando tale notazione, la legge di conservazione del numero di particelle si scrive

$$\int C(s, s') d\mathbf{v} = 0, \quad (4.25)$$

ed è valida sia per $s = s'$ che per $sn_e s'$. La conservazione globale dell'impulso e dell'energia danno:

$$\begin{aligned} \int m_s \mathbf{v} C(s, s) d\mathbf{v} = 0 \\ \int \frac{1}{2} m_s v^2 C(s, s) d\mathbf{v} = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

per collisioni tra particelle della stessa specie, mentre per quelle tra specie diverse, $sn_e s'$, si avrà

$$\begin{aligned} \int m_s \mathbf{v} C(s, s') d\mathbf{v} + \int m'_s \mathbf{v} C(s', s) d\mathbf{v} = 0 \\ \int \frac{1}{2} m_s v^2 C(s, s') d\mathbf{v} + \int \frac{1}{2} m'_s v^2 C(s', s) d\mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Il termine collisionale della (4.22) è quindi sempre nullo mentre in quelli delle (4.2) e (4.24) compariranno solo le collisioni tra particelle differenti,

$$\left(\frac{\partial n_s}{\partial t}\right)_{coll} = 0,$$

$$\mathbf{R}^{(s)} = \int m_s \mathbf{v} C(s, s') d\mathbf{v} = s' n_e s,$$

$$Q^{(s)} = \int \frac{1}{2} m_s v^2 C(s, s') d\mathbf{v} = s' n_e s.$$

Poichè in ogni collisione l'impulso e l'energia persi da una specie sono guadagnati dall'altra, si avrà

$$\mathbf{R}^{(e)} = -\mathbf{R}^{(p)} \quad e \quad Q^{(e)} = -Q^{(p)}. \quad (4.28)$$

Il sistema delle equazioni (4.22) (con il termine collisionale uguagliato a zero), (4.2) e (4.24) costituisce il cosiddetto *modello a due fluidi*. Si osservi che in generale le temperature ed i flussi di calore dei due fluidi saranno differenti:

$$T^{(s)} = \frac{P^{(s)}}{k n} \quad ; \quad q_i^{(s)} = \left\langle \frac{1}{2} m_s w_i \sum_k w_k w_k \right\rangle_s.$$

Il problema della chiusura del sistema di equazioni a due fluidi è analogo a quello dei gas neutri. Anche qui la chiusura può essere ottenuta supponendo che ciascuno dei due fluidi sia in condizioni di equilibrio termodinamico locale *alla sua temperatura*, ciò che consente di trascurare i termini viscosi e di conduzione del calore. Rimangono ancora gli accoppiamenti tra le due specie attraverso i termini che rappresentano lo scambio di impulso ed energia tra le due specie e questi termini debbono essere espressi tramite le variabili macroscopiche se si vuole completare la chiusura del sistema. Il modello a due fluidi è una descrizione appropriata quando le due specie non hanno ancora raggiunto l'equilibrio termico tra loro. Come osservato nell'Introduzione, una situazione del genere può presentarsi in un plasma rarefatto. a causa della relativa inefficienza delle collisioni tra specie diverse, $\tau_{ep} \gg \tau_{pp} \gg \tau_{ee}$. Un esempio tipico di sistema a due fluidi è dato dal vento solare, in cui la temperatura degli elettroni all'orbita della Terra è maggiore di quella dei protoni.

4.3 Il modello a un fluido

Anche nei casi in cui è possibile realizzare la chiusura del sistema di equazioni, il modello a due fluidi è ancora piuttosto complesso. Appare quindi chiaro l'interesse a ricercare una descrizione più semplice nei casi in cui le temperature dei due fluidi non sono sostanzialmente diverse. Questa ulteriore semplificazione viene ottenuta introducendo un fluido *fittizio* che in qualche modo rappresenta l'insieme del plasma. In questo modello ci aspettiamo che le

risultanti equazioni siano analoghe a quelle per un gas neutro, con dei termini aggiuntivi che tengano conto degli effetti elettromagnetici.

La densità numerica *totale* del plasma, $n(\mathbf{r}, t)$, cioè il numero di particelle per unità di volume, senza tener conto del fatto che abbiano l'uno o l'altro segno della carica, sarà data da:

$$n = n_e + n_p.$$

Analogamente, potremo definire le seguenti quantità per il modello a un fluido:

$$\text{densità di massa} \quad \rho(\mathbf{r}, t) = n_p m_p + n_e m_e \quad (4.29a)$$

$$\text{densità di carica} \quad q(\mathbf{r}, t) = e(n_p - n_e) \quad (4.29b)$$

$$\text{densità di corrente} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = e(n_p \mathbf{u}^{(p)} - n_e \mathbf{u}^{(e)}) \quad (4.29c)$$

Un'equazione per ρ può essere ottenuta semplicemente moltiplicando le equazioni di continuità, (4.22), delle due specie per le rispettive masse e sommandole, ottenendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (m_e n_e \mathbf{u}^{(e)} + m_p n_p \mathbf{u}^{(p)}),$$

che può essere scritta nella forma abituale dell'equazione di continuità introducendo il vettore

$$\mathbf{U} = \frac{m_e n_e \mathbf{u}^{(e)} + m_p n_p \mathbf{u}^{(p)}}{m_e n_e + m_p n_p} = \frac{m_e n_e \mathbf{u}^{(e)} + m_p n_p \mathbf{u}^{(p)}}{\rho}. \quad (4.30)$$

Tenendo conto che $n_e \simeq n_p$ (quasi-neutralità di carica!) si vede che \mathbf{U} , detta *velocità fluida*, rappresenta una specie di velocità locale del centro di massa. Con questa definizione otterremo dunque

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0. \quad (4.31)$$

Moltiplicando le equazioni (4.22) delle due specie per la corrispondente carica, sommandole e utilizzando le definizioni (4.29) si ottiene l'equazione di conservazione della carica:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.32)$$

L'introduzione della velocità \mathbf{U} suggerisce di scrivere anche l'equazione di moto in termini di tale velocità sommando le due equazioni di moto (4.2). Qui però sorge una difficoltà legata al fatto che i tensori di pressione $\mathbf{P}_{ik}^{(s)}$ sono definiti in termini delle velocità $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}^{(s)}$, mentre in analogia al caso del gas neutro a cui vogliamo fare riferimento, sarebbe preferibile definire $\mathbf{w}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$. Inoltre, dovendo sommare le pressioni, è più logico che le velocità peculiari delle due specie siano riferite alla stessa velocità fluida, \mathbf{U} , e non a due velocità differenti, $\mathbf{u}^{(e)}$ e $\mathbf{u}^{(p)}$. La nuova definizione delle velocità peculiari implica però

$$\langle \mathbf{w}' \rangle = \mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{U} \neq 0.$$

Questo modifica il termine $m_s n_s \langle v_i v_k \rangle$ nel modo seguente:

$$m_s n_s \langle v_i v_k \rangle = m_s n_s \langle (w'_i + U_i)(w'_k + U_k) \rangle = P_{ik}^{(s)} + m_s n_s (u_i^{(s)} U_k + u_k^{(s)} U_i - U_i U_k),$$

dove si intende che P_{ik} è ora definito in termini delle \mathbf{w}' . Di conseguenza, nelle (4.2) compaiono dei termini aggiuntivi che le trasformano in:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_s m_s u_i^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[n_s m_s (u_i^{(s)} U_k + u_k^{(s)} U_i - U_i U_k) + P_{ik}^{(s)} \right] - \\ - e_s n_s E_i - \frac{e_s n_s}{c} (\mathbf{u}^{(s)} \times \mathbf{B})_i = R_i^{(s)}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

dove si è supposto che le sole forze agenti sul sistema siano quelle elettromagnetiche.

Definiamo un tensore di pressione totale come

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(e)} + \mathbf{P}^{(p)},$$

sommiamo le due equazioni (4.33) corrispondenti alle due specie e , tenendo conto delle (4.28), (4.29b), (4.29c) e (4.30), otteniamo:

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + q E_i + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i, \quad (4.34)$$

o, in notazione vettoriale,

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + q\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (4.35)$$

E' anche conveniente introdurre il concetto di temperatura cinetica generalizzando la definizione valida per un gas neutro:

$$\frac{3}{2} n k T = \sum_s \int \frac{1}{2} m_s w'^2 f_s d\mathbf{v} = \sum_s \frac{1}{2} P_{ii}^{(s)} = \frac{3}{2} P^{(s)},$$

da cui

$$T = \frac{P_{ii}^{(s)}}{3nk}. \quad (4.36)$$

Un'analogia operazione può essere fatta con le due equazioni dell'energia (4.24) ridefinendo anche i vettori flusso di calore, $\mathbf{q}^{(s)}$, in termini delle velocità peculiari \mathbf{w}' . Il termine $\frac{1}{2} m_s n_s \langle v_i v^2 \rangle$ sarà:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_s n_s \langle v_i v^2 \rangle = \frac{3}{2} P^{(s)} U_i + P_{ik}^{(s)} U_k + \\ + \frac{1}{2} m_s n_s \left(u_i^{(s)} U_k U_k + 2 u_k^{(s)} U_k U_i + u_i^{(s)} U^2 - 2 U_i U^2 \right) + q_i^{(s)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Con queste nuove posizioni le (4.24) divengono

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} m_s n_s (2 u_k^{(s)} U_k - U^2) + \frac{3}{2} P^{(s)} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{3}{2} P^{(s)} U_i + \mathbf{P}_{ik}^{(s)} U_k + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} m_s n_s \left(u_i^{(s)} U_k U_k + 2 u_k^{(s)} U_k U_i + u_i^{(s)} U^2 - 2 U_i U^2 \right) + q_i^{(s)} \right] - e_s n_s E_k u_k^{(s)} = Q^{(s)}. \quad (4.38)$$

Introducendo il flusso di calore totale, $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(e)} + \mathbf{q}^{(p)}$, e sommando le due equazioni (4.38) si ottiene l'equazione dell'energia per il modello a un fluido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 + \frac{3}{2} P \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[U_i \left(\frac{1}{2} \rho U^2 + \frac{5}{2} P \right) + \Pi_{ik} U_k + q_i \right] - J_k E_k = 0. \quad (4.39)$$

Il termine $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ nella precedente equazione rappresenta evidentemente il contributo dovuto all'effetto Joule.

Possiamo applicare alla (4.39) la stessa procedura che ci ha permesso di passare dalla (4.16) alla (4.18). Tenendo conto della (4.34) si verifica facilmente che l'equazione per l'energia può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma \frac{d}{dt} \left(P \rho^{-\gamma} \right) = \\ = -\Pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \left(q U_k - J_k \right) \left(E_k + \frac{1}{c} (\mathbf{U} \times \mathbf{B})_k \right). \quad (4.40)$$

Il sistema di equazioni costituito dalle (4.31), (4.32), (4.34) e (4.39) [o (4.40)], accoppiate alle equazioni di Maxwell per $\nabla \times \mathbf{E}$ e $\nabla \times \mathbf{B}$, è il sistema di base del modello a un fluido. Si tratta di 12 equazioni scalari nelle 21 incognite $\rho, P, \mathbf{U}, q, \mathbf{J}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \Pi_{ik}, \mathbf{q}$. Anche tenendo conto del fatto che l'espressione delle ultime 6 incognite in termini delle altre costituisce, come già sappiamo, il problema della chiusura, mancano ancora tre equazioni scalari (o una vettoriale) per pareggiare il numero delle incognite.

Prima di derivare le equazioni mancanti, discutiamo brevemente i possibili schemi di chiusura. Vi sono in generale due situazioni in cui è possibile chiudere il sistema a livello di momenti di ordine non superiore al secondo. La più radicale consiste nel supporre che tutte le componenti del tensore di pressione \mathbf{P}_{ik} e quelle del vettore flusso di calore \mathbf{q} siano nulle. Questa approssimazione viene chiamata modello di *plasma freddo* e si tratta evidentemente di una situazione altamente idealizzata in cui tutti gli effetti termici sono trascurati. In un plasma freddo l'equazione dell'energia (4.40) è identicamente soddisfatta e ci troviamo quindi in presenza di un sistema di 11 equazioni in 14 incognite.

L'altra situazione in cui è agevole chiudere il sistema è quella di un *plasma collisionale*, cioè un plasma in condizioni di equilibrio termodinamico locale, la cui funzione di distribuzione è quindi una maxwelliana. Si possono qui ripetere le considerazioni fatte a proposito del caso di un gas neutro e concludere che è possibile porre, in prima approssimazione,

$$\Pi = 0 \quad ; \quad \mathbf{q} = 0 \quad ; \quad P \neq 0.$$

La (4.40) non è più identicamente soddisfatta e va quindi mantenuta, con un totale di 12 equazioni di 15 incognite.

Per ricavare l'equazione vettoriale mancante, osserviamo che, combinando per somma le due equazioni vettoriali di moto per le singole specie, abbiamo ottenuto l'equazione di moto del modello ad un fluido. E' chiaro che una seconda equazione indipendente può essere ottenuta combinandole per differenza. Per raggiungere questo risultato, moltiplichiamo ciascuna delle equazioni per e_s/m_s e sommiamole, ciò che di fatto equivale a sottrarle a causa dell'opposto segno delle cariche. Osserviamo però che così facendo i termini collisionali $\mathbf{R}^{(s)}$ non si elidono e che quindi bisognerà esprimerli in termini delle variabili fondamentali del modello fluido. Eseguendo le operazioni indicate avremo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(en_p u_i^{(p)} - en_e u_i^{(e)} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[en_p \left(u_i^{(p)} U_k + u_k^{(p)} U_i \right) - en_e \left(u_i^{(e)} U_k + u_k^{(e)} U_i \right) + e \left(\frac{\mathbf{P}_{ik}^{(p)}}{m_p} - \frac{\mathbf{P}_{ik}^{(e)}}{m_e} \right) \right] \\ & - e^2 \left(\frac{n_p}{m_p} + \frac{n_e}{m_e} \right) E_i - \frac{e^2}{c} \left(\frac{n_p}{m_p} (\mathbf{u}^{(p)} \times \mathbf{B})_i + \frac{n_e}{m_e} (\mathbf{u}^{(e)} \times \mathbf{B})_i \right) \\ & = e \left(\frac{R_i^{(p)}}{m_p} - \frac{R_i^{(e)}}{m_e} \right) = e R_i^{(p)} \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \right), \end{aligned}$$

dove è stata usata la (4.28). Come sempre in questo testo, $e_p = e$, $e_e = -e$.

Utilizzando la definizione (4.29b) e tenendo conto che $m_e \ll m_p$ e $n_e \simeq n_p$, la precedente espressione diviene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial J_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(J_i U_k + J_k U_i \right) - \frac{e}{m_e} \frac{\partial \mathbf{P}_{ik}^{(e)}}{\partial x_k} - \\ & - \frac{e^2 n_e}{m_e} E_i - \frac{e^2 n_e}{m_e m_p c} \left[\left(m_e \mathbf{u}^{(p)} + m_p \mathbf{u}^{(e)} \right) \times \mathbf{B} \right]_i = \frac{e R_i^{(p)}}{m_e} \quad (4.41) \end{aligned}$$

Il fattore $(m_e \mathbf{u}^{(p)} + m_p \mathbf{u}^{(e)})$ che compare nel termine che contiene il campo magnetico \mathbf{B} può essere riscritto tenendo conto delle definizioni (4.29b) e (4.30) nel modo seguente:

$$(m_e \mathbf{u}^{(p)} + m_p \mathbf{u}^{(e)}) = (m_e + m_p) \mathbf{U} + (m_e - m_p) \frac{\mathbf{J}}{en_e} \simeq m_p \left(\mathbf{U} - \frac{\mathbf{J}}{en_e} \right).$$

Rimane ancora da definire la relazione tra il termine collisionale, $\mathbf{R}^{(s)}$ e le grandezze fluide. Una ragionevole ipotesi è quella di esprimere $\mathbf{R}^{(s)}$ in termini della *differenza di velocità* delle due specie:

$$\mathbf{R}^{(s)} = -n_s m_s \nu_{s,s'} \left(\mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{u}^{(s')} \right),$$

dove si è introdotto il parametro $\nu_{s,s'}$ che rappresenta una frequenza media di collisione per le particelle della specie s con quelle della specie s' . In questa rappresentazione si considera che la forza che si esercita tra le due specie a causa delle collisioni sia essenzialmente di tipo

viscoso e quindi che si annulli quando le velocità medie delle due specie coincidono. Poichè $n_e \simeq n_p$, la (4.28) implica che

$$m_e \nu_{e,p} = m_p \nu_{p,e}.$$

Inserendo le varie espressioni nella (4.41) e moltiplicandola per $(m_e/n_e e^2)$ si ottiene infine:

$$E_i + \frac{1}{c}(\mathbf{U} \times \mathbf{B})_i - \frac{J_i}{\sigma} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \left[\frac{\partial J_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (J_i U_k + J_k U_i) \right] + \frac{1}{en_e c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i - \frac{1}{en_e} \frac{\partial P_{ik}^{(e)}}{\partial x_k}, \quad (4.42)$$

dove si è introdotta la quantità

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{ep}}$$

che rappresenta la conducibilità elettrica del plasma (Vedi Introduzione, Eq. (1.1)).

L'equazione (4.42) viene dalla *equazione di Ohm generalizzata*. Infatti, nei casi in cui tutti i termini a secondo membro siano trascurabili, essa assume la forma classica dell'equazione di Ohm per un mezzo conduttore in movimento. L'aggiunta della (4.42) alle (4.31), (4.32), (4.34) e (4.39) [o (4.40)] e alle equazioni di Maxwell per $\nabla \times \mathbf{E}$ e $\nabla \times \mathbf{B}$, permette di ottenere un ugual numero di equazioni e di incognite, sia nel caso di un plasma freddo che in quello di un plasma collisionale, completando così lo schema del modello ad un fluido.

5 La magnetoidrodinamica

Il modello ad un fluido ricavato nel capitolo precedente, pur rappresentando una notevole semplificazione rispetto agli altri schemi, è spesso ancora troppo complesso dal punto di vista matematico per trattare agevolmente i vari problemi che si presentano in fisica del plasma. Un sistema di equazioni quale quello del modello fluido ammette in generale molte soluzioni e fra queste anche quelle che si riferiscono a situazioni fisiche che per qualche motivo non sono considerate interessanti. Per delimitare il contesto delle soluzioni è opportuno definire il concetto di *regime*. Con questo si intende che si vogliono considerare solo quelle soluzioni nelle quali le grandezze caratteristiche non coprono tutti i valori possibili, ma solo quelli contenuti nell'intervallo che viene considerato di interesse. Una volta definito il regime in cui muoversi, è possibile determinare se vi sono e quali sono le modifiche che esso introduce nel nostro sistema di equazioni.

5.1 Le equazioni MHD

Per essere concreti, supponiamo di definire delle scale caratteristiche di lunghezza e di tempo per i campi elettromagnetici. Sia dunque ℓ la scala spaziale su cui si ha una variazione

sensibile dei campi e τ la corrispondente scala temporale. Sia inoltre \mathcal{U} un valore tipico della velocità fluida. Il regime **magnetoidrodinamico** o **MHD** è definito dalle relazioni:

$$\mathcal{U} \simeq \frac{\ell}{\tau} \quad \text{e} \quad \mathcal{U} \ll c. \quad (5.1)$$

La prima di queste relazioni esprime il concetto che la "velocità tipica" dei fenomeni *elettromagnetici*, che identifichiamo con ℓ/τ , sia dello stesso ordine della velocità tipica dei fenomeni *idrodinamici*, definita da \mathcal{U} . In questa situazione, le due classi di fenomeni "vanno alla stessa velocità", ciò che rende massima l'interazione tra di essi. Questo regime è quindi intermedio tra quello dominato dagli aspetti elettromagnetici, in cui gli aspetti idrodinamici appaiono come delle perturbazioni, e quello simmetrico, dominato dagli aspetti idrodinamici, a cui le interazioni elettromagnetiche apportano soltanto delle correzioni. La seconda relazioni ci dice semplicemente che ci limitiamo a situazioni non relativistiche.

Per vedere le modifiche che l'introduzione di questo regime induce nelle equazioni del modello ad un fluido, procediamo ad un'analisi dimensionale, indicando con $\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{Q}, \mathcal{J}$ i valori caratteristici rispettivamente del campo elettrico, del campo magnetico, della densità di carica e della densità di corrente. Cominciamo con:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

che scriveremo come

$$\frac{\mathcal{E}}{\ell} \simeq \frac{1}{c} \frac{\mathcal{B}}{\tau}$$

Questo implica che

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \simeq \frac{1}{c} \frac{\ell}{\tau} \simeq \frac{\mathcal{U}}{c} \ll 1. \quad (5.2)$$

Procedendo analogamente con l'equazione per $\nabla \times \mathbf{B}$:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{B}}{\ell} \simeq \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} + \frac{\mathcal{E}}{\tau}.$$

Dividendo entrambi i membri per \mathcal{B}/ℓ otteniamo:

$$1 \simeq \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} \frac{\ell}{\mathcal{B}} + \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \frac{\ell}{\tau} \simeq \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} \frac{\ell}{\mathcal{B}} + \left(\frac{\mathcal{U}}{c}\right)^2.$$

L'ultimo termine è dunque trascurabile rispetto all'unità e l'equazione per $\nabla \times \mathbf{B}$ si riduce a :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (5.3)$$

Nel regime MHD è quindi possibile trascurare la corrente di spostamento, e questo ci fa capire che si tratta di un regime di *basse frequenze*. La corrente di spostamento, infatti, diventa importante solo quando le variazioni temporali di \mathbf{E} sono rapide, cioè in regime di *alte frequenze*. L'eliminazione della corrente di spostamento implica, come è facile verificare, che l'equazione di continuità per la carica non è più soddisfatta. Se tuttavia analizziamo dimensionalmente quest'ultima

$$\frac{\mathcal{Q}}{\tau} + \frac{\mathcal{J}}{\ell} = 0,$$

e sostituiamo \mathcal{J} con il valore dato da una stima dimensionale della (5.3) e \mathcal{Q} con il risultato dell'analisi dimensionale dell'equazione per $\nabla \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \mathcal{E}/\ell \simeq 4\pi\mathcal{Q}$, otteniamo

$$\frac{\mathcal{E}}{4\pi\ell} \frac{1}{\tau} + \frac{c\mathcal{B}}{4\pi\ell} \frac{1}{\ell} = 0.$$

Quindi il rapporto del primo termine al secondo vale:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \frac{\ell}{\tau} \simeq \left(\frac{\mathcal{U}}{c}\right)^2 \ll 1.$$

Nel regime MHD dunque il termine con la derivata temporale della densità di carica può essere trascurato e l'equazione di conservazione della carica si scrive semplicemente $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, perfettamente compatibile con la (5.3).

Passiamo ora a considerare l'equazione di moto (4.35) e applichiamo ad essa la consueta analisi dimensionale ottenendo:

$$\rho \frac{\mathcal{U}}{\tau} \simeq -\frac{P}{\ell} + \mathcal{Q}\mathcal{E} + \frac{1}{c}\mathcal{J}\mathcal{B}.$$

Il rapporto tra i due ultimi termini, utilizzando le stime precedentemente trovate, vale

$$\frac{\mathcal{Q}\mathcal{E}}{\mathcal{J}\mathcal{B}/c} \simeq \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}\right)^2 \simeq \left(\frac{\mathcal{U}}{c}\right)^2 \ll 1.$$

L'equazione di moto in regime MHD si può dunque scrivere:

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (5.4)$$

Per stimare l'importanza relativa dei termini che compaiono nell'equazione di Ohm (4.42) immaginiamo di farne un'analisi dimensionale e di dividere tutti i termini per il valore rappresentativo del campo elettrico E . Osserviamo per prima cosa che i due termini in parentesi quadra hanno lo stesso ordine di grandezza. Prendendo i termini nell'ordine in cui compaiono nella (4.42) e confrontandoli, avremo:

$$1 : 1 : \left(\omega/\omega_{pe}\right) \left(\nu_{ei}/\omega_{pe}\right) \left(c/\mathcal{U}\right)^2 : \left(\omega/\omega_{pe}\right) \left(\omega_{ce}/\omega_{pe}\right) \left(c/\mathcal{U}\right)^2 : \\ \left(\omega/\omega_{pe}\right)^2 \left(c/\mathcal{U}\right)^2 : \left(\omega/\omega_{cp}\right)^2 \left(c_s/\mathcal{U}\right)^2,$$

dove

$$\omega \simeq \tau^{-1} \quad , \quad c_s \simeq \left(P/\rho\right)^{\frac{1}{2}}$$

e ω_{pe} è la frequenza di plasma degli elettroni, ω_{ce} e ω_{cp} sono rispettivamente le frequenze di ciclotrone degli elettroni e dei protoni e ν_{ep} è la frequenza di collisione tra elettroni e protoni. Vediamo dunque che per poter trascurare i termini in parentesi quadra è necessario che

$$\left(\omega/\omega_{pe}\right) \ll \mathcal{U}/c, \quad (5.5)$$

per trascurare il termine proporzionale a $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, legato al cosiddetto *effetto Hall*, bisogna che

$$\left(\omega\omega_{ce}/\omega_{pe}^2\right) \ll (\mathcal{U}/c)^2, \quad (5.6)$$

e che infine il termine che contiene la pressione elettronica può essere eliminato quando

$$\left(\omega/\omega_{cp}\right) \ll (\mathcal{U}/c)^2. \quad (5.7)$$

Quando tutte queste condizioni sono soddisfatte e, come si vede, ciò è particolarmente facile nel regime di *basse frequenze* proprie del regime MHD, l'equazione di Ohm (4.42) si riduce alla semplice forma

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{U} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}, \quad (5.8)$$

detta equazione di Ohm per un *plasma resistivo*. Se inoltre vale la condizione

$$\left(\omega\nu_{ep}/\omega_{pe}^2\right) \ll (\mathcal{U}/c)^2, \quad (5.9)$$

che corrisponde ad avere una conducibilità elettrica molto alta, anche il termine a secondo membro della (5.8) può essere trascurato e tale equazione prende la forma che caratterizza un *plasma ideale*:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0. \quad (5.10)$$

Infine, l'equazione per l'energia (4.40), tenendo conto che il termine \mathcal{QE} è dell'ordine $(\mathcal{U}/c)^2$ rispetto a \mathcal{J} , può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{\gamma-1} \rho^\gamma \frac{d}{dt} (P \rho^{-\gamma}) = \frac{J^2}{\sigma}. \quad (5.11)$$

Le equazioni fondamentali del modello ad un fluido in regime MHD sono dunque le (4.31), (5.4), (5.11) e la (5.3) a cui vanno aggiunte le uniche equazioni che ancora contengono il campo elettrico e cioè

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{U} \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\sigma}. \end{aligned}$$

Questo suggerisce di applicare l'operatore $\nabla \times$ all'equazione di Ohm e di eliminare il campo elettrico utilizzando l'equazione per il $\nabla \times \mathbf{E}$. Così facendo si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) \\ &= \nabla \times \left(\frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right). \end{aligned}$$

Introducendo la *diffusività magnetica* (spesso chiamata anche *resistività*):

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad (5.12)$$

sviluppando il secondo membro e ricordando che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla \eta \times (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (5.13)$$

Questa equazione viene detta *equazione dell'induzione magnetica* o anche *equazione di Faraday* e consente di ridurre ulteriormente il numero delle equazioni del modello MHD.

Riassumendo, le *equazioni MHD resistive*, sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (5.14a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (5.14b)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma \frac{d}{dt} (P \rho^{-\gamma}) = \frac{4\pi}{c^2} \eta J^2 \quad (5.14c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla \eta \times (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (5.14d)$$

Nell'equazione di moto abbiamo espresso la densità di corrente in termini di \mathbf{B} utilizzando la (5.3).

Quando la conducibilità elettrica è costante, si annulla l'ultimo termine delle (5.13) e (5.14d). Le equazioni per un plasma ideale si ottengono semplicemente facendo tendere σ all'infinito, cioè ponendo $\eta = 0$.

Il sistema (5.14) è un sistema chiuso che determina le 8 incognite *primarie* $\rho, P, \mathbf{U}, \mathbf{B}$. Le altre grandezze vengono ricavate a partire da queste. La densità di corrente è ovviamente determinata da

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}),$$

il campo elettrico dalla legge di Ohm.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{U} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma},$$

e la densità di carica da

$$q = \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{E}).$$

La conducibilità σ si suppone nota sia nel caso in cui si possa considerarla costante, sia quando dipenda dalle grandezza termodinamiche.

Paragonando le equazioni MHD con quelle per un gas neutro ci rendiamo conto che esse rappresentano il minimo numero possibile per descrivere un plasma come un mezzo

continuo conduttore. Infatti, nonostante che per tener conto degli effetti elettromagnetici abbiamo dovuto introdurre 3 quantità vettoriali (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{J} e una quantità scalare (q), abbiamo aumentato solo di tre il numero delle equazioni primarie, grazie alla scelta di un regime opportuno.

5.2 La pressione magnetica

Le equazioni MHD permettono di investigare alcuni aspetti delle interazioni tra un plasma ed il campo magnetico che non sono evidenti *a priori*.

Cominciamo col considerare l'equazione di moto (5.14b) e riscriviamo l'ultimo termine utilizzando l'identità vettoriale:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}). \quad (5.15)$$

Ponendo $\mathbf{F} = \mathbf{G} = \mathbf{B}$ si ottiene

$$\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{8\pi}\nabla(B^2),$$

e la (5.14b) può essere posta nella forma

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla(P + \frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \quad (5.16)$$

Scrivendo la precedente equazione per componenti abbiamo:

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(P + \frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi}B_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(P + \frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_i B_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathsf{T}_{ik},$$

dove si è utilizzato il fatto che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e si è introdotto il tensore

$$\mathsf{T}_{ik} = -(P + \frac{B^2}{8\pi})\delta_{ik} + \frac{1}{4\pi}B_i B_k.$$

In un sistema di riferimento in cui l'asse z ($i = 3$) è allineato con il campo magnetico, ciò che può essere sempre fatto **localmente** per mezzo di una rotazione di assi, il tensore T_{ik} assume la forma:

$$\begin{pmatrix} P + \frac{B^2}{8\pi} & 0 & 0 \\ 0 & P + \frac{B^2}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0 & P - \frac{B^2}{8\pi} \end{pmatrix}.$$

Vediamo dunque che la presenza di un campo magnetico comporta l'esistenza di una pressione isotropa aggiuntiva, $B^2/8\pi$, e di una *pressione negativa anisotropa*, cioè una *tensione*, lungo il campo pari a $-B^2/4\pi$.

Per renderci meglio conto del significato del termine di tensione, esaminiamo il caso di un campo magnetico dato da $\mathbf{B} = [0, B_y(x), B_z(x)]$. Le linee di forza di un tale campo sono delle rette. Infatti, se $B_y = 0$, le linee di forza sono rette parallele all'asse z , se $B_y \neq 0$ le linee di forza sono ancora delle rette in ciascun piano $x = \text{costante}$, ma la loro inclinazione cambia al cambiare di x . Per questo campo il termine di tensione è nullo e ne concludiamo che la tensione si esercita quando le linee di forza del campo sono curve. In un certo senso dunque, le linee di forza di \mathbf{B} si comportano come fossero fatte di materiale elastico: una qualunque deformazione provoca una tensione lungo l'elastico che tende a tornare ad una configurazione rettilinea.

Per quel che riguarda il termine di pressione, alla pressione del gas si aggiunge un contributo di pressione magnetica. L'importanza relativa dei due termini è misurata dal parametro *beta*, definito da:

$$\beta = \frac{P}{B^2/8\pi}. \quad (5.17)$$

Nelle situazioni in cui $\beta \gg 1$ la dinamica del sistema è dominata da effetti di natura idrodinamica, mentre quando $\beta \ll 1$ sono gli effetti magnetici ad essere dominanti, come suggerito anche dal fatto che β può essere interpretato come il rapporto tra la densità di energia termica, $P = \frac{2}{3}E_T/V$ e è la densità di energia magnetica, $B^2/8\pi$.

5.3 L'evoluzione nel tempo dei campi magnetici

Consideriamo l'equazione di Faraday, (5.13), supponendo per semplicità che la resistività η , Eq. (5.12), sia una costante, cioè non dipenda dalle variabili termodinamiche

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (5.18)$$

Nelle considerazioni che seguono non terremo conto del legame tra la (5.18) e le altre equazioni MHD, in particolare l'equazione di moto (5.14b). Supporremo quindi che il campo di velocità \mathbf{U} sia noto, e ci occuperemo solo delle caratteristiche intrinseche della (5.18). Questo approccio viene indicato come *cinematico*.

La (5.18) mostra come la variazione temporale di \mathbf{B} sia dovuta a due termini. Il primo, che contiene la velocità fluida \mathbf{U} ed è quindi associato a moti di materia, è un termine *convettivo*, mentre il secondo, che non contiene \mathbf{U} , è un termine di tipo *diffusivo*. Questi due tipi di processi si svolgono su scale temporali diverse. Infatti, utilizzando la consueta analisi dimensionale, potremo scrivere il termine convettivo nella forma

$$\frac{\mathcal{B}}{\tau_f} \quad \text{con} \quad \tau_f = \ell/\mathcal{U},$$

ed il termine diffusivo come

$$\frac{\mathcal{B}}{\tau_d} \quad \text{con} \quad \tau_d = \ell^2/\eta.$$

L'importanza relativa dei due termini è dunque misurata da

$$\mathcal{R}_m = \frac{\tau_d}{\tau_f} = \frac{\mathcal{U}\ell}{\eta},$$

detto *numero di Reynolds magnetico*. Nel caso in cui si identifichi \mathcal{U} con la velocità di Alfvén, vedi Eq. (??), caratteristica dei fenomeni magnetici, come spesso vien fatto in fisica del plasma, il numero di Reynolds magnetico vien chiamato *numero di Lundquist*, definito quindi da:

$$S = \frac{c_a \ell}{\eta}.$$

Esaminiamo ora la dinamica del plasma nei due casi limite $\mathcal{R}_m \ll 1$ e $\mathcal{R}_m \gg 1$.

5.3.1 $\mathcal{R}_m \ll 1$: la diffusione magnetica

Se $\mathcal{R}_m \ll 1$ possiamo trascurare il termine convettivo e studiare le soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}.$$

Poichè si tratta di un'equazione differenziale lineare per \mathbf{B} possiamo applicare un'analisi di Fourier, scrivendo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} d\omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},$$

introducendo questa rappresentazione nell'equazione per \mathbf{B} e ottenendo così

$$\int d\mathbf{k} d\omega (i\omega - \eta k^2) \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = 0.$$

Poichè la precedente equazione deve essere identicamente soddisfatta per qualunque $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$ se ne deduce che $\omega = -i\eta k^2$. Per tener conto formalmente di questa condizione, introduciamo la funzione δ di Dirac e scriviamo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} d\omega \delta(\omega - i\eta k^2) \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Eseguendo l'integrazione in $d\omega$ otteniamo :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} e^{-\eta k^2 t} \mathbf{B}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}.$$

Questa è la rappresentazione di Fourier della soluzione dell'equazione diffusiva. Vediamo quindi che le componenti di Fourier di un generico campo magnetico, che al tempo $t = 0$ erano date da $\mathbf{B}(\mathbf{k})$, decrescono esponenzialmente nel tempo. Il valore dell'energia magnetica $(B^2/8\pi)V$ diminuisce come effetto della presenza della resistività trasformandosi in altre forme di energia. Una parte va in energia termica (effetto Joule!), ma una frazione può

anche trasformarsi in energia cinetica di fluido accelerato. Infatti, se $\partial B/\partial t \neq 0$, nasce un campo elettrico e questo può accelerare le particelle del plasma. Si osservi che le componenti corrispondenti a grandi valori di k , cioè a piccole lunghezze d'onda, decrescono più rapidamente. Poichè le piccole lunghezze d'onde descrivono le rapide variazioni spaziali del campo, se ne deduce che durante la generale decrescita il campo magnetico tende a divenire più regolare.

Il tempo diffusivo τ_d può assumere valori enormemente differenti al variare del sistema in esame. Per esempio, in una macchina per la fusione termonucleare $\tau_d \simeq 10 \text{ sec}$, ma nel nucleo liquido della Terra il suo valore sale a 10^4 anni e nell'interno del Sole a 10^{10} anni.

5.3.2 $\mathcal{R}_m \gg 1$: il teorema di Alfvén

Quando la conducibilità elettrica è molto elevata e/o le scale spaziali sono molto grandi, $\mathcal{R}_m \gg 1$ e il termine diffusivo nella (5.18) può essere trascurato. Si noti che tali condizioni si realizzano con grande facilità nei plasmi naturali, che quindi possono essere molto spesso considerati dei plasmi ideali, cioè con $\eta = 0$. In questi casi la (5.18) assume la forma semplificata:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}), \quad (5.19)$$

e le sue soluzioni posseggono delle importanti proprietà che andremo ora ad illustrare. Il risultato più importante è contenuto nel

Teorema di Alfvén: Il flusso magnetico attraverso una qualunque linea chiusa che si muova insieme al fluido è costante nel tempo.

Per dimostrare questo teorema, consideriamo al tempo t una curva chiusa C , che possiamo pensare identificata dalle particelle che in quell'istante giacciono su di essa. A causa del moto del fluido, tali particelle si sposteranno e, al tempo $t + dt$, definiranno una nuova curva C' . Poichè per calcolare il flusso di \mathbf{B} attraverso una curva chiusa possiamo utilizzare qualunque superficie che si appoggi su tale curva, scegliamo al tempo t una generica superficie S e al tempo $t + dt$ una superficie S' , composta da S più la superficie A formata dalle linee di flusso che collegano C e C' , come indicato in figura. La variazione nel tempo del flusso di \mathbf{B} è data dunque da

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \frac{\Phi_{S'} - \Phi_S}{dt} = \frac{\Phi_A}{dt} = \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{U} \times d\boldsymbol{\ell}).$$

Scambiando tra loro le operazioni di prodotto vettore e prodotto scalare e utilizzando il teorema di Stokes, potremo scrivere:

$$\int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{U} \times d\boldsymbol{\ell}) = \int_C (\mathbf{B} \times \mathbf{U}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_A \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{A}.$$

Si avrà dunque:

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \int_A \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{A}.$$

Quindi, se vale la (5.19), il flusso rimane costante ed il teorema è dimostrato.

Consideriamo ora due curve C_1 e C_2 che al tempo t siano connesse da linee di forza del campo magnetico, che formino cioè un *tubo di flusso*. Sia Φ_B il flusso totale di \mathbf{B} attraverso la superficie del tubo, cioè di fatto attraverso C_1 e C_2 poichè il flusso attraverso la superficie laterale del tubo è uguale a zero. Dal teorema di Alfvén segue che Φ_B rimarrà costante durante tutta l'evoluzione dinamica del sistema. Possiamo ora pensare di far tendere a zero l'area racchiusa da C_1 e C_2 , cosicchè il tubo di flusso si riduca essenzialmente ad una sola linea di forza. A questo punto saremmo tentati di concludere che "le linee di forza si muovono insieme al fluido" o, come spesso si dice, che "le linee di forza sono congelate nel fluido". Per quanto intuitiva, questa conclusione richiede una miglior giustificazione formale, che verrà ora illustrata.

Consideriamo le formulazioni lagrangiane delle equazioni di continuità, (5.14a) e dell'induzione, (5.19). Ricordando che

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla,$$

avremo

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U}$$

e

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{U}),$$

dove si è fatto uso dell'identità vettoriale

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G},$$

e della condizione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Utilizzando le due precedenti relazioni, troviamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{U})] + \frac{\mathbf{B}}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{U}) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{U}. \quad (5.20)$$

Consideriamo ora il moto del fluido, descritto da un campo di velocità $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ e determiniamo l'equazione che descrive il moto di un generico elemento di linea $d\ell$ che unisce i due punti \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d\ell$. Si avrà evidentemente:

$$\frac{d(d\ell)}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} + d\ell)}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{r} + d\ell) - \mathbf{U}(\mathbf{r}) = (d\ell \cdot \nabla)\mathbf{U}. \quad (5.21)$$

Confrontando ora le (5.21) e (5.20), si vede che esse sono identiche e quindi la quantità \mathbf{B}/ρ evolve esattamente come $d\ell$. Ne segue che, se ad un certo istante $d\ell$ è parallelo a \mathbf{B} , tale condizione sarà mantenuta a qualunque tempo successivo. Ritroviamo dunque, in forma quantitativa, la condizione di "congelamento" delle linee di forza nel fluido. Per descrivere questo risultato in termini "pittorici", potremmo pensare di distinguere dalle altre tutte le particelle che si trovano sulla stessa linea di forza ad un dato istante, per esempio tingendole di rosso. Durante l'evoluzione dinamica del fluido, la linea tracciata dalle particelle rosse

verrà deformata, ma essa *rimarrà sempre una linea di forza*. Il teorema di Alfvén ci consente quindi di identificare una linea di forza di \mathbf{B} e di seguirla nel tempo. Nei casi in cui il teorema non si applica, cioè quando $\eta \neq 0$, ciò non è possibile. Ad ogni istante potremo sempre tracciare le linee di forza, ma non potremo identificarle con quelle di un istante diverso. Il teorema di Alfvén conferisce un grado di realtà alle linee di forza, ben superiore a quello di un semplice strumento di visualizzazione. Inoltre, poichè il moto del fluido viene considerato *continuo*, le linee di forza di \mathbf{B} potranno solo essere deformate e quindi la *topologia* del campo magnetico, cioè l'insieme delle proprietà geometriche che si conservano per deformazioni, non verrà alterata.

In un plasma ideale dunque, campo magnetico e materia sono indissolubilmente connessi tra loro. La dinamica è imposta dal termine dominante nell'equazione di moto. Se $\beta \gg 1$ sono le forze di pressione che determinano il moto ed è la materia che trascina il campo magnetico, se $\beta \ll 1$ le forze magnetiche sono dominanti ed è la materia ad essere trascinata dal campo magnetico.

Abbiamo esaminato i due casi estremi $\mathcal{R}_m \ll 1$ e $\mathcal{R}_m \gg 1$ e possiamo chiederci quali dei due corrisponde maggiormente ai casi reali. Una tabella dei valori stimati di S per un certo numero di sistemi è riportata in nella Tabella 1. Come si vede, nella quasi totalità dei casi $S \gg 1$ e questo potrebbe spingerci a trascurare sempre tutti gli effetti resistivi. Tuttavia, le seguenti considerazioni dimostrano che questa conclusione è affrettata. Per prima cosa, osserviamo che per le nostre stime dell'importanza relativa dei termini convettivo e diffusivo, abbiamo utilizzato un calcolo dimensionale, trascurando così il carattere vettoriale dell'equazione dell'induzione. E' quindi vero che *in media* il termine convettivo domina per molti ordini di grandezza, ma non quando esso è nullo o molto piccolo. Ciò può avvenire nell'intorno dei punti in cui $\mathbf{U} = 0$, oppure \mathbf{U} è parallelo a \mathbf{B} ($\mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0$) o infine $\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0$. La condizione di plasma ideale può quindi essere violata *localmente*. In queste regioni il termine diffusivo non è più trascurabile, il teorema di Alfvén non è valido, la topologia di \mathbf{B} può cambiare e l'energia magnetica può essere trasformata in altre forme di energia. E' proprio quest'ultimo aspetto che spinge a studiare più da vicino le situazioni in cui è necessario considerare l'effetto del termine resistivo. Nei plasmi di laboratorio infatti esso può dar luogo ad effetti indesiderati causando pericolose instabilità. In astrofisica d'altra parte, si osservano effetti di riscaldamento dei plasmi in situazioni in cui l'unica apparente sorgente di energia è il campo magnetico. Ma la trasformazione di tale energia in energia termica è possibile solo se il termine resistivo può esercitare la sua influenza.

5.4 Stati di equilibrio dei plasmi ideali

Uno stato di equilibrio è definito dalle condizioni $\mathbf{U} = 0$ e $\partial/\partial t = 0$. Un sistema che si trovi in uno stato di equilibrio vi rimarrà fino a quando non intervengono cambiamenti nelle forze che agiscono sul sistema o nelle condizioni al contorno. Nello studio delle configurazioni di equilibrio di un plasma in regime MHD è necessario tener conto, oltre che delle forze di

pressione e di quelle di origine magnetica, anche delle forze di altra natura che eventualmente agiscono sul sistema. In astrofisica, la forza di cui è più spesso necessario tener conto è quella di gravità. La natura anisotropa delle forze magnetiche rende più complessa la struttura degli equilibri MHD.

Una prima verifica di questa affermazione ci è fornita dal *teorema del viriale*, che è una semplice generalizzazione al caso MHD dell'analogo teorema che si dimostra in meccanica. Come vedremo, questo teorema esclude la possibilità che un plasma isolato possa rimanere in equilibrio sotto l'azione delle sole forze generate al suo interno, se queste sono quelle dovute alla pressione e al campo magnetico. Per confinare un plasma sono necessarie delle forze esterne.

Per dimostrare il teorema, partiamo dall'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{G}_{ik} = 0,$$

ricavata dalla (5.16) ponendo $\mathbf{U} = 0$. In \mathbf{G}_{ik} si può pensare di includere l'intero tensore \mathbf{P}_{ik} (e non solo la sua parte diagonale) e tutti i termini magnetici, cioè

$$\mathbf{G}_{ik} = \mathbf{P}_{ik} + \frac{B^2}{8\pi} \delta_{ik} - \frac{B_i B_k}{4\pi} = \left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) \delta_{ik} + \Pi_{ik} - \frac{B_i B_k}{4\pi}.$$

Moltiplicando per x_i , sommando su i e integrando in dV su tutto lo spazio, otteniamo:

$$\int_V x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{G}_{ik} \right) dV = 0,$$

e, integrando per parti

$$\int_S x_i \mathbf{G}_{ik} dS_k - \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \mathbf{G}_{ik} = 0 \quad (5.22)$$

Il primo termine rappresenta il flusso di \mathbf{rG} attraverso la superficie S che delimita V , cioè la superficie all'infinito. Se il sistema è isolato possiamo supporre che l'integrale di superficie si annulli, ciò che implica delle "buone" proprietà di convergenza all'infinito delle componenti \mathbf{G}_{ik} . Il secondo termine rappresenta semplicemente l'integrale di volume della traccia di \mathbf{G} e la precedente equazione ci dice che tale integrale è nullo. Ma, ricordando che $\mathbf{Tr} \Pi = 0$, si ha

$$\mathbf{Tr} \mathbf{G} = 3P + \frac{B^2}{8\pi} \neq 0.$$

Quindi l'equazione (5.22) non può essere soddisfatta, il che implica che l'ipotesi iniziale, sistema in equilibrio sotto l'azione delle sole forze interne di pressione e magnetiche, è falsa. Va sottolineato il fatto che il teorema è valido solo se il sistema composto unicamente dal plasma e se è isolato in tre dimensioni.

Scrivendo l'equazione dell'equilibrio nella forma

$$\nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (5.23)$$

vediamo subito che

$$\mathbf{J} \cdot \nabla P = \mathbf{B} \cdot \nabla P = 0.$$

Poichè il vettore ∇P è perpendicolare alle superfici $P = \text{costante}$, se ne conclude che sia \mathbf{B} che \mathbf{J} giacciono su tali superfici. La (5.23) mostra che anche in presenza di un campo magnetico, la *forza magnetica* può essere nulla. Questo avviene sicuramente quando $\mathbf{J} = 0$, nel qual caso si parla di *campi potenziali*. In questo caso infatti, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ e quindi il campo può essere rappresentato come il gradiente di una funzione scalare, il potenziale magnetico. Si può tuttavia avere una forza nulla anche con $\mathbf{J} \neq 0$: è sufficiente che \mathbf{J} sia parallela a \mathbf{B} . Queste particolari configurazioni magnetiche sono dette *campi senza forza* (*force-free fields*). Ne esamineremo ora alcune proprietà per passare poi al caso in cui la forza magnetica è diversa da zero.

5.4.1 Equilibri dei campi senza forza

I campi senza forza sono una caratteristica comune dei plasmi rarefatti, in cui i gradienti di pressione sono estremamente deboli e possono essere trascurati. L'equazione di equilibrio, $\mathbf{J} \times \mathbf{B} \propto (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0$, implica quindi:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}, \tag{5.24}$$

dove in generale è $\alpha = \alpha(\mathbf{r})$.

Si osservi che per arrivare alla (5.24) non abbiamo trascurato il termine di pressione "rispetto" a quello magnetico, nel qual caso la procedura sarebbe bizzarra: si trascura un termine rispetto ad un altro e poi si conclude che quest'ultimo è uguale a zero. Abbiamo semplicemente detto che i due termini sono separatamente uguali a zero.

Viene spesso affermato che i campi sono senza forza nelle situazioni in cui $\beta \ll 1$, affermazione che va presa tuttavia con una certa cautela. Infatti, la condizione che definisce tali campi è, in realtà,

$$\frac{c|\nabla P|}{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|} \ll 1.$$

E' chiaro che se sommiamo a P o a B una pressione o un campo magnetico *costanti*, cambiamo il valore di β , ma non quello del rapporto tra i loro gradienti. Si può quindi avere un campo senza forza anche in situazioni in cui $\beta > 1$.

Tornando ora alla relazione (5.24), vediamo di ricavare alcune proprietà dei campi senza forza. Prendendo la divergenza della (5.24) otteniamo

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\alpha \mathbf{B}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0,$$

che implica

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0.$$

E' questa l'unica condizione a cui è soggetta la funzione $\alpha(\mathbf{r})$. La precedente equazione mostra anche che \mathbf{B} deve giacere sulle superfici $\alpha = costante$.

Se scriviamo per componenti l'equazione (5.24) ci rendiamo subito conto che essa lega componenti diverse di \mathbf{B} . Se α è una costante, cioè non dipende dalle coordinate, un'equazione che coinvolga una sola componente di \mathbf{B} alla volta può essere facilmente ottenuta prendendo il rotore della (5.24):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} = \alpha(\nabla \times \mathbf{B}) = \alpha^2 \mathbf{B}. \quad (5.25)$$

Tuttavia, poichè la (5.25) è un'equazione differenziale di ordine superiore alla (5.24), bisogna poi verificare che le soluzioni della prima siano anche soluzioni della seconda.

Come primo esempio di un campo senza forza con $\alpha = const.$, consideriamo il caso $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x) = [0, B_y(x), B_z(x)]$, dove si è tenuto conto della relazione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. E' facile verificare che le soluzioni della (5.25) che soddisfano la (5.24) possono essere scritte, con un'opportuna scelta delle condizioni iniziali:

$$B_y = B_0 \cos(\alpha x) \quad ; \quad B_z = -B_0 \sin(\alpha x).$$

Si tratta quindi di un campo, le cui linee di forza sono delle rette nei piani $x = const.$, ma la cui inclinazione rispetto all'asse y ruota con un "passo" $2\pi/\alpha$.

Un caso più interessante si ottiene considerando una geometria cilindrica, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r) = [0, B_\theta(r), B_z(r)]$. In tal caso, le (??) danno rispettivamente:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_\theta}{dr} \right) + \left(\alpha - \frac{1}{r^2} \right) B_\theta = 0,$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_z}{dr} \right) + \alpha B_z = 0,$$

le cui soluzioni sono:

$$B_\theta = B_0 J_1(\alpha r) \quad e \quad B_z = B_0 J_0(\alpha r),$$

dove le J_n sono funzioni di Bessel di ordine n . La struttura di questi campi è di tipo elicoidale. Lungo l'asse ($r = 0$), il campo è diretto lungo z ($J_1(0) = 0$), poi, al crescere di r , nasce una componente azimutale e quindi il campo è un'elica che si avvolge sulla superficie $r = const.$. Il passo dell'elica diminuisce sempre finchè in corrispondenza del primo zero della J_0 , la componente assiale si annulla ed il campo è totalmente azimutale. Per valori maggiori di αr , il campo è ancora un'elica, ma con il senso di rotazione invertito, a causa dell'inversione del segno di J_0 . Aumentando ancora r si trova uno zero di J_1 e il campo è nuovamente assiale, ma con il verso opposto di quello nell'origine. Uno schizzo indicativo della struttura del campo è riportato in Fig....

La struttura elicoidale è caratteristica dei campi senza forza in geometria cilindrica, anche se $\alpha \neq const.$. Infatti, consideriamo un campo dato da

$$B_\theta = B_0 \frac{kr}{1 + k^2 r^2} \quad ; \quad B_z = -B_0 \frac{1}{1 + k^2 r^2}.$$

La componente z di $\nabla \times \mathbf{B}$ è data da

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) = -B_0 \frac{2k}{(1+k^2r^2)^2} = \alpha(r)B_z,$$

dove si è posto

$$\alpha(r) = \frac{2k}{1+k^2r^2}.$$

Quindi, almeno per quel che riguarda la componente z , il campo può essere considerato senza forza, con $\alpha \neq \text{cost}$. Ma è facile verificare che anche l'equazione per la componente θ è soddisfatta da questa scelta di α . Un'analisi della struttura di questo campo porta a concludere che si tratta ancora una volta di un campo le cui linee di forza si avvolgono su cilindri $r = \text{cost}$. con passo decrescente all'aumentare di r .

Vi sono anche soluzioni semplici della (5.24) in due dimensioni. Ad esempio, si verifica facilmente che in geometria piana il campo dato da:

$$\begin{aligned} B_x &= -(l/k)B_0 \cos(kx)e^{-lz} \\ B_y &= -(1-l^2/k^2)B_0 \cos(kx)e^{-lz} \\ B_z &= B_0 \sin(kx)e^{-lz} \end{aligned}$$

è un campo senza forza con $\alpha = (k^2 - l^2)^{1/2} = \text{cost}$. Questo campo è stato usato come modello per le arcate magnetiche osservate nella corona solare.

Questi esempi, e i molti altri che si potrebbero dare, mostrano che i campi senza forza hanno sollevato un notevole interesse. Una delle ragioni di questo interesse è connesso con il

Teorema di Woltjer: lo stato di minima energia magnetica di un sistema isolato corrisponde ad un campo senza forza con $\alpha = \text{costante}$

Per dimostrare questo importante teorema, è necessario introdurre il concetto di *elicità magnetica*. Questa quantità è definita da

$$\mathcal{H} = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (5.26)$$

dove \mathbf{A} è il *potenziale vettore* legato al campo magnetico da

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Introducendo questa rappresentazione nella (5.18) e scegliendo opportunamente il *gauge*, si ottiene facilmente l'equazione di evoluzione di \mathbf{A}

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (5.27)$$

L'elicità magnetica ha la proprietà di essere costante nel tempo per un sistema isolato, supponendo che \mathbf{A} non vari sulla superficie S che delimita il volume V , Infatti si avrà

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} \right) dV.$$

Utilizzando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}), \quad (5.28)$$

con $\mathbf{F} = \partial \mathbf{A} / \partial t$ e $\mathbf{G} = \mathbf{A}$ si ottiene:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_V \left[\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{A} \right) + 2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \right] dV.$$

Il primo termine può essere trasformato in un integrale sulla superficie S dove, per ipotesi, $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ e il secondo termine si annulla a causa della (5.27). Quindi

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0.$$

Utilizzando questa proprietà di \mathcal{H} , proviamo ora il teorema di Woltjer. Gli stati di equilibrio possono essere trovati minimizzando l'energia (magnetica, W_B) del sistema. Nel nostro caso tuttavia, bisognerà tener conto dell'invarianza di \mathcal{H} , appena provata, e il nostro problema diviene quindi un problema di minimo condizionato. Com'è noto, questa classe di problemi si risolvono con il metodo dei moltiplicatori lagrangiani, cioè cercando il minimo di $(W_B - \lambda \mathcal{H})$, dove λ è una costante e imponendo che \mathbf{A} sia costante sulla superficie S . Scrivendo per comodità $\lambda = \alpha_0 / 8\pi$ risolviamo il problema variazionale:

$$\begin{aligned} 0 = \delta(W_B - \alpha_0 / 8\pi) &= \frac{1}{8\pi} \delta \int_V (B^2 - \alpha_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_V \left[\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B} - \frac{\alpha_0}{2} (\mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A}) \right] dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_V \left[\left(\mathbf{B} - \frac{\alpha_0}{2} \mathbf{A} \right) \cdot \delta \mathbf{B} - \frac{\alpha_0}{2} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A} \right] dV, \end{aligned}$$

Poichè

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \times \delta \mathbf{A},$$

utilizzando nuovamente la (5.28) con $\mathbf{F} = (\mathbf{B} - (\alpha_0/2)\mathbf{A})$ e $\mathbf{G} = \delta \mathbf{A}$ si ottiene

$$\int_V \nabla \cdot \left([\mathbf{B} - (\alpha_0/2)\mathbf{A}] \times \delta \mathbf{A} \right) dV + \int_V [\nabla \times \mathbf{B} - \alpha_0 \mathbf{B}] \cdot \delta \mathbf{A} dV = 0$$

Il primo dei due integrali è nullo perchè può essere trasformato in un integrale sulla superficie S dove per ipotesi $\delta \mathbf{A} = 0$. La condizione di equilibrio impone quindi che il secondo integrale sia nullo per qualsiasi $\delta \mathbf{A}$ e questo implica che

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha_0 \mathbf{B}.$$

E' poi possibile dimostrare che fra tutte le configurazioni magnetiche compatibili con le condizioni al contorno assegnate, quella di energia minima corrisponde ad un campo potenziale.

5.5 Equilibri in presenza di forze magnetiche

Se consideriamo configurazioni magnetiche più generali, in cui la forza magnetica non sia nulla, l'equazione dell'equilibrio diviene:

$$\nabla\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \quad (5.29)$$

Discuteremo ora brevemente alcuni esempi di configurazioni magnetiche soluzioni della precedente equazione, limitandoci al caso cilindrico.

Dato dunque un campo magnetico $\mathbf{B} = [0, B_\theta(r), B_z(r)]$ la (5.29) si riduce a:

$$\frac{d}{dr}\left(P + \frac{B_\theta^2 + B_z^2}{8\pi}\right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{B_\theta^2}{r}. \quad (5.30)$$

Ci troviamo dunque in presenza di una sola equazione differenziale nelle tre funzioni incognite $P(r)$, $B_\theta(r)$ e $B_z(r)$: specificandone due qualunque (e le relative condizioni al contorno) la (5.30) fornirà la terza. E' chiaro dunque che esistono infinite soluzioni, di cui ora illustreremo alcuni esempi, particolarmente interessanti per il confinamento magnetico dei plasmi. Queste configurazioni vengono indicate in inglese con il termine generale di *pinches*, difficilmente traducibile in italiano con una sola parola; adotteremo quindi il termine inglese.

- **Theta-pinch**, $B_\theta = 0$.

Questa configurazione può essere generata da correnti che fluiscono nella direzione azimutale θ (da cui il nome) alla superficie di una colonna di plasma. In questo caso la soluzione dell'equazione (5.29) diviene semplicemente

$$P + \frac{B^2}{8\pi} = \text{cost.}$$

Il valore della costante è determinato dalle condizioni al contorno radiali. Se, per esempio, la colonna di plasma ha un raggio a ed è immersa nel vuoto (o in un mezzo di pressione trascurabile) e se all'esterno è presente un campo magnetico assiale costante $B_z = B_0$, la condizione di equilibrio diviene

$$P + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi}.$$

Che questa sia una configurazione di equilibrio è facilmente intuibile. La forza $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ è infatti diretta verso l'asse del cilindro e tende a "strizzare" ("to pinch", in inglese) il plasma ed è quindi in grado di equilibrare l'effetto della pressione interna. Notare che questa soluzione vale anche per configurazioni senza simmetria assiale: basta semplicemente che il termine $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ sia uguale a zero, ciò che si verifica, per esempio, quando le linee di forza del campo sono delle rette.

- **Zeta-pinch**, $B_z = 0$.

E' una configurazione che si può pensare di ottenere dalla precedente scambiando i ruoli di \mathbf{J} e \mathbf{B} . Supporremo che la corrente fluisca in direzione assiale in una colonna di raggio a , circondata dal vuoto. Tale corrente si può immaginare costituita da tanti fili in cui scorrono correnti parallele, Siccome, com'è noto, correnti parallele si attirano, l'effetto, ancora una volta, è quello di "strizzare" la colonna di plasma. La condizione di equilibrio (5.29) diviene ora

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{4\pi r} B \frac{d}{dr}(r B). \quad (5.31)$$

Moltiplicando entrambi i membri della precedente equazione per r^2 e integrandoli tra 0 e a si ottiene:

$$\int_0^a r^2 \frac{dP}{dr} dr = -\frac{1}{4\pi} \int_0^a r B \frac{d}{dr}(r B) dr.$$

Eseguendo le integrazioni e tenedo conto delle condizioni al contorno si ha:

$$2 \int_0^a r P dr = \frac{1}{8\pi} [a B_\theta(a)]^2.$$

Se il plasma può essere considerato un gas perfetto, $P = nkT$, il primo membro può essere scritto nella forma

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a 2\pi r (nkT) dr = \frac{kT}{\pi} \int_0^a 2\pi r n dr = \frac{N_\ell T}{\pi},$$

dove si è supposto che la temperatura sia costante all'interno della colonna di plasma e si è introdotta la quantità N_ℓ , che rappresenta il numero di particelle per unità di lunghezza della colonna (*densità lineare*):

$$N_\ell = \int_0^a 2\pi r n dr.$$

L'integrale a secondo membro può essere trasformato notando che l'intensità di corrente che scorre nella colonna di plasma è:

$$I = \int_0^a 2\pi r J_z dr,$$

e che

$$J_z = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r B_\theta),$$

cosicchè

$$\frac{2I}{c} = a B_\theta(a).$$

Utilizzando le relazioni trovate si ottiene:

$$I^2 = 2kT N_\ell c^2,$$

detta *relazione di Bennet*. Si noti che questa relazione è indipendente dai dettagli del profilo di pressione. Quest'ultimo può essere ricavato direttamente dall'equazione di equilibrio

(5.31), per esempio supponendo che J_z sia costante all'interno della colonna di plasma e zero all'esterno. In questo caso B_θ risulta uguale a

$$B_\theta = \frac{2I}{a^2} r \quad r \leq a,$$

ed il profilo di pressione è dato da:

$$P(r) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{I}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

6 Instabilità

L'esistenza di un equilibrio non garantisce la sua stabilità. Infatti, un equilibrio, cioè uno stato in cui le forze in gioco hanno una risultante nulla, è caratterizzato da un insieme di ben precisi valori di tutte le grandezze fisiche. Qualora uno o più di questi valori vengano variati, l'equilibrio non può essere mantenuto ed il sistema evolve dinamicamente. Se si considerano piccole perturbazioni dei parametri di equilibrio, si hanno essenzialmente due possibilità: la forza risultante tende a riportare il sistema nella posizione di equilibrio oppure tende a farlo ulteriormente allontanare da tale posizione. Nel primo caso, l'ampiezza della perturbazione rimane piccola e l'equilibrio è detto *stabile*, nel secondo l'ampiezza della perturbazione cresce e il sistema è detto *instabile*. Il caso intermedio, cioè quello in cui la perturbazione non cambia il perfetto bilanciamento delle forze, vien chiamato equilibrio *marginale*.

Poichè il calcolo della configurazione di equilibrio coinvolge in genere solo le forze dominanti, esso non rappresenta la situazione reale in cui sono presenti anche altre forze, che in prima istanza vengono considerate trascurabili. Di conseguenza, le condizioni di equilibrio non sono mai perfettamente soddisfatte e la realtà è rappresentata piuttosto da un equilibrio (teorico) perturbato, ciò che rende essenziale un'analisi di stabilità. Infatti, se ci poniamo il problema della verifica (sperimentale o osservativa) dell'esistenza di una configurazione di equilibrio ci rendiamo facilmente conto che in realtà potremo effettuare una tale verifica solo per sistemi stabili o moderatamente instabili, intendendo con ciò che la velocità con cui i parametri caratteristici del sistema cambiano rispetto ai valori di equilibrio sia tale da far sì che essi non vengano sostanzialmente alterati durante la misura. Ne consegue che il concetto fisico (non matematico!) di equilibrio ha senso solo se riferito a una ben definita scala di tempo. In altre parole, non siamo interessati a trovare equilibri che durino per tutta l'eternità: quel che vogliamo, è trovare se esistono degli stati che si mantengano essenzialmente inalterati sulle scale di tempo di interesse. E' importante osservare che un sistema può essere considerato stabile solo se lo è rispetto a **qualsunque** perturbazione, purchè compatibile con gli eventuali vincoli del sistema, mentre deve essere considerato instabile anche se lo è rispetto ad **un solo** tipo di perturbazione.

L'analisi della dinamica di un equilibrio soggetto a piccole perturbazioni, cioè la cosiddetta analisi di stabilità *lineare*, sarà in grado di dirci se il sistema tenderà a tornare verso la

posizione di equilibrio, dando origine ad una dinamica oscillatoria, o ad allontanarsene, ma non potrà dirci nulla sullo stato finale dell'evoluzione. Questo potrà essere un diverso stato di equilibrio (stabile) oppure sarà il risultato di una profonda modifica del sistema stesso. Un esempio preso dall'astrofisica è quello di una nana bianca di massa superiore al limite di Chandrasekhar. Per una tale configurazione non esistono equilibri stabili, che possono essere trovati solo se la composizione viene drasticamente modificata in quella di una stella di neutroni. In questo caso quindi, il nuovo equilibrio viene raggiunto solo grazie al processo di neutronizzazione della materia, processo del tutto estraneo alla determinazione dell'equilibrio nella composizione originale.

Per l'analisi di stabilità lineare possono esser utilizzati due metodi diversi. Il primo, detto *metodo dei modi normali*, consiste essenzialmente nello studio del moto del sistema perturbato e determina non solo se il sistema è stabile, ma anche le caratteristiche del moto, cioè la frequenza delle oscillazioni nel caso stabile o il tasso di crescita dell'ampiezza delle perturbazioni nel caso instabile. Il secondo, detto *metodo dell'energia*, che dal punto di vista matematico è un metodo variazionale, è una generalizzazione del ben noto risultato della meccanica dei sistemi che dice che gli stati di equilibrio corrispondono ai valori estremi dell'energia, con gli equilibri stabili localizzati nei minimi e quelli instabili nei massimi. Questo metodo è in grado di stabilire se un sistema è stabile o meno, ma non fornisce indicazioni sulla dinamica.

L'importanza dell'analisi di stabilità aumenta con il numero di gradi di libertà del sistema. Infatti, se consideriamo un sistema con un solo grado di libertà, la sua energia sarà funzione di un solo parametro e quindi un estremo potrà essere solo un massimo o un minimo. Quindi, su due stati di equilibrio possibili, uno solo sarà stabile e il rapporto, \mathcal{R} tra il numero di equilibri stabili e quello di tutti i possibili equilibri sarà uguale a $1/2$. In un sistema con due gradi di libertà, in cui potrò pensare di rappresentare l'energia come una superficie nella spazio dei due parametri che la caratterizzano, si avranno quattro possibili estremi e cioè un massimo assoluto (una cima), un minimo assoluto (una conca) e due selle (passi di montagna). Quest'ultime debbono essere considerate equilibri instabili, poichè solo le perturbazioni in una certa direzione sono stabili. In definitiva, su quattro configurazioni possibili, solo una è stabile, cioè $\mathcal{R} = 1/4$. Ciò fa sospettare che per un sistema con n gradi di libertà si possa scrivere $\mathcal{R} = 1/2^n$. Anche se non è possibile provare una tale affermazione, è evidente che in un sistema con un numero grandissimo di gradi di libertà, come un fluido o un plasma, la quasi totalità degli equilibri è instabile!

6.1 Stabilità lineare degli equilibri in MHD ideale

La base di partenza è rappresentata dalle equazioni della magnetoidrodinamica ideale, che vengono qui riscritte :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) &= 0 \\
\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{f} \\
\frac{d}{dt} (P \rho^{-\gamma}) &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{6.1}$$

In accordo con l'ipotesi che le perturbazioni all'equilibrio siano di piccola entità, scriveremo per ogni quantità h che appare nelle equazioni precedenti:

$$h = h_0 + h_1 \quad \text{con} \quad |h_1| \ll |h_0|,$$

dove h_0 rappresenta il valore di quella grandezza all'equilibrio ed h_1 la perturbazione. Poichè all'equilibrio la velocità è nulla : $\mathbf{U}_0 = 0$ e di conseguenza $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1$ è una quantità del primo ordine. Tenendo conto di ciò, si ottengono le seguenti equazioni:

All'ordine zero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_0}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = 0, \\
P_0 \rho_0^{-\gamma} &= \text{cost.} \\
0 &= -\nabla P_0 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{f}_0,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

cioè l'equazione dell'equilibrio.

Al primo ordine:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \rho_0 + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0, \tag{6.3}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P_1 + \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0] + \mathbf{f}_1 \tag{6.4}$$

$$\rho_0^{-\gamma} \frac{dP_1}{dt} - \gamma P_0 \rho_0^{-\gamma-1} \frac{d\rho_1}{dt} = 0, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}_0). \tag{6.6}$$

Introducendo la velocità del suono c_s ,

$$c_s^2 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0},$$

e utilizzando la (6.3) La (6.5) può essere scritta

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)P_0 + c_s^2(\nabla \cdot \mathbf{U})\rho_0 = 0, \quad (6.7)$$

Le equazioni MHD linearizzate possono essere semplificate introducendo la nozione di *spostamento lagrangiano* e scegliendo opportunamente le condizioni iniziali. Supponiamo di caratterizzare la posizione istantanea di un elemento fluido come:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \xi(\mathbf{r}_0, t),$$

dove ξ è una quantità piccola del primo ordine. Si avrà allora:

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \simeq \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Sostituendo questa espressione nell'(6.3) si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \xi)) = 0,$$

cioè

$$\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = \text{cost.}$$

Se ora scegliamo, senza perdita di generalità, che le perturbazioni iniziali siano tutte nulle ovunque, tranne $\dot{\xi}(\mathbf{r}_0, 0)$, la costante della precedente equazione è uguale a zero e quindi

$$\rho_1 = -(\xi \cdot \nabla) \rho_0 - \rho_0(\nabla \cdot \xi). \quad (6.8)$$

Applicando la stessa procedura alle (6.5) e (6.6) si ottiene:

$$P_1 = -(\xi \cdot \nabla)P_0 - \rho_0 c_s^2(\nabla \cdot \xi), \quad (6.9)$$

e

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0), \quad (6.10)$$

mentre l'equazione di moto, (6.4), diviene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\xi), \quad (6.11)$$

dove la "forza per unità di volume", $\mathbf{F}(\xi)$ è data da:

$$\mathbf{F}(\xi) = -\nabla P_1 + \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0] + \mathbf{f}_1, \quad (6.12)$$

con P_1 , e B_1 dati dalle espressioni (6.9) e (6.10).

L'Eq.(6.11) è la base di partenza del metodo dei modi normali: essa descrive l'evoluzione temporale degli spostamenti dalla posizione di equilibrio sotto l'azione della forza $\mathbf{F}(\xi)$. Dalla definizione di $\mathbf{F}(\xi)$ si vede che in realtà si tratta di un operatore differenziale lineare del secondo ordine $[\nabla \times \mathbf{B}_1 = \nabla \times \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)]$ nelle coordinate *spaziali* e ciò ci permette di scrivere

$$\mathbf{F}(\xi) = \hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}} [\xi(\mathbf{r}, t)],$$

dove $\hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}}$ è appunto tale operatore. La (6.11) è quindi una equazione differenziale alle derivate parziali nelle variabili \mathbf{r}, t .

Uno dei metodi standard per la soluzione di questo tipo di equazioni è quello della trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier, $\xi(\mathbf{r}, \omega)$, è definita da:

$$\xi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (6.13)$$

Dalla precedente definizione segue che

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (6.14)$$

come si può verificare moltiplicando la (6.14) per $e^{i\omega' t}$, integrando in dt e tenendo conto della relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega' - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega' - \omega).$$

Utilizzando la (6.14) la (6.11) diventa

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \omega^2 \xi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}} [\xi(\mathbf{r}, \omega)] e^{-i\omega t} d\omega,$$

e, osservando che i coefficienti della funzione incognita ξ e delle sue derivate sono funzioni delle grandezze di equilibrio che, per definizione, non dipendono dal tempo, la precedente espressione può anche essere scritta:

$$-\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \xi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right].$$

Moltiplicando i due membri per $e^{i\omega' t}$ e integrando in dt si ottiene infine

$$-\rho_0 \omega'^2 \xi(\mathbf{r}, \omega') = \hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}} [\xi(\mathbf{r}, \omega')]. \quad (6.15)$$

Abbiamo quindi ricavato un'equazione per la trasformata di Fourier della $\xi(\mathbf{r}, t)$ che ha la stessa forma della (6.11), ma in cui l'operatore $\partial^2 \xi / \partial t^2$ è stato semplicemente sostituito dal moltiplicatore $-\omega'^2$. Questa equazione ha la struttura di un'equazione agli autovalori che qui sono rappresentati da $-\rho_0 \omega'^2$. Una volta risolta questa equazione, l'incognita primitiva $\xi(\mathbf{r}, t)$ può essere ricavata semplicemente applicando l'Eq.(6.14).

E' chiaro che la trasformazione di Fourier può essere applicata anche a quelle coordinate spaziali, dette *ignorabili*, che non compaiono esplicitamente nei coefficienti dell'equazione, cioè nelle grandezze imperturbate. Questo avviene quando lo stato di equilibrio possiede

certe proprietà di simmetria. Indicando con \mathbf{s} l'insieme delle le coordinate ignorabili, con \mathbf{k} un vettore con componenti non nulle solo nelle direzioni di tali coordinate e con \mathbf{r}' l'insieme delle altre coordinate, la rappresentazione di Fourier della $\xi(\mathbf{r}, t)$ ha la forma

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}', \mathbf{s}, t) = \iint \xi(\mathbf{r}', \mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{s} - \omega t)} d\omega d\mathbf{k}. \quad (6.16)$$

Ripetendo la procedura seguita per la trasformata rispetto al tempo, ci si rende facilmente conto che, in definitiva, l'applicazione della trasformata di Fourier equivale alle sostituzioni (limitate alle coordinate ignorabili)

$$\frac{\partial}{dt} \rightarrow -i\omega \quad , \quad \nabla \rightarrow i\mathbf{k},$$

e alla sostituzione della funzione incognita con la sua trasformata.

Si può dimostrare che in assenza di termini dissipativi l'operatore $\hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}}$ è un operatore hermitiano, che quindi gode della proprietà di avere autovalori reali. Dunque nel caso della MHD ideale ω^2 è un numero reale. ma non necessariamente positivo. Un ω^2 positivo implica ω reale e quindi un comportamento oscillatorio di ξ , le cui componenti di Fourier sono proporzionali a $e^{-i\omega t}$. Un ω^2 negativo implica invece ω immaginario puro e questo fa sì che l'ampiezza delle perturbazioni cresca. In conclusione la stabilità dell'equilibrio è determinata dal segno della quantità ω^2 . L'insorgere di instabilità o lo svilupparsi di moti ondosi sono quindi in realtà due aspetti complementari dello stesso problema, cioè dello studio della stabilità degli equilibri.

6.2 Instabilità in presenza di gravità

Uno dei casi di maggior interesse in astrofisica è quello in cui l'unica forza che si aggiunge a quelle legate ai gradienti di pressione e al campo magnetico è la forza di gravità. Questo significa che il termine \mathbf{f} che compare nella seconda delle (6.1) cioè nell'equazione di moto, ha la forma $\rho\mathbf{g}$ dove \mathbf{g} rappresenta il valore locale dell'accelerazione gravitazionale. Per semplicità supporremo che \mathbf{g} sia un campo *esterno*, cioè indipendente dalle perturbazioni presenti nel plasma. Nel processo di linearizzazione porremo perciò $\mathbf{g}_1 = 0$ e la (6.12) diviene:

$$\mathbf{F}(\xi) = -\nabla P_1 + \frac{1}{4\pi}[(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0] + \rho_1 \mathbf{g}, \quad (6.17)$$

con ρ_1 , P_1 , e B_1 dati rispettivamente dalle espressioni (6.8), (6.9) e (6.10).

Per semplicità supporremo che il plasma sia incomprimibile e che \mathbf{g} e \mathbf{B}_0 siano costanti. Il nostro sistema di riferimento sarà scelto in modo da avere \mathbf{g} diretto lungo l'asse z negativo. In questo riferimento l'equazione dell'equilibrio, $\nabla P_0 = \rho_0 \mathbf{g}$, implica che sia P_0 che ρ_0 siano funzioni della sola z e che:

$$\frac{dP_0(z)}{dz} = P'_0 = -\rho_0(z)g.$$

Le coordinate x e y sono dunque ignorabili e, nell'ipotesi che il sistema sia omogeneo nella direzione y , potremo sviluppare tutte le quantità in serie di Fourier lungo x scrivendo per la singola componente di Fourier (vedi la (??)):

$$\xi(\mathbf{r}, \omega) = \int \xi(z, k, \omega) e^{ikx} dk.$$

Il vettore $\mathbf{k} = [k, 0, 0]$ individua dunque insieme a \mathbf{g} il piano coordinato (x, z) . Rispetto a questo sistema di coordinate il vettore \mathbf{B}_0 può avere un'orientazione qualunque, ma ci si rende facilmente conto che una componente (costante) B_{0z} non influenza la dinamica del sistema. Supporremo quindi che \mathbf{B}_0 giaccia nel piano (x, y) , $\mathbf{B}_0 = [B_{0x}, B_{0y}, 0]$ Utilizzando le (6.8), (6.9) e (6.10). l'equazione per (6.15) si scrive

$$-\omega^2 \rho_0 \xi = \nabla(\xi \cdot \nabla P_0) - \mathbf{g}(\xi \cdot \nabla \rho_0) + \frac{1}{4\pi} \{ \nabla \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)] \} \times \mathbf{B}_0, \quad (6.18)$$

dove $\xi = \xi(\mathbf{r}, \omega)$ e si è usata la condizione di incomprimibilità $\nabla \cdot \xi = 0$.

Si osservi che la rappresentazione del vettore ∇ è ora la seguente:

$$\nabla = [ik, 0, \partial/\partial z].$$

Il termine magnetico nella (??) può essere trasformato in:

$$\frac{1}{4\pi} \{ \nabla \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)] \} \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{4\pi} \{ \nabla[\nabla \cdot (\xi \times \mathbf{B}_0)] - \nabla^2(\xi \times \mathbf{B}_0) \} \times \mathbf{B}_0,$$

dove ora $\xi = \xi(z, k, \omega)$. Una valutazione (lunga, ma senza difficoltà) della precedente espressione mostra che il termine magnetico vale:

$$B_{0x}^2 (-k^2 \xi_z + \xi_z'') \mathbf{e}_z,$$

dove l'apice indica la differenziazione rispetto a z .

L'equazione finale per $\xi = \xi(z, k, \omega)$ è dunque:

$$-\omega^2 \rho_0 \xi = \nabla(\xi_z P_0') - \mathbf{g}(\xi_z \rho_0') + (B_{0x}^2/4\pi)(-k^2 \xi_z + \xi_z'') \mathbf{e}_z, \quad (6.19)$$

le cui componenti x e z sono

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_x = ik(\xi_z P_0') \quad (6.20a)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_z = (\xi_z P_0') + (B_{0x}^2/4\pi)(-k^2 \xi_z + \xi_z'') + g(\rho_0' \xi_z). \quad (6.20b)$$

Alle (6.20) va aggiunta la condizione di incomprimibilità:

$$ik\xi_x + \xi_z' = 0. \quad (6.21)$$

Utilizzando quest'ultima relazione e la (6.20a) per eliminare $(\xi_z P_0')$ si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \omega^2 [(\rho_0 \xi_z')' - \rho_0 k^2 \xi_z] &= \frac{B_{0x}^2 k^2}{4\pi} (\xi_z'' - k^2 \xi_z) + k^2 g(\rho_0' \xi_z) \\ &= \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{4\pi} (\xi_z'' - k^2 \xi_z) + k^2 g(\rho_0' \xi_z). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Esamineremo ora alcune conseguenze della precedente equazione agli autovalori.

6.2.1 Instabilità di Rayleigh-Taylor: $\mathbf{B}_0 = 0$

Consideriamo dapprima l'instabilità che può prodursi quando il campo magnetico sia nullo, $\mathbf{B}_0 = 0$, nota col nome di instabilità di Rayleigh - Taylor. Una tecnica utile per ottenere rapidamente una condizione di stabilità è la seguente.

Moltiplicando la (6.22) per ξ_z e integrando in dz tra $-\infty$ e ∞ si ottiene:

$$\omega^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} [\rho_0 \xi_z']' \xi_z dz - k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \xi_z^2 dz \right] = k^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0' \xi_z^2 dz.$$

Eseguendo un'integrazione per parti sul primo integrale in parentesi quadra e supponendo che ξ_z e/o ξ_z' si annullino in $z = \pm\infty$ si ottiene:

$$\omega^2 = -k^2 g \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0' \xi_z^2 dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 [\xi_z'^2 + k^2 \xi_z^2] dz}. \quad (6.23)$$

La stessa equazione può essere ottenuta applicando il metodo dell'energia che, come già detto, è un metodo variazionale. Dalla (6.23) risulta chiaro che tutti i termini che appaiono negli integrali sono definiti positivi, tranne ρ_0' . La condizione *sufficiente* per avere stabilità, cioè $\omega^2 > 0$, è quindi $\rho_0' < 0$ per ogni z , cioè una densità ovunque decrescente con l'altezza. A prima vista si potrebbe pensare che questa condizione non sia *necessaria*. Infatti, $\omega^2 > 0$ non implica $\rho_0' < 0$ ovunque perchè ρ_0' è pesato nell'integrale con ξ_z^2 e se ρ_0' fosse positivo soltanto in un certo intervallo l'integrale a numeratore della (6.23) potrebbe ancora essere negativo. Tuttavia si può dimostrare che la condizione $\rho_0' < 0$ per ogni z è anche necessaria, come ora vedremo. Si osservi per prima cosa che l'espressione per ω^2 nella (6.23) è in realtà soltanto una soluzione formale della (6.22), in quanto essa contiene le quantità ξ_z e ξ_z' che sono delle incognite fin quando le (6.20) non sono state esplicitamente risolte. Nella teoria del calcolo delle variazioni si dimostra che se nella (6.23) si sostituiscono le funzioni ξ_z e ξ_z' , soluzioni dell'equazione di partenza, con delle funzioni *arbitrarie*, purchè con le corrette proprietà di convergenza all'infinito, la (6.23) produce un valore $\tilde{\omega}^2$ *maggiore* del valore corretto:

$$\tilde{\omega}^2 \geq \omega^2,$$

con il segno uguale valido solo quando vengano usate le effettive soluzioni del problema. Nel caso in cui fosse $\rho_0' > 0$ soltanto in un intervallo finito, potremmo sempre scegliere come funzioni arbitrarie delle funzioni che siano diverse da zero solo all'interno di tale intervallo. In questo caso, otterremmo un valore di $\tilde{\omega}^2$ negativo e quindi, a causa della precedente disuguaglianza, anche ω^2 sarebbe negativo. Non è quindi possibile avere $\omega^2 > 0$ neppure limitando l'intervallo in cui $\rho_0' > 0$ e la condizione $\rho_0' < 0$ per ogni z è quindi anche necessaria per la stabilità.

Un caso semplice ed interessante è quello di due fluidi incompressibili di densità diverse

sovrapposti l'uno all'altro. Si avrà quindi:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_1 = \text{cost.} & , & \quad z > 0 \\ \rho &= \rho_2 = \text{cost.} & , & \quad z < 0.\end{aligned}$$

In questo caso la derivata della densità sarà rappresentabile nella forma: $\rho'_0 = (\rho_1 - \rho_2) \delta(z)$. Di conseguenza la (6.22) si scriverà, per $z \neq 0$,

$$\xi''_z = k^2 \xi,$$

le cui soluzioni sono:

$$\xi_z = \xi_z(0)e^{-kz} \quad , \quad z > 0 \quad (6.24)$$

$$\xi_z = \xi_z(0)e^{kz} \quad , \quad z < 0. \quad (6.25)$$

Siamo ora in grado di valutare esplicitamente ω^2 utilizzando la (6.23). L'integrale a numeratore dà semplicemente

$$(\rho_1 - \rho_2) \xi_z^2(0).$$

Per l'integrale a denominatore scriveremo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [\xi_z'^2 + k^2 \xi_z^2] dz &= \rho_2 \int_{-\infty}^{0-} [\xi_z'^2 + k^2 \xi_z^2] dz + \rho_1 \int_{0+}^{\infty} [\xi_z'^2 + k^2 \xi_z^2] dz \\ &= 2(\rho_1 + \rho_2) k^2 \int_{0+}^{\infty} e^{-2kz} dz = k(\rho_1 + \rho_2) \xi_z^2(0)\end{aligned}$$

dove si sono usate le corrette espressioni per ξ_z e ξ_z' in ciascun intervallo d'integrazione. Otteniamo così:

$$\omega^2 = -kg \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (6.26)$$

Come si vede, si avrà instabilità quando il fluido di densità maggiore è sovrapposto a quello di densità minore, in accordo con il criterio generale già discusso. Nel caso $\rho_1 < \rho_2$ il sistema sarà stabile e la frequenza delle oscillazioni sarà ancora data dall (6.26). Il massimo valore di ω si ottiene per $\rho_1 \ll \rho_2$ nel qual caso

$$\omega = \sqrt{kg}.$$

Si tratta quindi di onde *dispersive* con velocità di fase $v_\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{g/k}$. Questo caso si applica allo studio delle onde del mare, cioè delle onde all'interfaccia acqua-aria. Può venire il dubbio che la descrizione dell'aria come un mezzo incompressibile non sia applicabile, ma in realtà qualunque mezzo si comporta come incompressibile se la velocità delle particelle fluide è trascurabile rispetto alla velocità del suono. Si noti che le relazione di dispersione che abbiamo ricavato si riferisce al caso di acqua profonda, in quanto abbiamo posto come condizione al contorno l'annullarsi di ξ_z per $z \rightarrow -\infty$. Nel caso di acqua di profondità h tale condizione va posta in $z = -h$ e questo modifica la relazione di dispersione.

6.2.2 Instabilità di Kruskal-Shafranov: $\mathbf{B}_0 \neq 0$

Anche in questo caso considereremo una situazione con due fluidi incompressibili di densità differente, sovrapposti l'uno all'altro. Possiamo ripetere il procedimento già seguito nel caso di campo nullo, ripartendo dalla (6.22) dove ora manteniamo il termine proporzionale a $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2$.

Per $z \neq 0$ la (6.22) diviene:

$$[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{4\pi}](\xi_z'' - k^2 \xi_z) = 0,$$

con $\rho_0 = \rho_1$ oppure $\rho_0 = \rho_2$, rispettivamente per $z \geq 0$. Non esiste quindi un valore unico di ω che annulli la prima parentesi per qualunque valore di z . Di conseguenza la ξ_z obbedirà ancora all'equazione

$$\xi_z'' = k^2 \xi_z,$$

le cui soluzioni sono date dalle (6.24). Procedendo come nel caso precedente, si ottiene facilmente

$$\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 (\xi_z'^2 + k^2 \xi_z^2) dz = -k^2 g (\rho_1 - \rho_2) \xi_z(0)^2 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_z'^2 + k^2 \xi_z^2) dz. \quad (6.27)$$

Gli integrali che appaiono nella (6.28) si possono valutare usando le (6.24), ricavando infine la relazione di dispersione:

$$\omega^2 = -kg \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + 2 \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{4\pi(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (6.28)$$

Nel limite $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$ ritroviamo la condizione di instabilità di Rayleigh-Taylor, mentre nel caso di un plasma omogeneo, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ abbiamo

$$\omega^2 = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{4\pi \rho_0},$$

che, come vedremo, corrisponde alla propagazione di onde di Alfvén. Dalla (6.28) si vede che la presenza di un campo magnetico può avere un effetto stabilizzante. Infatti, anche se $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 > 0$, ω^2 può ancora essere positivo, purchè il secondo termine della (6.28) sia maggiore del primo, cioè se

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} < \frac{B_0^2}{g\Delta\rho} \cos^2 \theta,$$

dove θ è l'angolo tra \mathbf{k} e \mathbf{B}_0 . Si vede dunque che la miglior stabilizzazione si ottiene quando \mathbf{k} è parallelo a \mathbf{B}_0 , mentre l'effetto stabilizzante scompare quando \mathbf{k} e \mathbf{B}_0 sono ortogonali tra loro. Questo si capisce facilmente perchè nel primo caso la perturbazione deforma le linee di forza del campo e la tensione magnetica si oppone alla deformazione, mentre nel secondo caso le linee di forza rimangono rettilinee e la tensione non è in grado di agire.

E' particolarmente interessante il caso in cui si abbia un plasma solo nella regione $z > 0$, mentre nella regione $z < 0$ sia presente solo un campo magnetico. In tal caso, con procedura analoga a quella precedentemente seguita, si ottiene:

$$\omega^2 = -kg + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{4\pi\rho_1},$$

che dimostra come sia possibile sostenere un plasma utilizzando un campo magnetico. Questa possibilità è invocata per spiegare la presenza e la stabilità delle protuberanze solari, cioè di strutture di plasma più dense dell'ambiente circostante.

7 Onde

Abbiamo già osservato che un equilibrio stabile sottoposto a piccole perturbazioni è contraddistinto da una dinamica oscillatoria. Ciò significa che se osserviamo l'andamento temporale di una qualunque grandezza fisica in un punto fissato, vedremo che il suo valore oscilla intorno a quello di equilibrio. Ma, cos'è esattamente un'onda? Una possibile definizione è: *un'onda è un disturbo che si propaga*. Consideriamo infatti cosa avviene se facciamo cadere un sasso in uno stagno. Inizialmente la sola "perturbazione" della superficie dell'acqua è localizzata nel punto dove è caduto il sasso. A tempi successivi, la zona perturbata diviene più ampia: si sono generate delle onde. Nella dinamica del sistema possiamo distinguere due diverse velocità. Quella delle particelle di fluido che, per effetto della sopraggiunta perturbazione, oscillano verticalmente e quella con cui la zona perturbata si amplia. Quest'ultima è diretta lungo la superficie dell'acqua ed ha in generale un valore diverso da quella con cui si muovono le particelle. Le due velocità sono collegate tra loro, ma è la seconda delle due, detta velocità di propagazione, che caratterizza la dinamica del sistema. In questo capitolo ci occuperemo delle onde di piccola ampiezza, dette onde *lineari*, intendendo con questo che i valori delle grandezze fisiche non si discostano molto dai valori di equilibrio. Nell'esempio precedente questo significa che gli innalzamenti o abbassamenti della superficie dell'acqua sono piccoli rispetto alla profondità dello stagno, ma **non** significa che la velocità di propagazione sia necessariamente piccola.

Lo studio delle onde lineari parte da un sistema di equazioni differenziali che descrivono la dinamica del sistema fisico che si vuole studiare. Queste possono essere le equazioni MHD, ma evidentemente possono esistere onde in regimi diversi, fluidi o cinetici. A queste equazioni si applica un'analisi perturbativa, che conduce ad un sistema di equazioni linearizzate. Trattandosi appunto di un sistema lineare, è conveniente utilizzare una rappresentazione di Fourier, di cui vogliamo ora riassumere alcuni aspetti fondamentali, prima di passare alla discussione dei vari tipi di onde.

7.1 Rappresentazione di Fourier

Consideriamo dapprima una generica funzione $f(x)$ della coordinata spaziale x e la sua trasformata di Fourier, $\tilde{f}(k)$, definita da (vedi (??)) :

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (7.1)$$

$f(x)$ è detta *antitrasformata* di Fourier della $f(k)$ ed è evidentemente data da (vedi (6.14)) :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (7.2)$$

Per comprendere la relazione tra una funzione e la sua trasformata consideriamo dapprima lo speciale caso in cui la $f(x)$ è un'onda piana con lunghezza d'onda $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, infinitamente

estesa e di ampiezza costante:

$$f(x) = A e^{ik_0 x}.$$

La sua trasformata di Fourier è data da:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(k_0 - k)x} dx = \delta(k_0 - k),$$

Vediamo quindi che mentre la funzione non identifica nessuna particolare regione dello spazio delle x , la trasformata è localizzata con infinita precisione nello spazio delle k . Se volessimo prendere in esame una funzione maggiormente localizzata nello spazio delle x , potremmo considerare un "pacchetto d'onde", per esempio un pacchetto gaussiano:

$$f(x) = f_0 e^{-a^2 x^2} e^{ik_0 x}. \quad (7.3)$$

Si tratta sostanzialmente di un'oscillazione di lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k_0$ la cui ampiezza è modulata da una funzione gaussiana. Il parametro a è dà una misura della larghezza della gaussiana: nel punto $x_0 = 1/a$ il valore della gaussiana è pari a f_0/e . La trasformata di Fourier della (7.3) è data da:

$$\tilde{f}(k) = \frac{f_0}{2a\sqrt{\pi}} e^{-(k-k_0)^2/4a^2}. \quad (7.4)$$

Come si vede la trasformata è ancora una gaussiana, che vale $1/e$ del suo valore massimo in $k - k_0 = 2a$. Possiamo ora definire la regione di localizzazione del pacchetto come:

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle 2x \langle x \rangle \rangle + \langle \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= \langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

dove si è tenuto conto che $\langle x \rangle = 0$. Definendo in maniera analoga $\langle (\Delta k)^2 \rangle$. ed eseguendo gli integrali, si trova facilmente che

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle = 1/4.$$

Nel caso più generale di un pacchetto non gaussiano, si può dimostrare che la precedente uguaglianza si trasforma nella disuguaglianza:

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle \geq 1/4. \quad (7.6)$$

Possiamo riassumere questi risultati dicendo che tanto più una funzione è localizzata nello spazio delle x , tanto meno è localizzata la sua trasformata nello spazio delle k . Questa proprietà delle trasformate di Fourier ricorda da vicino il Principio di Indeterminazione di Heisenberg. Se infatti $f(x)$ rappresentasse la posizione di una particella, ricordando che in meccanica quantistica l'impulso è definito dalla relazione $p = \hbar k$ e moltiplicando la (7.6) per \hbar si vede che essa equivale a $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$.

Tutte le espressioni precedenti sono facilmente generalizzabili al caso in cui $f = f(\mathbf{r}, t)$:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega, \quad (7.7)$$

e

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt, \quad (7.8)$$

dove \mathbf{k} e ω sono quantità reali. La (7.7) rende evidente il significato fisico della trasformata di Fourier: la funzione data viene considerata come una sovrapposizione di "onde elementari", rappresentate dal fattore $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, con un'ampiezza data da $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$. La quantità

$$\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k \left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k - \frac{\omega}{k} t \right) \quad (7.9)$$

viene detta "fase" dell'onda.

La (7.2) mostra che per ogni onda elementare lo spazio e il tempo compaiono solo nella combinazione $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k - \frac{\omega}{k} t)$. I piani $\Phi = \text{costante}$ si muovono dunque nella direzione di \mathbf{e}_k con velocità

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k. \quad (7.10)$$

Per determinare $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$ è sufficiente conoscere la $f(\mathbf{r}, t)$ al tempo $t = 0$. Infatti, scrivendo $f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, 0) \delta(t)$ nell'integrando della (7.8), otteniamo un'espressione per le componenti di Fourier, che, introdotta nella (7.7), ci fornisce l'espressione di $f(\mathbf{r}, t)$ per $t \neq 0$.

Si può descrivere l'insieme di queste operazioni dicendo che l'ampiezza iniziale di ciascuna onda elementare è "trasportata" con la velocità di fase caratteristica di tale onda, data dalla (7.10). Ad ogni istante il profilo della $f(\mathbf{r}, t)$ viene "ricostruito" sommando il contributo di tutte le onde elementari. Poichè, in generale, la velocità di fase è diversa per le diverse onde elementari, il profilo "ricostruito" al tempo t risulterà modificato rispetto al profilo iniziale: è questo il fenomeno della dispersione. Se tuttavia la velocità di fase è la stessa per tutte le onde elementari, non si avrà distorsione del profilo.

Se esaminiamo criticamente la procedura descritta ci rendiamo però conto che da un lato non abbiamo mai specificato la dinamica del fenomeno e dall'altro non sappiamo quale significato attribuire al parametro ω quando determiniamo la $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$ a partire dalle condizioni iniziali, visto che ω di fatto scompare dal risultato dell'integrale nella (7.8). Questi due aspetti sono legati tra loro, come ora vedremo.

Abbiamo supposto che la $f(\mathbf{r}, t)$ sia la soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea nelle variabili \mathbf{r} e t . Essa conterrà dunque gli operatori ∇ e $\partial/\partial t$. Scrivendo la $f(\mathbf{r}, t)$ nella forma (7.7) ci si rende immediatamente conto che

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega \tilde{f}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega,$$

e, analogamente;

$$\nabla f = \int_{-\infty}^{\infty} (i\mathbf{k}\tilde{f})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d\mathbf{k} d\omega.$$

Dunque, a livello delle trasformate, gli operatori ∇ e $\partial/\partial t$ sono semplicemente i moltiplicatori $i\mathbf{k}$ e $-i\omega$. Questo risultato vale anche per applicazioni ripetute di tali operatori, $\partial^2 f/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2 \tilde{f}$, o per le formule del calcolo vettoriale se f è un vettore, $\nabla \cdot \mathbf{f} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{f}}$ e così via.

Di conseguenza, l'equazione differenziale omogenea nello spazio (\mathbf{r}, t) che possiamo scrivere simbolicamente nella forma:

$$D(\nabla, \partial/\partial t) f = 0, \quad (7.11)$$

nello spazio delle trasformate (\mathbf{k}, ω) diviene:

$$D(i\mathbf{k}, -i\omega) \tilde{f} = 0. \quad (7.12)$$

Nello spazio delle trasformate dobbiamo quindi risolvere un'equazione *algebraica* invece di un'equazione *differenziale*, ciò che rappresenta un indubbio vantaggio. D'altra parte, sappiamo che la condizione per avere una soluzione non identicamente nulla della (7.12) è

$$D(i\mathbf{k}, -i\omega) = 0.$$

La precedente equazione, detta *relazione di dispersione*, stabilisce il legame tra ω e \mathbf{k} di cui avevamo bisogno. In generale, la relazione di dispersione possiede un numero finito di soluzioni discrete (dette *modi normali*):

$$\omega = \omega_\alpha(\mathbf{k}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (7.13)$$

Possiamo introdurre formalmente la condizione $D(i\mathbf{k}, -i\omega) = 0$ nella (7.7) scrivendo:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha=1}^N \tilde{f}_\alpha(\mathbf{k}) \delta[\omega - \omega_\alpha(\mathbf{k})],$$

con le ω_α date dalla (7.13). Eseguendo l'integrale in $d\omega$ nella (7.7) troviamo che la soluzione generale del nostro problema può essere scritta nella forma:

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_\alpha(\mathbf{k})t]} d\mathbf{k}. \quad (7.14)$$

I risultati precedenti si generalizzano facilmente al caso in cui si debbano considerare grandezze vettoriali. La (7.11) in tal caso diviene

$$D(\nabla, \partial/\partial t) \mathbf{f} = 0,$$

dove D è un tensore e la (7.12) si scrive ora

$$\tilde{D}(i\mathbf{k}, -i\omega) \text{vec} \tilde{\mathbf{f}} = 0.$$

La condizione per avere soluzioni non nulle, cioè la relazione di dispersione, è ora data da :

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \text{Det}[\tilde{D}(i\mathbf{k}, -i\omega)] = 0. \quad (7.15)$$

Ad ogni soluzione della relazione di dispersione è associato un *autovettore* $\tilde{\mathbf{f}}$ che caratterizza quel particolare modo di propagazione.

7.1.1 Velocità di fase e velocità di gruppo

Abbiamo definito la velocità di fase come la velocità di propagazione delle onde elementari, $\mathbf{v}_f = (\omega/k)\mathbf{e}_k$. E' facile rendersi conto che questa velocità non può essere associata ad alcun effetto fisico, in particolare alla trasmissione di segnali o al trasferimento di energia. Infatti, le onde elementari hanno un'ampiezza costante e sono infinitamente estese nello spazio. Quindi il loro "moto" con velocità \mathbf{v}_f non può produrre nulla di fisicamente osservabile, poichè la situazione rimane identica a s stessa al passare del tempo. Quindi, anche se la velocità di fase divenisse maggiore di c , questo non costituirebbe una violazione dei principi della relatività, che stabiliscono che la velocità della luce è un limite superiore per la velocità di qualunque *segnale*.

Diverso è il caso di un pacchetto d'onde che distingue una particolare regione dello spazio dalle altre. Un eventuale movimento del pacchetto sarà quindi osservabile e potrà essere associato a effetti fisici. La velocità con cui si muove un pacchetto d'onde è detta *velocità di gruppo*. Per ottenere un'espressione della velocità di gruppo, consideriamo un pacchetto che rappresenti un treno d'onde di lunghezza finita, quale, ad esempio, il pacchetto gaussiano considerato in precedenza. Supponiamo inoltre che lo "spettro" del pacchetto, cioè l'insieme dei vettori d'onda che lo rappresentano nello spazio delle k , presenti un picco nell'intorno di un particolare valore k_0 . Nel caso del pacchetto gaussiano, questo avviene quando $a/k_0 \ll 1$. Se questo avviene per uno dei modi normali, l'integrale nella (7.14) riceverà un contributo solo dai valori di k vicini a k_0 e questo ci autorizza a sviluppare in serie di Taylor intorno a k_0 la quantità $\omega_\alpha(\mathbf{k})$ che compare in tale integrale. Limitandoci ai termini del primo ordine scriveremo, omettendo il pedice α ,

$$\omega(\mathbf{k}) \simeq \omega(\mathbf{k}_0) + \sum_i (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)_i \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right|_{\mathbf{k}_0} = \omega_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{v}_g,$$

dove si è introdotta la quantità

$$\mathbf{v}_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}_0}. \quad (7.16)$$

La (7.14) (limitandoci ad un solo termine della somma) può ora essere scritta nella forma

$$f(\mathbf{r}, t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{v}_g t)} d\mathbf{k} \right] e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t}.$$

L'espressione in parentesi quadra rappresenta una generica funzione della variabile $(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t)$ e in definitiva potremo scrivere

$$f(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t}.$$

Questa equazione mostra che per ogni modo d'onda (scelto cioè il valore del parametro α nella (7.14)) la soluzione consiste in un'onda piana infinita, corrispondente ad un vettore d'onda k_0 e frequenza ω_0 che si propaga con la *velocità di fase*, $\mathbf{v}_f = (\omega_0/k_0)\mathbf{e}_k$, la cui ampiezza è modulata dalla funzione $A(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t)$, che si propaga con la *velocità di gruppo*, $\mathbf{v}_g = (\partial \omega / \partial \mathbf{k})_{k_0}$. La velocità di gruppo può essere identificata con la velocità di propagazione dell'energia e pertanto deve risultare $v_g < c$.

7.2 Onde in regime MHD ideale

La base di partenza per lo studio delle onde in regime MHD è costituita dalle equazioni MHD linearizzate, (4.2), (6.9), (6.10), (6.4) e (6.12). Se le sole forze agenti sul sistema sono le forze di pressione e quelle magnetiche, potremo porre $\mathbf{f}_1 = 0$ nella (6.12). Se inoltre supponiamo che lo stato imperturbato sia omogeneo, potremo eseguire una trasformata di Fourier sia sulle variabili spaziali che sul tempo ottenendo il seguente sistema di equazioni per le trasformate (dove, per semplicità di notazione, abbiamo indicato con f invece che \tilde{f} la trasformata di Fourier della generica grandezza f)

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -i\rho_0(\mathbf{k} \cdot \xi) \\ P_1 &= -i\rho_0 c_s^2(\mathbf{k} \cdot \xi) \\ \mathbf{B}_1 &= i\mathbf{k} \times (\xi \times \mathbf{B}_0) \\ -\omega^2 \rho_0 \xi &= -i\mathbf{k}P_1 + \frac{i}{4\pi}[(\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0]\end{aligned}\tag{7.17}$$

Sostituendo le espressioni per P_1 e B_1 nell'ultima delle (7.17) si ottiene un'equazione per la sola ξ :

$$\omega^2 \rho_0 \xi = \rho_0 c_s^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \xi) + \frac{1}{4\pi} \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\xi \times \mathbf{B}_0)] \times \mathbf{B}_0 \}\tag{7.18}$$

Scrivendo $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_b$ e introducendo la velocità di Alfvén: $c_a^2 = B_0/(4\pi\rho_0)$ si ottiene infine:

$$\omega^2 \xi = c_s^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \xi) + c_a^2 \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\xi \times \mathbf{e}_b)] \times \mathbf{e}_b \}\tag{7.19}$$

7.2.1 Onde magnetiche

Consideriamo dapprima per semplicità il caso in cui gli effetti della comprimibilità, rappresentati dalla presenza di c_s^2 , siano trascurabili. Sviluppando successivamente i tripli prodotti vettoriali contenuti nella (7.19) si ottiene la seguente espressione:

$$\omega^2 \xi = c_a^2 \{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)^2 \xi + [(\mathbf{k} \cdot \xi) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)(\xi \cdot \mathbf{e}_b)] \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \xi)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \}.\tag{7.20}$$

Moltiplicando scalarmente la (7.20) per \mathbf{e}_b si vede che

$$\xi \cdot \mathbf{e}_b = 0,$$

cioè che gli spostamenti, e quindi le velocità, delle particelle sono perpendicolari alla direzione del campo magnetico \mathbf{B}_0 . Introducendo questa condizione nella (7.20) e moltiplicandola scalarmente per \mathbf{k} si ottiene

$$(\omega^2 - k^2 c_a^2)(\mathbf{k} \cdot \xi) = 0.\tag{7.21}$$

La precedente equazione ha due possibili soluzioni: $\mathbf{k} \cdot \xi = 0$ oppure $\omega^2 = k^2 c_a^2$, che ora esamineremo.

$\mathbf{k} \cdot \xi = 0$, onde di Alfvén

La condizione $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, equivalente nello spazio ordinario a $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, implica che le perturbazioni sono incomprimibili. Naturalmente, ciò non significa che il *plasma* sia incomprimibile, ma semplicemente che le perturbazioni non provocano variazioni di densità. Introducendo questa condizione nella (7.20) otteniamo la relazione di dispersione:

$$\omega^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)^2 c_a^2 = k^2 c_a^2 \cos^2 \theta, \quad (7.22)$$

dove θ è l'angolo tra il vettore di propagazione \mathbf{k} e la direzione del campo magnetico imper turbato \mathbf{B}_0 . Moltiplicando scalarmente per \mathbf{e}_b la terza delle (7.17) si vede che

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{e}_b = 0, \quad (7.23)$$

che mostra come anche le perturbazioni magnetiche siano perpendicolari alla direzione del campo magnetico \mathbf{B}_0 . Queste onde, dette *onde di Alfvén* sono quindi delle onde *trasversali* per quel che riguarda sia gli spostamenti che il campo magnetico.

La relazione di dispersione per le onde di Alfvén, mostra che la loro velocità di fase

$$\mathbf{v}_f = (\omega/k)\mathbf{e}_k = \pm(c_a \cos \theta)\mathbf{e}_k$$

dipende dall'angolo di propagazione rispetto a \mathbf{B}_0 . Poichè nella relazione di dispersione (7.22) compare solo la componente di \mathbf{k} lungo la direzione di \mathbf{B}_0 , la velocità di gruppo è diretta come \mathbf{e}_b ,

$$\mathbf{v}_g = \pm c_a \mathbf{e}_b$$

. Si vede da qui che anche se l'onda di Alfvén si propaga in una direzione diversa da quella di \mathbf{B}_0 , l'energia associata all'onda si propaga lungo \mathbf{B}_0 . Utilizzando ancora una volta l'espressione per \mathbf{B}_1 data dalla (7.17), la condizione (7.23) e la relazione di dispersione (??) si ricava facilmente una relazione tra la velocità, $\mathbf{U} = (\partial \boldsymbol{\xi} / \partial t) \rightarrow -i\omega \boldsymbol{\xi}$ e la perturbazione del campo magnetico \mathbf{B}_1 :

$$\frac{\mathbf{B}_1}{B_0} = \pm \frac{\mathbf{U}}{c_a}. \quad (7.24)$$

Questa relazione caratterizza in maniera precisa le onde di Alfvén. Dalla precedente equazione segue che il rapporto tra l'energia cinetica e l'energia magnetica dell'onda:

$$\frac{E_{cin}}{e_{mag}} = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 U^2}{B_0/8\pi} = 1,$$

e quindi in un'onda di Alfvén l'energia si equipartisce tra le due forme cinetica e magnetica.

L'origine fisica delle onde di Alfvén può essere intuita considerando la forma della forza magnetica linearizzata, \mathbf{F}_1 :

$$\mathbf{F}_1 \propto (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\mathbf{B}_1 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1)\mathbf{k}.$$

Il primo termine di questa equazione è legato alla tensione magnetica, mentre il secondo è connesso con la pressione magnetica (come si capisce facilmente considerando che è la forma linearizzata del termine $\nabla(B^2/8\pi)$). Poichè quest'ultimo termine è nullo a causa della (7.24),

se ne conclude che le onde di Alfvén sono un effetto della tensione magnetica. In realtà esse presentano delle forti analogie con le onde (trasversali!) che si generano in una corda elastica pizzicata, come avviene in uno strumento musicale. Si sa che in questo caso la velocità di fase delle onde che si propagano su una corda vibrante sono date da $v_f = \sqrt{T}/\sigma$, dove T è la tensione della corda e σ è la densità di massa lineare, cioè la massa per unità di lunghezza. Scrivendo $\sigma = \rho_0 S$, con S pari alla sezione della corda e $T = (B_0^2/4\pi)S$, si ottiene $v_p = c_a$. Questo risultato è in accordo con l'osservazione fatta nel Capitolo 5 sull'analogia tra una linea di forza del campo magnetico ed una corda elastica.

Una particolarità unica delle onde di Alfvén è quella di essere soluzione anche delle equazioni non linearizzate. In altre parole, se consideriamo una perturbazione $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ senza supporre $|B_1| \ll |B_0|$ con le condizioni:

$$|\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1| = \text{costante} \quad , \quad \frac{\mathbf{B}_1}{B_0} = \pm \frac{\mathbf{U}}{c_a},$$

essa risulta essere una soluzione esatta delle equazioni MHD. Questo significa che se vengono osservate perturbazioni di velocità e campo magnetico, anche di grande ampiezza, legate dalla relazione precedente esse possono essere identificate come onde di Alfvén non lineari. Il passaggio dell'onda viene percepito come una rotazione di un campo magnetico con modulo costante. Un fenomeno di questo tipo è stato osservato nel vento solare.

$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} \neq 0$, onde di Alfvén comprimibili

Se $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} \neq 0$ la soluzione della (7.21) è semplicemente

$$\omega^2 = k^2 c_a^2. \quad (7.25)$$

Si tratta quindi di onde comprimibili con velocità di fase e velocità di gruppo isotrope ed uguali tra loro: $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_g = \pm c_a \mathbf{e}_k$.

Poichè la condizione $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b = 0$ vale sempre e ora $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_k \neq 0$, ne segue che $\boldsymbol{\xi}$ è un vettore che giace nel piano definito da \mathbf{B}_0 e \mathbf{k} , ma è normale a \mathbf{B}_0 . È interessante notare che nel caso di propagazione perpendicolare a \mathbf{B}_0 ($\theta = \pi/2$), $\boldsymbol{\xi}$ è diretto come \mathbf{k} e quindi l'onda diviene un'onda *longitudinale*, mentre per propagazione parallela a \mathbf{B}_0 , ($\theta = 0$, $\mathbf{e}_k \parallel \mathbf{e}_b$), $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b = 0$ implica $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_k = 0$ e l'onda diviene *trasversale* e incomprimibile ed è quindi indistinguibile da un'onda di Alfvén.

7.2.2 Onde magnetosoniche

Reintroduciamo ora gli effetti della comprimibilità del mezzo, utilizzando la forma completa della (7.19) e sviluppiamo i tripli prodotti vettoriali.. La (7.20) diviene quindi

$$\omega^2 \boldsymbol{\xi} = c_s^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{k} + c_a^2 \{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)^2 \boldsymbol{\xi} + [(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b)] \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \}. \quad (7.26)$$

Seguendo lo stesso procedimento adottato per le onde magnetiche, moltiplichiamo scalarmente la precedente equazione per \mathbf{e}_b e per \mathbf{k} , ottenendo

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b) = c_s^2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b), \quad (7.27)$$

e

$$[\omega^2 - k^2(c_s^2 + c_a^2)](\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) = -k^2 c_a^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b). \quad (7.28)$$

Se $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) = 0$, la (7.27) implica che anche $(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_b) = 0$ e, utilizzando questi risultati nella (7.26), ritroviamo la relazione di dispersione per le onde di Alfvén, (7.22), $\omega^2 = k^2 c_a^2 \cos^2 \theta$. Le onde di Alfvén (incomprimibili!) sono quindi una soluzione anche nel caso in cui la comprimibilità del mezzo viene tenuta in conto.

Se $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \neq 0$, possiamo moltiplicare la (7.28) per $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_b)$ e utilizzare la (7.27) per ottenere la seguente equazione:

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 + c_a^2) + c_s^2 c_a^2 k^4 \cos^2 \theta = 0. \quad (7.29)$$

Le due soluzioni (in ω^2) della precedente equazione forniscono le relazioni di dispersione delle *onde magnetosoniche* (o *magnetoacustiche*)

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[(c_s^2 + c_a^2) \pm \sqrt{c_s^4 + c_a^4 - 2c_s^2 c_a^2 \cos 2\theta} \right]. \quad (7.30)$$

I due modi corrispondenti rispettivamente al segno più e al segno meno nella (7.30) sono detti onda magnetosonica veloce e onda magnetosonica lenta. L'onda di Alfvén, come si vede, ha una velocità di fase intermedia tra le due.

Le caratteristiche di propagazione dipendono dal rapporto c_s^2/c_a^2 . Infatti, per propagazione parallela al campo magnetico \mathbf{B}_0 , ω/k tende a c_s per l'onda veloce e a c_a per l'onda lenta se $c_s > c_a$, mentre la situazione si inverte se $c_s < c_a$. Riassumendo, possiamo dire che quando $\theta \rightarrow 0$, la velocità di fase dell'onda veloce tende al maggiore dei due valori c_s e c_a e la velocità di fase dell'onda lenta tende al minore dei due. Quando θ tende a $\pi/2$, la velocità di fase dell'onda lenta tende a zero, mentre quella dell'onda veloce tende a $(c_s^2 + c_a^2)^{1/2}$.

7.3 Onde fluide in regime non-MHD

Nel paragrafo precedente abbiamo determinato quali sono i modi d'onda in regime MHD. Nonostante che le soluzioni trovate siano soluzioni esatte, esse sono soggette alle stesse limitazioni di validità delle equazioni da cui sono state dedotte. Ricordando la discussione del Capitolo 5, dove si è mostrato che il regime MHD è un regime di *basse frequenze*, è naturale chiedersi come si trasformano i modi d'onda all'aumentare della frequenza, pur rimanendo nell'ambito dei modelli fluidi ideali, cioè con conducibilità elettrica infinita. Come regola generale possiamo dire che le equazioni MHD sono valide per valori inferiori alla minore delle frequenze caratteristiche dei plasm. Se consideriamo valori tipici di tali frequenze, per esempio nelle condizioni prevalenti nella corona solare quieta, $n_e \simeq n_p \simeq 10^8 \text{ cm}^{-3}$, $B \lesssim$

$10G$, otteniamo $\omega_{pe} \simeq 5.6 \times 10^8 s^{-1}$, $\omega_{ce} \simeq 1.8 \times 10^8 s^{-1}$, $\omega_{pi} \simeq 1.3 \times 10^7 s^{-1}$, $\omega_{ci} \simeq 9.6 \times 10^4 s^{-1}$. Nelle onde magnetosoniche, $\omega \propto k$ e quindi per k sufficientemente grande ω finisce per superare il limite di validità delle equazioni MHD.

7.3.1 frequenze intermedie: $\omega \lesssim \omega_{ce}$

Per capire quali sono le modifiche da apportare in un regime di frequenze più elevate, riprendiamo la discussione degli ordini di grandezza dei vari termini che compaiono nell'equazione di Ohm generalizzata (??), limitandoci al caso di un plasma "freddo" cioè in cui i termini legati ai gradienti di pressione siano trascurabili. E' facile allora verificare che il primo termine che va mantenuto quando la frequenza aumenta è il termine di Hall, cioè quello proporzionale a $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Infatti, un semplice calcolo dimensionale dimostra che il rapporto tra questo termine ed il termine ideale $(1/c)(\mathbf{U} \times \mathbf{B})$, vale $(c/\mathcal{U})^2 \omega \omega_{ce} / \omega_{pe}^2$. Riprendendo l'esempio della corona solare e supponendo che sia $\mathcal{U} \simeq 0.01c$ si vede che i due termini sono paragonabili già per $\omega \simeq \omega_{ci}$.

Nonostante sia possibile studiare analiticamente le onde in un plasma freddo per angoli arbitrari di propagazione rispetto al campo magnetico, ci limiteremo al caso della propagazione parallela, assai più semplice, ma che permette tuttavia di apprezzare le modifiche nei modi dovute alla presenza di frequenze più elevate di quelle del regime MHD.

Poniamo dunque $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_b$, $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_b$ e osserviamo che la condizione $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$, cioè $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ implica nel nostro caso $\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{B}_1 = 0$. Usiamo ora le equazioni MHD linearizzate, senza tuttavia introdurre lo spostamento lagrangiano ξ . Eseguendo, come sempre, le trasformate di Fourier avremo:

$$\omega \mathbf{U} = -\frac{c_a^2}{B_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{e}_b = -\frac{kc_a^2}{B_0} [\mathbf{B}_1 - (\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{B}_1) \mathbf{e}_b] = -\frac{kc_a^2}{B_0} \mathbf{B}_1.$$

L'equazione di Ohm generalizzata con il termine Hall incluso diviene:

$$\omega \mathbf{B}_1 + k \mathbf{e}_b \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}_0) = \frac{i B_0 k^2}{4\pi n_0 e} \mathbf{e}_b \times [(\mathbf{e}_b \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{e}_b].$$

Utilizzando la precedente espressione per \mathbf{U} ed eseguendo i prodotti vettoriali otteniamo infine:

$$(\omega^2 - k^2 c_a^2) \mathbf{B}_1 - i(\omega/\omega_{ci}) k^2 c_a^2 (\mathbf{e}_b \times \mathbf{B}_1) = 0. \quad (7.31)$$

Scegliendo l'asse z lungo \mathbf{B}_0 ($\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_z$) e scrivendo la (7.31) per componenti avremo:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2 c_a^2) B_{1x} + i(\omega/\omega_{ci}) k^2 c_a^2 B_{1y} &= 0 \\ (\omega^2 - k^2 c_a^2) B_{1y} - i(\omega/\omega_{ci}) k^2 c_a^2 B_{1x} &= 0 \\ (\omega^2 - k^2 c_a^2) B_{1z} &= 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

Se $B_{1z} \neq 0$, dovrà essere $\omega^2 = k^2 c_a^2$ e di conseguenza $B_{1x} = B_{1y} = 0$. Se invece $B_{1z} = 0$, la soluzione del problema si ottiene annullando il determinante dei coefficienti del sistema

formato dalle prime due equazioni nella (7.32):

$$(\omega^2 - k^2 c_a^2)^2 - (\omega/\omega_{ci})^2 k^4 c_a^4 = \left[\omega^2 - k^2 c_a^2 + (\omega/\omega_{ci}) k^2 c_a^2 \right] \left[\omega^2 - k^2 c_a^2 - (\omega/\omega_{ci}) k^2 c_a^2 \right] = 0,$$

e il sistema si divide in due separate equazioni di secondo grado per ω , ognuna delle quali ha una sola radice positiva. Consideriamo dapprima l'equazione

$$\omega^2 - k^2 c_a^2 + (\omega/\omega_{ci}) k^2 c_a^2 = 0,$$

la cui radice positiva è

$$\omega = \frac{1}{2\omega_{ci}} \left(-k^2 c_a^2 + \sqrt{k^4 c_a^4 + 4k^2 c_a^2 \omega_{ci}^2} \right).$$

I valori limite per piccoli e grandi valori di k di sono:

$$\omega \simeq k c_a \quad (k \rightarrow 0), \quad \text{e} \quad \omega \simeq \omega_{ci} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Passando ora alla soluzione dell'equazione:

$$\omega^2 - k^2 c_a^2 - (\omega/\omega_{ci}) k^2 c_a^2 = 0,$$

avremo

$$\omega = \frac{1}{2\omega_{ci}} \left(k^2 c_a^2 + \sqrt{k^4 c_a^4 + 4k^2 c_a^2 \omega_{ci}^2} \right),$$

con i valori limite,

$$\omega \simeq k c_a \quad (k \rightarrow 0), \quad \text{ma} \quad \omega \simeq \frac{k^2 c_a^2}{\omega_{ci}} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Vediamo dunque che i modi hanno la stessa relazione di dispersione per $k \rightarrow 0$, cioè per basse frequenze, in accordo con i risultati per le onde MHD in propagazione parallela (vedi (7.22) e (7.25)). Tuttavia, per grandi valori di k le due relazioni di dispersione differiscono marcatamente: nel primo caso la frequenza rimane finita e tende ad ω_{ci} , mentre nell'altro caso sembra divergere quadraticamente con k . In realtà non possiamo applicare la nostra trattazione per valori di k (e quindi di ω) troppo grandi perchè essa tien conto solo del termine Hall nell'equazione per \mathbf{B} ed è facile vedere che questa approssimazione cessa di valere per valori di ω sensibilmente maggior di ω_{ci} .

Prima di esaminare quel che succede a frequenze più alte, è interessante determinare la caratteristiche delle soluzioni per i due modi d'onda. Se consideriamo la prima delle due soluzioni quando $k \rightarrow \infty$, e sostituiamo quindi ω con ω_{ci} nelle (7.32), otteniamo

$$-B_{1x} + i B_{1y} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{i B_{1y}}{B_{1x}} = 1.$$

Queste relazione caratterizza onde polarizzate circolarmente con un verso di rotazione orario guardando in direzione antiparallela a quella di \mathbf{B}_0 . Per verificarlo, ricordiamo che le quantità B_{1x} e B_{1y} che compaiono nelle precedenti equazioni sono in realtà le componenti di

Fourier delle corrispondenti grandezze fisiche. Ripristinando la consueta notazione \tilde{f} per la trasformata di Fourier della generica grandezza f , riscriviamo la condizione trovata come

$$\tilde{B}_{1y} = -i\tilde{B}_{1x}.$$

Ma

$$B_{1x} = \Re(\tilde{B}_{1x}) = |B_1| \cos \omega t$$

e

$$B_{1y} = \Re(\tilde{B}_{1y}) = -\Re(i\tilde{B}_{1x}) = -|B_1| \sin \omega t,$$

dove $|B_1|$ è il modulo del vettore \mathbf{B}_1 . Ricordando l'equazione di Maxwell per $\nabla \times \mathbf{E}$, ($\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{E}} \propto \mathbf{B}_1$), vediamo che la stessa relazione sussiste tra le componenti di \tilde{E} . Quindi

$$E_x = |E| \cos \omega t \quad ; \quad E_y = -|E| \sin \omega t.$$

Al tempo $t = 0$ il campo è diretto lungo x . All'aumentare di t , E_x diminuisce mantenendo valori positivi, mentre E_y assume valori negativi, mostrando appunto che il vettore \mathbf{E} compie una rotazione nel senso indicato. Ricordando la discussione del Capitolo 2, vediamo che questo è anche il verso di rotazione delle particelle *positive* sotto l'azione del campo \mathbf{B}_0 . Quindi il verso di rotazione del campo elettrico dell'onda coincide con quello di rotazione degli ioni, ciò che giustifica il nome di *onde di ciclotrone ioniche* attribuito a questo modo. E' chiaro che in queste circostanze si instaura una situazione di *risonanza* tra l'onda e gli ioni positivi che ne esalta l'interazione.

Ripetendo il procedimento per la seconda soluzione otteniamo:

$$B_{1x} + iB_{1y} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{iB_{1y}}{B_{1x}} = -1,$$

e in questo caso il verso di rotazione è concorde con quello degli elettroni. Non è quindi sorprendente che la teoria esatta per questo tipo di onde mostri che quando $k \rightarrow \infty$ la frequenza tenda a ω_{ce} e che si instauri una risonanza tra l'onda e gli elettroni. Per valori intermedi di ω , $\omega_{ce} \ll \omega \ll \omega_{ci}$, l'onda (detta con termine inglese *whistler*) obbedisce alla relazione di dispersione

$$\omega \simeq \frac{k^2 c^2 \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2}$$

7.3.2 alte frequenze: $\omega \simeq \omega_{pe}$

Ancora una volta ci limiteremo a considerare un caso semplice, cioè quello di un plasma freddo non magnetizzato. Poichè stiamo considerando il caso di alte frequenze, non potremo più trascurare la corrente di spostamento nell'equazione di Maxwell per $\nabla \times \mathbf{B}$. In cambio, possiamo supporre che gli ioni, a causa della loro massa, molto maggiore di quella degli elettroni, non siano in grado di seguire le oscillazioni su scale temporali $\simeq \omega^{-1}$ e quindi

rimangano immobili, fornendo semplicemente la carica necessaria alla quasi-neutralità del plasma. La nostra descrizione si riferirà dunque alla sola componente elettronica. Le nostre equazioni saranno dunque

$$\begin{aligned} -i\omega\mathbf{u} &= -\frac{e}{m_e}\mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \frac{\omega}{c}\mathbf{B}_1, \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_1 - i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

dove \mathbf{u} è la velocità degli elettroni e $\mathbf{J}_1 = -en_0\mathbf{u}$. Nelle precedenti equazioni tutte le grandezze sono trasformate di Fourier. Combinando le precedenti equazioni, si arriva senza difficoltà al sistema:

$$(\omega_{pe}^2 - \omega^2 + k^2c^2)\mathbf{E} = c^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k}. \quad (7.34)$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{k} la precedente relazione otteniamo:

$$(\omega_{pe}^2 - \omega^2)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (7.35)$$

che mostra come siano possibili due tipi di onde, a seconda che sia $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \neq 0$ oppure $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0$.

Nel primo caso

$$\omega = \omega_{pe},$$

e, introducendo questa relazione nella (7.34) si vede che \mathbf{E} è diretto lungo \mathbf{k} . La prima delle (7.33) ci assicura che anche \mathbf{u} è parallelo a \mathbf{k} e quindi si tratta quindi di un'onda *longitudinale*, il cui campo magnetico associato $\mathbf{B}_1 = 0$, come mostra la seconda delle (7.33). Queste onde sono quindi delle onde *elettrostatiche* e vengono dette *onde di plasma* o *onde di Langmuir*.

Nel limite di plasma freddo fin qui trattato, queste onde non si propagano e sono quindi delle oscillazioni stazionarie che sono semplicemente la manifestazione della reazione del plasma a violazioni locali della neutralità di carica. Infatti, poichè $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \neq 0$, l'equazione per la $\nabla \cdot \mathbf{E}$, $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 4\pi q = -4\pi en_1$ ci dice che si forma una densità di carica non nulla.

L'introduzione degli effetti termici cambia questa situazione come si può vedere introducendo il termine proporzionale al gradiente di pressione nell'equazione per il fluido di elettroni. In questo caso si ha:

$$m_en_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P_1 - en_0\mathbf{E} = \gamma c_s^2\nabla\rho_1 - en_0\mathbf{E},$$

dove si è usata la definizione

$$c_s^2 = \frac{k_B T}{m},$$

e si è indicata con k_B la costante di Boltzmann per evitare confusioni con il modulo del vettore d'onda \mathbf{k} . Utilizzando l'equazione di continuità per eliminare ρ_1 ed eseguendo le trasformate di Fourier, si ottiene:

$$\omega^2\mathbf{u} = \gamma k^2 c_s^2\mathbf{u} - i e\omega\mathbf{E}.$$

Poichè stiamo trattando il caso di onde longitudinali, la precedente equazione ha componenti non nulle solo nella direzione di \mathbf{e}_k . Scriveremo dunque:

$$(\omega^2 - \gamma k^2 c_s^2)u = -i \frac{e}{m_e} \omega E = -\omega_{pe}^2 u,$$

utilizzando la terza delle (7.33) (con $\mathbf{B}_1 = 0$) e la definizione di $\mathbf{J}_1 = -en_0 \mathbf{u}$. Si arriva così alla relazione di dispersione:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma k^2 c_s^2.$$

Vediamo quindi che in un plasma "caldo" l'onda longitudinale si propaga, ma solo per frequenze superiori alla frequenza di plasma, $\omega > \omega_{pe}$. Quando $\omega \gg \omega_{pe}$, la velocità di fase tende a γc_s . Il valore di γ è legato al numero di gradi di libertà, s , delle particelle che compongono il plasma, $\gamma = 1 + 2/s$. Nel nostro caso il moto delle particelle è strettamente unidimensionale, perchè le oscillazioni avvengono lungo \mathbf{e}_k ed abbiamo trascurato l'effetto delle collisioni che potrebbero diffondere gli elettroni anche nelle altre direzioni. Quindi $s = 1$ e di conseguenza $\gamma = 3$. La forma finale della relazione di dispersione è quindi:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 c_s^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 \left(\frac{k_B T}{m_e} \right). \quad (7.36)$$

Esaminiamo ora la seconda delle soluzioni della (7.35), cioè quella per cui

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

In questo caso la (7.34) fornisce immediatamente la relazione di dispersione

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (7.37)$$

Inoltre, il campo magnetico $\mathbf{B}_1 = (\omega/c)(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \neq 0$ e forma una terna ortogonale con \mathbf{E} e \mathbf{k} . Come si vede si tratta di onde *elettromagnetiche trasversali*, che rappresentano la generalizzazione delle consuete onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto. La loro velocità di fase è

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + (\omega_{pe}^2 / k^2 c^2)},$$

ed è quindi maggiore di c . Come abbiamo già notato questo non costituisce un problema. Possiamo comunque verificare che la velocità di gruppo $v_g < c$. Infatti

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_f} < c.$$

Anche queste onde si propagano solo per frequenze $\omega > \omega_{pe}$ e questa circostanza ha una grande importanza nelle trasmissioni radio. Infatti, le onde elettromagnetiche di bassa frequenza che si propagano nell'atmosfera terrestre quando raggiungono lo strato esterno dell'atmosfera stessa, che è costituito da un gas *ionizzato* (la cosiddetta *ionosfera*), possono trovarsi nella situazione $\omega < \omega_{pe}$ e quindi non possono propagarsi ulteriormente. Esse vengono riflesse totalmente verso il basso e questo permette il collegamento via radio di punti sulle superficie terrestre che non sono "in vista" l'uno dell'altro.

7.4 Onde in regime cinetico: lo smorzamento di Landau

Studieremo ora un fenomeno di grande interesse che ci permetterà di comprendere meglio la fisica microscopica dei plasmi e le relazioni che intercorrono tra i modelli cinetici ed i modelli fluidi. Finora ci siamo occupati della descrizione di onde partendo da modelli fluidi in vari regimi: MHD, un fluido o due fluidi. Ovviamente, quando i modelli fluidi non sono applicabili è necessario tornare alla più generale descrizione cinetica ed i fenomeni ondosi possono essere analizzati anche in questo tipo di schema. Nel 1946 Landau studiò appunto il problema della propagazione di onde elettrostatiche in un plasma *non collisionale* e dimostrò che l'ampiezza di tali onde inevitabilmente diminuisce col tempo. Questo risultato è assai sorprendente perchè siamo abituati a considerare che lo smorzamento di un'onda sia dovuto alla presenza di processi dissipativi che, in ultima analisi, sono legati alla presenza di collisioni.

Come abbiamo già visto nel Capitolo xxx, un plasma non collisionale è descritto dall'equazione di Vlasov, che sarà quindi la base di partenza del nostro studio. Supporremo che il plasma sia omogeneo, che il campo magnetico all'equilibrio sia nullo e che gli ioni rimangano immobili e abbiano quindi semplicemente la funzione di mantenere la neutralità di carica. In queste ipotesi, possiamo limitarci a risolvere l'equazione di Vlasov per la sola funzione di distribuzione degli elettroni, che in dicheremo con $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. In analogia a quanto fatto nel caso fluido, considereremo una situazione di equilibrio, rappresentata da f_0 ed una perturbazione f_1 , con $|f_1| \ll |f_0|$. Nella situazione imperturbata il campo elettrico deve essere nullo, altrimenti le particelle del plasma sarebbero sottoposte ad una accelerazione continua e non si potrebbe raggiungere una situazione di equilibrio. E' quindi chiaro che qualunque funzione arbitraria della velocità, $f_0 = f_0(\mathbf{v})$, è una soluzione dell'equazione di Vlasov all'ordine zero:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

Nel seguito supporremo che f_0 sia la funzione di distribuzione maxwelliana:

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right).$$

La funzione di distribuzione degli elettroni si scriverà come:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

e la forma linearizzata dell'equazione di Vlasov sarà quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{eE}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (7.38)$$

dove m è la massa dell'elettrone e si è tenuto conto che il campo elettrico è una quantità del primo ordine. Alla precedente equazione va accoppiata l'equazione per il campo elettrico :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi q = -4\pi e \int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

Siccome il mezzo imperturbato è omogeneo, potremo eseguire una trasformata di Fourier rispetto alle coordinate spaziali scrivendo:

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int \tilde{f}_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

La trasformata della (7.38) assume dunque la forma:

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \tilde{f}_1 - \frac{e \tilde{\mathbf{E}}}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (7.39)$$

Poichè considereremo solo il caso di onde elettrostatiche longitudinali,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \Rightarrow \quad i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = 0,$$

possiamo scegliere un sistema di riferimento in cui:

$$\mathbf{k} = [k, 0, 0], \quad \tilde{\mathbf{E}} = [\tilde{E}, 0, 0], \quad \mathbf{v} = [u, v_y, v_z].$$

Nel seguito supporremo sempre $k > 0$, a meno che non sia esplicitamente indicato il contrario. La soluzione del problema si determina risolvendo in primo luogo le equazioni per le trasformate di Fourier

$$\frac{\partial \tilde{f}_1(k, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + iku \tilde{f}_1(k, \mathbf{v}, t) - \frac{e \tilde{E}}{m} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial u} = 0 \quad (7.40)$$

e

$$ik\tilde{E}(k, t) = -4\pi e \int \tilde{f}_1(k, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (7.41)$$

e passando poi alle antitrasformate.

Per quel che riguarda la dipendenza dal tempo, potremmo eseguire una trasformata di Fourier anche rispetto a questa variabile, visto che lo stato imperturbato è stazionario. Se tuttavia supponiamo che la nostra perturbazione sia applicata al tempo $t = 0$ è preferibile, seguendo il procedimento originale di Landau, eseguire una trasformata di Laplace rispetto al tempo, di cui ricordiamo brevemente alcune delle principali proprietà.

Data una generica funzione del tempo $g(t)$, la sua trasformata di Laplace è definita da:

$$\hat{g}(p) = \int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt,$$

dove p è un numero complesso, con $\Re p > 0$. La teoria delle trasformate di Laplace dimostra che l'antitrasformata si ottiene eseguendo un'integrazione lungo una linea parallela all'asse immaginario di p che si trovi *alla destra* di tutte le singolarità della $\hat{g}(p)$:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{g}(p) e^{pt} dp.$$

Si osservi che formalmente la trasformata di Laplace è equivalente ad una trasformata di Fourier in cui si sia effettuata la sostituzione $-i\omega \rightarrow p$.

L'uso della trasformata di Laplace si rivela particolarmente utile quando si voglia risolvere un'equazione differenziale ai valori iniziali. Per esempio si consideri l'equazione del primo ordine:

$$\frac{dg}{dt} + a = b(t) \quad ; \quad g(t=0) = g(0)$$

con $a = \text{cost.}$ e $b(t)$ funzione nota di t . Eseguendo una trasformata di Laplace sulla precedente equazione otteniamo:

$$\int_0^\infty \frac{dg}{dt} e^{-pt} dt + a \int_0^\infty e^{-pt} dt = \int_0^\infty b(t) e^{-pt} dt.$$

Integrando per parti il primo termine si ha:

$$g(t)e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \hat{g}(p) + a \hat{g}(p) = \hat{b}(p),$$

e infine

$$-g(0) + (a + p) \hat{g}(p) = \hat{b}(p).$$

La trasformata della soluzione dell'equazione differenziale è quindi:

$$\hat{g}(p) = \frac{\hat{b}(p) + g(0)}{a + p}.$$

Si noti che la condizione iniziale sulla $g(t)$ è automaticamente inclusa nella soluzione per $\hat{g}(p)$. La $g(t)$ soluzione dell'equazione data con la condizione iniziale assegnata si ottiene prendendo l'antitrasformata della $\hat{g}(p)$.

Ritornando al nostro problema, applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione (7.40) che diviene:

$$p \hat{f}_1(k, \mathbf{v}, p) - \tilde{f}_1(k, \mathbf{v}, t=0) + ik u \hat{f}_1(k, \mathbf{v}, p) - \frac{e}{m} \hat{E}(k, p) \frac{\partial f_0}{\partial u} = 0,$$

Omettendo di indicare esplicitamente la dipendenza dalle variabili k e p in \hat{f}_1 ed \hat{E} ed eliminando inoltre il pedice 1 nella notazione per f_1 , la precedente equazione diviene:

$$(p + ik u) \hat{f} = \tilde{f}(0) + \frac{e}{m} \hat{E} \frac{\partial f_0}{\partial u}. \quad (7.42)$$

Applicando la stessa procedura all'equazione (7.41) e utilizzando la (7.42) otteniamo:

$$i k \hat{E} = -4\pi e \int \frac{\tilde{f}(0)}{p + ik u} d\mathbf{v} - 4\pi \frac{e^2}{m} \hat{E} \int \frac{(\partial f_0 / \partial u)}{p + ik u} d\mathbf{v},$$

che riscriviamo nella forma

$$\left[1 - i \frac{4\pi e^2}{m k} \int \frac{(\partial f_0 / \partial u)}{p + ik u} d\mathbf{v} \right] \hat{E} = i \frac{4\pi e}{k} \int \frac{\tilde{f}(0)}{p + ik u} d\mathbf{v}. \quad (7.43)$$

Introduciamo ora la notazione:

$$F_0(u) = \frac{1}{n_0} \int f_0(\mathbf{v}) dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_B T}\right), \quad (7.44)$$

se f_0 è una maxwelliana. Definendo inoltre:

$$\begin{aligned} D(k, p) &= 1 - i \frac{4\pi e^2 n_0}{m k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(dF_0/du)}{p + iku} du \\ &= 1 - i \frac{\omega_{pe}^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(dF_0/du)}{p + iku} du, \end{aligned} \quad (7.45)$$

dove n_0 è la densità degli elettroni nello stato imperturbato, possiamo ottenere un'espressione esplicita per la quantità $\hat{E}(k, p)$:

$$\hat{E}(k, p) = i \frac{4\pi e}{k} \frac{1}{D(k, p)} \int \frac{\tilde{f}(k, \mathbf{v}, t=0)}{p + iku} d\mathbf{v}. \quad (7.46)$$

Per ottenere $E(\mathbf{r}, t)$ dobbiamo eseguire le antitrasformate di Laplace e di Fourier della (7.46) e queste operazioni presentano alcune difficoltà aggiuntive. Consideriamo l'antitrasformata di Laplace di $\hat{E}(k, p)$, cioè

$$\tilde{E}(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{E}(k, p) e^{pt} dp. \quad (7.47)$$

Per determinare il valore di σ dobbiamo conoscere la posizione di tutte le singolarità di $\hat{E}(k, p)$ nel piano complesso di p . Tuttavia, se $\tilde{f}(k, \mathbf{v}, t=0)$ e (dF_0/du) sono funzioni *analitiche* di u , si può dimostrare che le sole singolarità di $\hat{E}(k, p)$ sono i poli corrispondenti agli zeri di $D(k, p)$, che per semplicità supporremo essere tutti distinti. Alcuni di questi poli potrebbero avere una parte reale positiva, il che implica $\sigma > 0$. In questo caso la funzione integranda nella (7.47) conterrebbe il fattore $e^{\sigma t}$ che diverge per $t \rightarrow \infty$. Nell'effettuare l'integrazione nel piano complesso di p è tuttavia possibile deformare il cammino d'integrazione come indicato in Figura (XXX). In questo modo, il contributo all'integrale lungo i segmenti verticali del cammino (in cui $\Re p = -\alpha$) è nullo quando $t \rightarrow +\infty$ a causa del fattore $e^{-\alpha t}$ ed è ugualmente nullo il contributo dovuto all'integrazione lungo i segmenti orizzontali, che vengono percorsi in senso opposto. Rimane quindi solo l'integrazione sulle circonferenze (di raggio che tende a zero) intorno ai poli:

$$\tilde{E}(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \hat{E}(k, p) e^{pt} dp.$$

Se dunque indichiamo con p_j , ($j = 1, 2 \dots N$) le soluzioni dell'equazione

$$D(k, p_j) = 0, \quad (7.48)$$

e scriviamo:

$$p_j(k) = \gamma_j(k) - i \omega_j(k),$$

otterremo la seguente espressione per $\tilde{E}(k, t)$:

$$\tilde{E}(k, t) = \sum_{j=1}^N R_j e^{\gamma_j t} e^{-i\omega_j t}, \quad (7.49)$$

dove R_j è la quantità che in teoria delle funzioni di variabile complessa è detta il *residuo* di $\hat{E}(k, p)$ in $p = p_j$.

Il campo elettrico è quindi una sovrapposizione di onde la cui ampiezza cresce o decresce esponenzialmente col tempo a seconda del segno di γ_j . Tutti i termini con $\gamma_j < 0$ rappresentano delle oscillazioni smorzate, tanto più fortemente quanto maggiore è il valore di $|\gamma_j|$. Per tempi sufficientemente lunghi rispetto all'eccitazione iniziale, il termine dominante sarà dunque quello corrispondente al polo più prossimo all'asse immaginario di p . I termini con $\gamma_j > 0$ rappresentano invece delle oscillazioni amplificate che escono rapidamente dal regime lineare. Per rimanere nell'ambito della presente teoria di onde di piccola ampiezza, dovremo quindi supporre che, se anche esistono dei poli con $\Re p > 0$, essi si trovino vicino all'asse immaginario di p . Vediamo dunque che in ogni caso siamo interessati ai poli di $D(k, p)$ per cui γ sia sufficientemente piccolo, cioè $|\gamma/\omega| \ll 1$.

La (7.48) definisce la relazione di dispersione per le onde che stiamo considerando. Se ora consideriamo l'espressione di $D(k, p)$ data dalla (7.45), vediamo che la funzione integranda presenta un polo per $u = ip/k$. Originalmente la trasformata di Laplace era stata definita per $\Re p > 0$, il che implica che il polo si trova nel semispazio $\Im u > 0$, quindi esterno al cammino d'integrazione, che corre lungo l'asse reale di u . Tuttavia, quando abbiamo deformato il cammino d'integrazione dell'antitrasformata, abbiamo supposto che $\Re p = \alpha < 0$ e quindi dobbiamo trovare una continuazione analitica dell'integrale che compare nella (7.45) per $\Re p < 0$. Una tale continuazione si ottiene deformando il cammino d'integrazione in modo tale da mantenere il polo *al disopra* del cammino deformato, come mostrato in Figura 7.4. Utilizzando questa prescrizione, detta prescrizione di Landau, possiamo definire $D(k, p)$ per qualunque valore di p , in particolare per $\Re p = \gamma \rightarrow 0$, che è il caso per noi più interessante, come notato più sopra.

Seguendo la procedura indicata e ricordando la definizione di *parte principale* di un integrale nel piano complesso:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right],$$

potremo scrivere l'integrale che compare nella (7.45) nella forma

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(dF_0/du)}{p + iku} du &= \frac{1}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F'_0}{u - ip/k} du = \frac{1}{ik} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F'_0}{u - ip/k} du + i\pi F'_0(ip/k) \right] = \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F'_0}{p + iku} du + \frac{\pi}{k} F'_0(ip/k). \end{aligned} \quad (7.50)$$

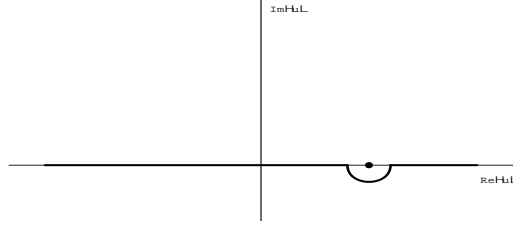


Figure 8: Il cammino d'integrazione secondo la prescrizione di Landau

La relazione di dispersione sarà quindi data dalla soluzione dell'equazione:

$$\begin{aligned}
 D(k, p) &= 1 - i \frac{\omega_{pe}^2}{k} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F'_0}{p + iku} du + \frac{\pi}{k} F'_0(ip/k) \right] = \\
 &= 1 + \omega_{pe}^2 \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0}{(p + iku)^2} du - i \frac{\pi}{k^2} F'_0(ip/k) \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

dove si è eseguita un'integrazione per parti. Per piccoli valori di k possiamo sviluppare in serie la quantità $(p + iku)^{-2}$ ottenendo,

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{p^2} \int_{-\infty}^{\infty} F_0 \left(1 - \frac{2iku}{p} - \frac{3k^2u^2}{p^2} + \dots \right) du - i \frac{\pi \omega_{pe}^2}{k^2} F'_0(ip/k) = 0,$$

Osservando che i termini immaginari nella funzione integranda contengono potenze dispari di u e che quindi i relativi integrali sono nulli poichè F_0 è una funzione pari della stessa variabile, la precedente equazione diviene:

$$-p^2 \simeq \omega_{pe}^2 \left(1 - 3 \frac{k^2 c_s^2}{p^2} \right) - i \frac{\pi \omega_{pe}^2}{k^2} p^2 F'_0(ip/k), \tag{7.52}$$

dove si sono utilizzati i valori degli integrali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_0 du = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 F_0 du = \frac{k_B T}{m} = c_s^2.$$

Nel limite $k \rightarrow 0$, la relazione di dispersione si riduce a

$$-p^2 = \omega^2 - \gamma^2 + 2i\gamma\omega = \omega_{pe}^2,$$

perchè la F_0 e le sue derivate convergono in maniera così rapida quando l'argomento tende all'infinito che l'ultimo termine della (7.52) tende a zero. In questo limite $\gamma = 0$ e quindi l'ampiezza del campo elettrico dell'onda, che è dato dalla (7.49), non subisce variazioni sistematiche nel tempo. La frequenza dell'onda è quella delle onde di Langmuir in un plasma freddo, cioè $\omega = \pm\omega_{pe}$.

Per ottenere una variazione dell'ampiezza è necessario tener conto delle correzioni legate a valori finiti di k . All'ordine più basso, queste si ottengono conservando il termine in k^2 nella (7.52), ma sostituendo p^2 con $-\omega_{pe}^2$ (cioè con la soluzione all'ordine zero in k^2) nel secondo membro di tale equazione. Dalla parte reale della (7.52) si ottiene:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 c_s^2, \quad (7.53)$$

cioè la relazione di dispersione per le onde di Langmuir corretta per gli effetti termici (vedi Eq. (7.36)).

La parte immaginaria della (7.52) dà infine:

$$\gamma = \frac{\pi \omega_{pe}^3}{2 k^2} F'_0(\omega_{pe}/k). \quad (7.54)$$

La relazione (7.54) costituisce uno dei risultati fondamentali della fisica dei plasmi non collisionali. Prima di descrivere il meccanismo fisico che è alla base della (7.54), osserviamo che il segno di γ dipende dal segno della derivata prima della funzione di distribuzione di equilibrio nel punto in cui *la velocità delle particelle uguaglia la velocità di fase dell'onda*. Lo smorzamento è quindi legato all'interazione *risonante* di un particolare gruppo di particelle con l'onda elettrostatica. Non meraviglia dunque che questo fenomeno non appaia a livello dei modelli fluidi, in cui il comportamento "anomalo" di un particolare gruppo di particelle viene cancellato dall'operazione di media sulle velocità che sta alla base di tali modelli. Poichè la funzione di distribuzione all'equilibrio (maxwelliana) è una funzione decrescente delle velocità per $u > 0$, γ sarà una quantità negativa e l'onda subirà il cosiddetto *smorzamento di Landau*. Si potrebbe obiettare che la $F_0(u)$ ha una derivata positiva per $u < 0$, cosicchè la (7.54) sembrerebbe implicare anche una possibilità di amplificazione dell'onda. Tuttavia, quando $u < 0$, le particelle risonanti hanno $k < 0$, contrariamente a quanto fin qui supposto. Bisogna quindi ripetere la nostra derivazione in quest'ultimo caso e ci si rende facilmente conto che il polo di $D(k, p)$ giace ora nel semipiano $\Im u < 0$ e che il cammino d'integrazione quando $\gamma \rightarrow 0$ deve essere modificato in modo da mantenere il polo *al disotto* del cammino. Il semicerchio di raggio infinitesimo intorno al polo viene ora percorso in senso orario, ciò che implica un cambiamento di segno del termine immaginario nelle (7.51) e (7.52). Di conseguenza la (7.54) diviene:

$$\gamma = -\frac{\pi \omega_{pe}^3}{2 k^2} F'_0(-\omega_{pe}/|k|),$$

ed il segno di γ è ancora negativo. Se ne conclude che nel caso di particelle con distribuzione

maxwelliana si ha sempre smorzamento. L'espressione esplicita della (7.54) per una distribuzione maxwelliana può essere posta nella forma:

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{|k\lambda_D|^3} \exp\left[-\frac{1}{2(k\lambda_D)^2} - \frac{3}{2}\right], \quad (7.55)$$

dove è stata usata la relazione:

$$\omega_{pe}\lambda_D = c_s,$$

e si è tenuto conto anche del termine proporzionale a k^2 nella (7.53) a causa della violenta dipendenza di γ da $(k\lambda_D)$.

Come si vede, per piccoli valori di $(k\lambda_D)$, cioè per lunghezze d'onda grandi rispetto a λ_D , lo smorzamento è molto piccolo, ma cresce rapidamente al diminuire di λ_D , raggiungendo un massimo per $k\lambda_D \simeq 0.6$. L'equazione (7.55) è stata ottenuta da uno sviluppo in serie del parametro $k\lambda_D \ll 1$ e quindi perde la sua validità quando esso si avvicina all'unità. Risolvendo esattamente (per via numerica) la (7.51), il massimo scompare e si trova che γ è una funzione monotona crescente di $k\lambda_D$. Se ne conclude che quando quest'ultima quantità raggiunge e supera l'unità, le onde sono così fortemente smorzate da essere praticamente inesistenti.

Le precedenti considerazioni ci permettono di comprendere il processo fisico alla base dello smorzamento di Landau. Infatti, immaginiamo di osservare il fenomeno da un sistema di riferimento in moto con una velocità pari alla velocità di fase dell'onda. In un tale sistema, il campo elettrico ed il potenziale elettrico ad esso associato appariranno fissi nel tempo. Se l'energia totale di una particella è minore del massimo dell'energia potenziale elettrostatica nel campo dell'onda essa subirà una riflessione nei punti indicati con A e B nella Figura 7.4 e rimarrà dunque "intrappolata" tra due massimi successivi del potenziale. Nel nostro sistema di riferimento, una particella con velocità leggermente inferiore alla velocità di fase dell'onda apparirà muoversi lentamente verso sinistra fino a riflettersi nel punto A , dove guadagnerà energia a spese dell'energia dell'onda, mentre una particella con velocità leggermente superiore alla velocità di fase dell'onda si rifletterà nel punto B , cedendo parte della sua energia all'onda. Se la funzione di distribuzione è una funzione *decreciente* della velocità nell'intorno della velocità di fase dell'onda, il numero di particelle con velocità $u < \omega/k$ è *maggiore* del numero di quelle che hanno $u > \omega/k$. Quindi l'assorbimento di energia dall'onda domina su quello di cessione di energia all'onda ed il risultato complessivo sarà dunque di uno smorzamento.

Se la funzione di distribuzione presenta un secondo massimo, per esempio per $k > 0$, e se la velocità di fase dell'onda cade nella regione in cui $F'_0(u) > 0$, γ diviene positivo e l'ampiezza dell'onda cresce, a spese dell'energia cinetica delle particelle. Una situazione di questo genere si può presentare quando il sistema consiste di un plasma termico (distribuzione maxwelliana) attraversato da un fascio di particelle collimate, con velocità sensibilmente superiori alla velocità termica. E' evidente, come già sottolineato, che una crescita esponenziale dell'ampiezza fa uscire rapidamente dal regime lineare e la nostra trattazione cessa di essere valida. E' facile tuttavia intuire quale sarà lo stato a cui arriverà il sistema

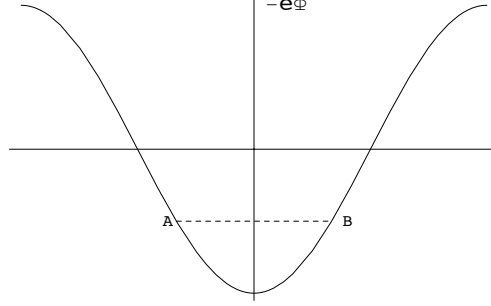


Figure 9: Energia potenziale, $-e\Phi$, in funzione di x nel sistema di riferimento dell'onda

nella fase non lineare. La crescita dell'ampiezza dell'onda rallenterà le particelle e questo implica un "travaso" di particelle da $u > \omega/k$ a $u < \omega/k$, che a lungo andare "spiana" il massimo secondario, saturando la crescita dell'ampiezza.

Si osservi, infine, che la nostra spiegazione fisica della fase lineare dello smorzamento di Landau si applica solo per tempi brevi rispetto al "periodo di rimbalzo" della particella nella buca di potenziale dell'onda. Infatti, una particella che viene riflessa nel punto A finirà per raggiungere il punto B , dove cederà parte della sua energia all'onda, compensando parte dello smorzamento. La frequenza di rimbalzo, ω_r è può essere calcolata, in prima approssimazione, nel modo seguente.

Nel sistema dell'onda, il campo elettrico sia descritto da $E = E_0 \sin(kx)$. Di conseguenza il potenziale sarà $\Phi = (E_0/k) \cos(kx) = \Phi_0 \cos(kx)$ e l'energia potenziale dell'elettrone $V = -e\Phi = -(eE_0/k) \cos(kx)$, cioè del tipo mostrato nella Figura ZZZ. L'equazione di moto di un elettrone con energia lievemente superiore al minimo di V sarà dunque:

$$m\ddot{x} = -eE = -eE_0 \sin(kx) \simeq -eE_0 k x,$$

da cui segue che le particelle intrappolate nella regione prossima al minimo dell'energia potenziale compiono un moto armonico con frequenza

$$\omega_r = \sqrt{eE_0 k/m} = k\sqrt{e\Phi_0/m}.$$

Il rapporto tra il periodo di rimbalzo, τ_r , e ed il periodo dell'onda, τ_{pe} , per $\omega \gg \omega_{pe}$, è quindi

$$\frac{\tau_r}{\tau_{pe}} \simeq \frac{\omega_{pe}}{kc_s} \sqrt{\frac{e\Phi_0}{k_B T}} \ll 1,$$

dove si è tenuto conto sia della (7.53) che della condizione caratteristica dei plasmi (??). Si vede dunque che la fase lineare dello smorzamento di Landau può protrarsi per molti periodi dell'onda di plasma.