

Capitolo 1

L'equazione di Dirac

L'equazione di Dirac è utilizzata per descrivere la meccanica relativistica di alte energie per particelle puntiformi. Fu introdotta come soluzione al problema della generalizzazione della meccanica quantistica di Schroedinger con l'aggiunta di condizioni relativistiche, come ad esempio il fatto che le particelle in relatività sono oggetti ben definiti per cui $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ ($c = 1$). Per una teoria con tali propositi si richiedevano al tempo quattro requisiti fondamentali, ovvero la teoria doveva essere:

1. quantistica;
2. relativistica;
3. locale;
4. le funzioni d'onda descrittive di un sistema dovevano essere di singola particella;

Per teoria *locale* si intende una teoria capace di definire una particella su una regione di spazio piccola a piacere. In termini matematici questo significa che le equazioni della teoria devono contenere solo un numero finito di derivate, di ordine finito. Abbiamo già visto che nel caso dei fotoni non era possibile definire un operatore di creazione o distruzione in un solo punto, poichè il commutatore tra $A(\vec{x}, t)$ e $A^\dagger(\vec{y}, t)$ non era proporzionale ad una $\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ ma compariva anche un termine di spread dovuto al potenziale coulombiano, dunque $A(\vec{x}, t)$ e $A^\dagger(\vec{y}, t)$ non potevano essere interpretati come operatori di creazione o distruzione *locali*.

Per il principio di indeterminazione, $\Delta p \Delta x > \hbar$, e se voglio localizzare una particella in un intervallo spaziale Δx devo trasferirle un impulso $\delta p > \frac{\hbar}{\Delta x}$. Supponiamo dunque di voler localizzare una particella di massa m con una precisione $\delta x \ll \frac{\hbar}{mc}$, dove $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$ è la lunghezza d'onda Compton della particella, si ha che

$$\Delta p \gg mc \Rightarrow \Delta E \simeq c\Delta p \gg mc^2$$

ovvero per scendere oltre una certa soglia di precisione devo fornire alla particella una energia molto maggiore della sua massa di riposo, sufficiente alla creazione di coppie particella-antiparticella. Dunque la richiesta di località aggiunge alla particella iniziale un mare di coppie particella anti-particella, pertanto nega la richiesta del punto 4 di una funzione d'onda di singola particella. L'equazione di Dirac si interpreta a questo punto come equazione differenziale per un campo.

Se invece si decide di sacrificare la località, il problema è facilmente impostato come

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \sqrt{m^2 - \hbar^2 \nabla^2} \psi \quad (1.1)$$

ovvero l'equazione di Schroedinger con $H = \sqrt{m^2 - \hbar^2 \nabla^2}$. Tuttavia questa espressione non ha un senso ben chiaro dato che non è immediato il significato della radice di un operatore, a meno di utilizzare uno sviluppo in serie che comprende però un numero infinito di derivate. Tale espressione diventa quindi equivalente ad una equazione integrale, che ha normalmente una soluzione più complicata di una equazione differenziale, poichè le condizioni iniziali non sono più sufficienti.

Risultati simili erano stati ottenuti discutendo nel caso fononico il limite di sistema a numero fisso di particelle (per cui si recuperava la meccanica quantistica di Schroedinger); avevamo infatti visto che una funzione d'onda a una particella soddisfaceva a

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \omega_{-i\nabla} \psi$$

pertanto, poichè la relazione di dispersione fononica è $\omega = |\vec{k}|$, si avrebbe anche in questo caso una espressione del tipo $|\nabla|$, definibile soltanto come operatore integrale e non come operatore differenziale. In tal caso per ottenere una soluzione dell'equazione è necessario allargare lo spazio dall'originario spazio di Hilbert ad uno spazio adatto a contenere le soluzioni del nuovo tipo, che si trova coincidere proprio con lo spazio di Fock. Va da sè che per questi motivi l'hamiltoniana H non sarà più in generale una hamiltoniana di singola particella.

Tuttavia, Dirac cercava una soluzione locale, e tra i tentativi più illustri di perseguire questo scopo ricordiamo l'equazione di Klein-Gordon:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (m^2 - \hbar^2 \nabla^2) \psi$$

Tale equazione si ottiene semplicemente quadrando la (.), ma ha il problema di essere una equazione differenziale del secondo ordine nel tempo come l'equazione di D'Alambert, e come quest'ultima ammette soluzioni con energie positive e negative. Infatti nello spazio degli impulsi la relazione di dispersione si riduce a

$$\omega^2 = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 + k^2 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{k^2 + \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2}$$

Essendo l'equazione del secondo ordine non basta fornire le condizioni iniziali della funzione d'onda ma è necessario fornire anche quelle per la derivata prima, ed è come aver aggiunto un grado di libertà al sistema.

Inoltre, frequenze negative non hanno interpretazione in una teoria di singola particella, mentre ce l'hanno in una teoria di campo, dove sono ammesse sia particelle che antiparticelle (ad esempio per il fotone le frequenze negative erano interpretate come operatori di creazione). Interpretiamo dunque la ψ del campo di Klein-Gordon non come una funzione d'onda ma come un campo per una singola particella ma circondata da un numero imprecisato di coppie particella-antiparticella.

L'equazione di Klein-Gordon ha una corrente conservata analoga a quella calcolata per l'equazione di Schroedinger, ma la densità che si ottiene non è definita positiva, e non può quindi essere interpretata come una densità di probabilità. Questo fu uno dei motivi per cui l'equazione di Klein-Gordon fu inizialmente scartata, salvo essere ripresa in seguito in sede di teoria di campo; tale densità infatti viene interpretata come una densità di carica, e si elimina quindi il vincolo della positività.

In ogni caso, per il momento Klein-Gordon non funzionava, e il problema era ancora aperto. Dirac spostò la sua attenzione sulla ricerca di una soluzione che conciliasse una funzione d'onda eventualmente a più componenti

(spinore) con una teoria locale. Tuttavia più componenti implicano l'introduzione dello spin, e come si era già constatato per spin 0 non c'era soluzione. La teoria si applica dunque a particelle con spin $\geq \frac{1}{2}$, e l'idea di Dirac fu di definire una hamiltoniana

$$h = \beta m + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$$

dove $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, βm è il termine di massa e $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ è un termine lineare nelle derivate. Il prezzo da pagare per un'equazione del prim'ordine è che l'hamiltoniana così definita deve essere necessariamente una matrice:

$$(h)_{ab} = (\beta m + \vec{\alpha} \cdot \vec{p})_{ab}$$

La prima richiesta da soddisfare per un'hamiltoniana che voglia candidarsi a risolvere il problema è:

$$h^2 = p^2 + m^2$$

Prendendo il quadrato di h si ha

$$\beta^2 m^2 + mp_i(\beta\alpha_i + \alpha_i\beta) + \frac{1}{2}p_i p_j(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)$$

e affinché scompaiano i termini lineari in p , è necessario che le matrici α_i e β anticommuto, ovvero $\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$. Inoltre $\beta^2 = 1$ e $\{\alpha_i\alpha_j\} = 2\delta_{ij}$ affinché il termine di massa e quello di secondo grado nelle derivate restino isolati. Al tempo di Dirac si aveva già una soluzione soddisfacente l'algebra matriciale appena descritta: le matrici di Pauli σ_i , che potevano essere identificate con le α_i . Tuttavia restava il problema che sia le α che le β dovevano avere traccia nulla poichè anticommuto tra loro:

$$\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta$$

ma

$$tr(\alpha_i) = tr(-\beta\alpha_i\beta) = -tr(\alpha_i)$$

per le proprietà cicliche della traccia ($tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$). Dunque lo spazio matriciale 2x2 col vincolo della traccia nulla ha dimensione 3, non c'è spazio sufficiente per contenere 4 matrici indipendenti, e si deve salire di grado. Sempre a causa del vincolo di traccia nulla, è necessario che le matrici (che sono hermitiane) abbiano autovalori 1 e -1 in egual numero. Perciò scartiamo la dimensione 3 e il primo spazio utile è quello delle matrici 4x4; in tale ambiente Dirac propose una rappresentazione delle 4 matrici della forma:

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} ; \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

dove ogni blocco è una matrice 2x2 e le $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli. Si verifica facilmente che le matrici appena definite soddisfano l'algebra richiesta, ed è possibile trovare altre rappresentazioni equivalenti, che differiscono da questa per una trasformazione di similitudine¹; con questa soluzione l'equazione di Dirac si riscrive:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a = h_{ab} \psi_b$$

¹Date due matrici A e B , si dice che A è *simile* a B e si indica con $A \sim B$ se esiste una matrice invertibile S tale che $A = S^{-1}BS$. La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza.

dove adesso la funzione d'onda ψ è uno spinore a 4 componenti. L'equazione di Dirac ha una corrente conservata, data dal quadrivettore:

$$j^\mu = (\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)$$

per il quale vale

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

dove $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$. Infatti si ha:

$$\begin{cases} i\dot{\psi} = (\beta m - i\vec{\alpha} \cdot \nabla)\psi \\ -i\dot{\psi}^\dagger = \psi^\dagger(\beta m - i\vec{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla}) \end{cases}$$

$$\partial_t \psi^\dagger \psi = \dot{\psi}^\dagger \psi + \psi^\dagger \dot{\psi} = i\psi^\dagger(\beta m - i\vec{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla})\psi - i\psi^\dagger(\beta m - i\vec{\alpha} \cdot \nabla)\psi = -\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi + \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla} \psi = -\nabla \cdot (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)$$

e dunque

$$\partial_t \psi^\dagger \psi + \nabla \cdot (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) = \partial_\mu j^\mu = 0$$

Se consideriamo $\psi^\dagger \psi$, questa è definita positiva e può assumere significato di densità di probabilità, tuttavia in base alla richiesta $h^2 = p^2 + m^2$, h può avere autovalori sia positivi che negativi. Questo è un problema intrinseco della teoria, e come nel caso di Klein-Gordon non si sapeva che interpretazione dare agli autovalori negativi.

Tramite le matrici β e $\vec{\alpha}$ è possibile definire una quinta matrice:

$$\gamma_5 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

$$\gamma_5^2 = I \quad ; \quad \{\gamma_5, \alpha_i\} = 0 = \{\gamma_5, \beta\}$$

Il significato di tale matrice sarà più chiaro in seguito, ma è collegato al limite di massa nulla dell'equazione di Dirac, e alla chiralità; in tale limite l'equazione di Dirac può essere applicata allo studio di particelle come i neutrini, che sono sinistrorsi (quindi violano la parità) e corrispondono ad autostati di γ_5 con autovalori ± 1 .

Vediamo adesso gli stati di particella libera: innanzitutto è necessario definire lo spin o un numero quantico che ne faccia le veci. A rigore, lo spin di una particella è il momento angolare nel sistema di quiete, ed è lì che deve essere definito. Tuttavia in generale la particella avrà $\vec{p} \neq 0$, e il procedimento corretto consisterebbe in una trasformazione di Lorentz che porti nel sistema di quiete, una definizione dello spin in tale sistema, e il ritorno nel vecchio sistema di riferimento.

Altrimenti si può definire l'elicità, ovvero la proiezione di $\vec{\sigma}$ nella direzione dell'impulso:

$$\Lambda = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\sigma} \cdot \hat{p}$$

dove con $\vec{\Sigma}$ si intende

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$$

Tale operatore è sempre definibile, poichè è una costante del moto; l'elicità infatti commuta con l'hamiltoniana di Dirac, come si osserva mediante un conto esplicito dei vari commutatori (esercizio), oppure notando che le σ agiscono su indici diversi da quelli su cui agiscono β e $\vec{\alpha}$: è possibile infatti scrivere

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\vec{\alpha} = \vec{\sigma} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora ogni ψ sarà autostato dell'elicità con un determinato autovalore. Una maniera intuitiva per capire il concetto è questa: ciò che si conserva è il momento angolare totale $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, ma $L = \vec{x} \wedge \vec{p}$, e se prendo la proiezione $\vec{J} \cdot \vec{p}$ ottengo $\vec{S} \cdot \vec{p}$ poichè $\vec{L} \cdot \vec{p} = 0$. Dunque la proiezione di \vec{S} lungo \vec{p} è in realtà la proiezione di $vec J$. Dunque gli spinori u diagonalizzano l'elicità e si può scrivere

$$\Lambda u_\lambda = \lambda u_\lambda$$

L'equazione che descrive una particella di Dirac libera è

$$h\psi = E\psi$$

dove

$$h = \beta m + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$$

Se suppongo $\vec{p} = 0$ (particella ferma), ottengo

$$h_0\psi_0 = E_0\psi_0 = m\beta\psi_0$$

da cui le due possibili soluzioni (ricordiamo che è un'equazione matriciale)

$$E_0 = \pm m$$

Gli autostati hanno quindi la forma

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}$$

e corrispondono agli autovalori $+1$ e -1 di β . Gli spinori a due componenti ϕ_0 e χ_0 conterranno l'informazione sullo spin, ad esempio ϕ_0 può essere autostato di σ_z :

$$\sigma_z\phi_0 = \pm\phi_0$$

Se invece $\vec{p} \neq 0$, si può scrivere in generale delle soluzioni di tipo onda piana:

$$\psi^{(+)} = u(\vec{p})e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

L'hamiltoniana ora è

$$h = m\beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \Rightarrow h\psi = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E_p \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

che porta alle due equazioni

$$\begin{cases} m\phi + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi = E_p\phi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi - m\chi = E_p\chi \end{cases}$$

Se $E_p > 0$, si può scrivere $\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m}$, da cui si ricava l'equazione agli autovalori per ϕ :

$$\begin{aligned} (m + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E_p + m)})\phi &= E_p \phi \\ \Rightarrow \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E_p + m)}\phi &= (E_p - m)\phi \end{aligned}$$

e poichè sappiamo che per le proprietà delle $\vec{\sigma}$, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \equiv p^2$ riotteniamo per gli autovalori l'informazione iniziale

$$E_p - m = \frac{p^2}{(E_p + m)} \Rightarrow E_p^2 = m^2 + p^2$$

Dunque le soluzioni a energia positiva si scrivono in definitiva come

$$\psi^{(+)} = u(\vec{p})e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

dove

$$u(\vec{p}) = C_p \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E_p + m)}\phi \end{pmatrix}$$

e con $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$. Lo spinore a due componenti $\phi \equiv \phi^{(\lambda)}$ rende conto dello spin della particella, ed è $\phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nel caso di spin 'up', oppure $\phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nel caso di spin 'down'. Scegliamo $C_p = \sqrt{E_p + m}$, in modo che $u^\dagger(\vec{p})u(\vec{p}) = 2E_p$:

$$\begin{aligned} u(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E_p + m)}\phi \end{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \\ \Rightarrow u^\dagger(\vec{p})u(\vec{p}) &= \sqrt{E_p + m} \left(\phi^\dagger, \phi^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \right) \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m}\phi \end{pmatrix} \sqrt{E_p + m} = (E_p + m) \left(\phi^\dagger \phi + \phi^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \phi \right) = \\ &= (E_p + m) \left(\frac{(E_p + m)^2 + p^2}{(E_p + m)^2} \right) = (E_p + m) \left(\frac{E_p^2 + m^2 + 2mE_p + p^2}{(E_p + m)^2} \right) = \frac{2E_p^2 + 2mE_p}{E_p + m} = \frac{2E_p(E_p + m)}{E_p + m} = 2E_p \end{aligned}$$

Per le soluzioni ad energia negativa si ha

$$\psi^{(-)}(\vec{x}, \vec{p}) = v_\lambda(\vec{p})e^{i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

La ragione di questa scrittura sta nell'analogia col caso fononico e fotonico in cui i coefficienti relativi a $\omega < 0$ erano i complessi coniugati di quelli a $\omega > 0$. Stavolta però è opportuno mantenere anche lo stesso impulso \vec{p} . Tuttavia $v_\lambda(\vec{p})$ non è autostato di $h(-\vec{p})$ ed ha energia negativa $-E_p$. Dunque per convenzione si scriverà:

$$\psi^{(-)} = v_\lambda(\vec{p})e^{i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

e $\psi^{(-)}$ soddisfa a

$$\begin{aligned} -i\nabla\psi^{(-)} &= -\vec{p}\psi^{(-)} \\ i\partial_t\psi^{(-)} &= -E_p\psi^{(-)} \end{aligned}$$

Per ottenere le soluzioni devo scrivere:

$$\begin{pmatrix} m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = -E_p \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

che rende le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} m\phi - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi &= -E_p\phi \\ -(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi - m\chi &= -E_p\chi \Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi + m\chi = E_p\chi \end{aligned}$$

da cui

$$phi(E_p + m)\phi = -(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi$$

e quindi lo spinore v_λ può essere scritto come:

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}$$

Sempre per convenzione, si definisce lo spinore v_λ come autostato dell'elicità con autovalore $-\lambda$:

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p} v_\lambda = -\lambda v_\lambda \Rightarrow v_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{-\lambda p}{E_p + m} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}$$

e stavolta le piccole componenti sono in alto.

L'equazione di Dirac ha successo anche in fisica atomica come correzione relativistica all'equazione di Schroedinger, ad esempio le correzioni finì all'atomo di idrogeno sono corrette fino all'ordine $\frac{v^2}{c^2}$. Nel limite ultrarelativistico invece il comportamento dell'equazione è totalmente diverso; $\frac{p}{E_p + m} \sim 1$, cioè l'energia è dominata dall'impulso, e gli spinori hanno la seguente forma:

$$u_\lambda = \begin{pmatrix} \phi_\lambda \\ \lambda \phi_\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda$$

e

$$u_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi_\lambda = -\lambda \chi_\lambda$$

e si verifica che u_λ e v_λ sono autostati di γ_5 con autovalori rispettivamente λ e $-\lambda$. Dunque nel limite ultrarelativistico chiralità ed elicità possono essere identificate. Vedremo adesso che la rappresentazione di Dirac non è la più conveniente conveniente nel caso ultrarelativistico, infatti l'equazione di Dirac si scrive:

$$i\partial_t \psi = [m\beta + \vec{\alpha} \cdot (-i\nabla)]\psi$$

Se moltiplichiamo per β si ottiene:

$$i\beta\partial_t \psi = [m + \beta\vec{\alpha} \cdot (-i\nabla)]\psi \Rightarrow i(\gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i)\psi = m\psi$$

dunque possiamo pensare di definire la quantità

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = (\beta, \beta\vec{\alpha})$$

che risulta essere un quadrivettore poichè si ha

$$\partial_\mu \gamma^\mu = -im$$

cioè il prodotto scalare tra γ^μ è invariante.

Abbiamo visto inoltre che la matrice γ_5 ha la forma:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

e cercheremo una rappresentazione delle 4 matrici γ più la γ_5 in cui quest'ultima sia diagonale. Tale rappresentazione, detta *rappresentazione chirale*, si ottiene cercando una matrice opportuna S e definendo delle nuove matrici

$$\tilde{\gamma}^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$$

Ad esempio, una possibile scelta della matrice S è:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$$

attraverso la quale si ha:

$$\tilde{\gamma}_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Esercizio: determinare la forma delle altre 4 matrici trasformate.

1.0.1 Campo elettromagnetico nell'equazione di Dirac

Non esiste un modo univoco per introdurre il campo elettromagnetico nell'equazione di Dirac. (Dire altri modi)
Ad esempio con la sostituzione minimale:

$$E \rightarrow E - eA^0$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$$

l'equazione stazionaria libera passa dalla forma

$$h(\vec{p})\psi_0 = E_0\psi_0$$

ad questa

$$h(\vec{p} - e\vec{A})\psi_0 = (E_0 - eA^0)\psi_0$$

Eslicitando l'hamiltoniana si ha:

$$E\psi = eA^0\psi + \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) & -m \end{pmatrix} \psi$$

Tuttavia questa equazione non è valida a tutte le energie, e come vedremo porta a dei paradossi, come il paradosso di Klein per un fascio di elettroni incidenti su un gradino di potenziale. L'equazione di Dirac con campo magnetico

non è facilmente risolubile a meno di effettuare qualche approssimazione. Mettiamoci in condizioni favorevoli, che in questo caso corrispondono a considerare $E - m = \Delta \ll m$ e $\delta \sim A^0 \sim \frac{v^2}{c^2}m$; dunque Δ e A^0 sono dei piccoli parametri. Non ci sono invece restrizioni su \vec{A} , il cui modulo può essere anche dello stesso ordine di quello di $\frac{1}{c}\vec{p}$. Dunque possiamo pensare di sviluppare per piccole velocità, e introduciamo la notazione $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$, dove $\vec{\pi}$ rappresenta il momento cinetico $m\vec{v}$, e \vec{p} è il vero momento coniugato alla \vec{x} . Nel limite non relativistico avremo le seguenti equazioni accoppiate:

$$\begin{aligned} E\phi &= eA^0\phi + m\phi + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi \\ (E - m)\phi &\equiv \Delta\phi = eA^0\phi + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi \\ \Rightarrow (\Delta - eA^0)\phi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi \end{aligned}$$

e

$$\Rightarrow (2m + \Delta - eA^0)\chi = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\phi$$

[Ricordiamo che nel caso libero avevamo trovato $\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m}\phi$]

Dunque le componenti χ hanno in generale la seguente espressione, facendo attenzione all'ordinamento degli operatori (A^0 è funzione delle coordinate):

$$\chi = \frac{1}{2m + \Delta - eA^0(\vec{x})} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\phi$$

Sostituendo nella espressione appena trovata per ϕ si ottiene:

$$(\Delta - eA^0)\phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \frac{1}{2m + \Delta - eA^0(\vec{x})} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})\phi$$

Questa espressione è formalmente esatta ma è difficilmente risolubile. L'approssimazione al prim'ordine consiste nel trascurare i termini perturbativi Δ e eA^0 rispetto alla massa m :

$$(\Delta - eA^0)\phi \simeq (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})\phi = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m}\phi$$

Potremmo pensare che $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2$ come nel caso di $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})$, ma in questo caso le singole componenti di $\vec{\pi}$ non commutano tra loro:

$$[\pi_i, \pi_j] = [p_i, -eA_j] + [-eA_j, p_j] = ie(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = ie\epsilon_{ijk}B_k(\vec{x})$$

ovvero il commutatore è collegato con il rotore di \vec{A} , che corrisponde al campo magnetico \vec{B} , e in generale è funzione delle coordinate. In realtà si ha:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 &= \sigma_i \sigma_j \pi_i \pi_j = (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk})\pi_i \pi_j = \vec{\pi}^2 + i\epsilon_{ijk}\pi_i \pi_j \sigma_k = \vec{\pi}^2 + i\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_k = \vec{\pi}^2 + i\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}[\pi_i, \pi_j]\sigma_k = \\ &= \vec{\pi}^2 + i\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(ie\epsilon_{ijl}B_l)\sigma_k = \vec{\pi}^2 - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

dove nei passaggi abbiamo usato la proprietà di saturazione del tensore di Levi-Civita:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$

e la seguente proprietà tensoriale:

$$\epsilon_{ijk}\pi_i\pi_j = \epsilon_{ijk}\frac{1}{2}([\pi_i, \pi_j] + \{\pi_i, \pi_j\}) = \epsilon_{ijk}\frac{1}{2}[\pi_i, \pi_j]$$

Infatti $\epsilon_{ijk}\{\pi_i, \pi_j\} = 0$ poichè l'anticommutatore è simmetrico nello scambio di i e j , mentre il tensore di Levi-Civita è antisimmetrico.

Dunque otteniamo per ϕ l'espressione:

$$(\Delta - eA^0)\phi = \left(\frac{\vec{\pi}^2}{2m}\right) - \frac{e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}}{2m}\phi$$

e l'hamiltoniana di Dirac al primo ordine perturbativo diventa:

$$H_D^1 = eA^0(\vec{x}) + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - e\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{B}}{2m}$$

Osserviamo quindi che compare un termine di tipo momento magnetico $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, dove $\vec{\mu} = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\mu_B\vec{S} = \frac{e}{m}\vec{S} \equiv \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}$; l'equazione di Dirac dunque prevede il fattore giromagnetico dell'elettrone $g = 2$.

Nella struttura (relativistica) iniziale dell'equazione di Dirac si ha un legame tra m e p^μ del tipo $m = \gamma_\mu p^\mu$, mentre dopo la sostituzione minimale questo si trasforma in $m = \gamma_\mu(p^\mu - eA^\mu)$; dunque il fatto che la sostituzione minimale sia effettuata nell'ambito di una equazione covariante relativistica fissa del tutto il peso di A^0 e \vec{A} , tramite la costante di accoppiamento e , e questo fatto è alla base del fatto che al prim'ordine si ha soltanto una interazione di tipo $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{B}}{2m}$.

L'equazione di Dirac è giusta almeno fino al secondo ordine: al prim'ordine abbiamo visto che dà delle predizioni per il fattore giromagnetico, al secondo fornisce risultati in merito alla struttura fine dell'atomo di idrogeno. Al second'ordine, nell'equazione cambia la dipendenza da δ , e non si può più parlare di una equazione agli autovalori:

$$\frac{1}{2m + [\Delta - eA^0]} \sim \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{\Delta - eA^0(\vec{r})}{2m}\right)$$

Osserviamo dunque che la correzione al prim'ordine delle piccole componenti fornisce una correzione al second'ordine delle grandi componenti. Risulta quindi:

$$\left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}\right)\Delta\phi = \left[\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}eA^0\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{(2m)^2}\right]\phi$$

Ci troviamo davanti al problema di dover definire quale sia l'operatore hamiltoniano al second'ordine; nell'equazione di Schroedinger stazionaria avevamo una forma del tipo $E\psi = H\psi$, dove stavolta è il fattore Δ a fare le veci di E . E' necessario dunque isolare tale fattore, e per far questo portiamo l'operatore $(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2})$ a destra dell'uguaglianza:

$$\Delta\phi = \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}\right)^{-1} \left[\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}eA^0\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{(2m)^2}\right]\phi$$

Osserviamo però che l'operatore che moltiplica a destra ϕ non è hermitiano, e non è possibile identificarlo con un operatore hamiltoniano. Definiamo allora un nuovo spinore $\tilde{\phi}$ tale che:

$$\phi = \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}\right)^{-1/2}\tilde{\phi}$$

In questo modo possiamo riscrivere la precedente espressione come:

$$\Delta\tilde{\phi} = \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e A^0 \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{(2m)^2}\right) \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}\right)^{-1/2} \tilde{\phi}$$

e indentifichiamo l'operatore (stavolta hermitiano)

$$H^{(2)} = \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e A^0 \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{(2m)^2}\right) \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}\right)^{-1/2}$$

con lo sviluppo della hamiltoniana di Dirac al second'ordine.

Sembrerebbe tornato il problema del considerare la radice quadrata di un operatore, nella fattispecie dell'operatore $(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2})$, ma poichè stiamo facendo uno sviluppo al second'ordine possiamo accontentarci del suo sviluppo al prim'ordine:

$$\left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}\right)^{-1/2} \sim 1 - \frac{1}{2} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2}$$

da cui si ricava:

$$H^{(2)} \sim eA^0 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} - \frac{[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2]^2}{8m^3} - \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}, \left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}, eA^0 \right] \right]$$

Osserviamo che le potenze coinvolte nell'espressione non ci sorprendono; infatti, avessimo considerato una particella di spin 0 avremmo avuto una relazione tra energia e impulso della forma:

$$E - eA^0 = \sqrt{\pi^2 + m^2} \simeq m + \frac{\pi^2}{2m} - \frac{(\pi^2)^2}{8m^3}$$

ovvero contenente termini analoghi a quelli sopra riportati. Se nel prodotto prendiamo anche elementi del terz'ordine otteniamo risultati non attendibili, proprio per il fatto che abbiamo fatto all'inizio una approssimazione del prim'ordine; viceversa, il termine contenente il doppio commutatore rappresenta l'interazione spin-orbita:

$$\left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}, eA^0 \right] = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot [\vec{\pi}, A^0] \equiv \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot [\vec{p}, A^0] \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \nabla A^0 = -\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{e}{8m^2} [\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}, \vec{\sigma} \cdot \vec{E}] \equiv \frac{e}{8m^2} [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, \vec{\sigma} \cdot \vec{E}]$$

$$[\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, \vec{\sigma} \cdot \vec{E}] = -\vec{\sigma} \cdot [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, \vec{E}] - [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, \vec{\sigma}] \cdot \vec{E} = -\sigma_i \sigma_j [\vec{p}_j, E_i] - [\sigma_i p_i, \sigma_j] E_j = \frac{1}{2} \{\sigma_i, \sigma_j\} \partial_j E_i + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [\sigma_i, \sigma_j] \partial_j E_i + (FINIREC)$$

Vediamo che è presente un termine del tipo $\nabla \cdot \vec{E}$, che per l'atomo di idrogeno è proporzionale ad una $\delta^3(\vec{x})$ (densità di carica puntiforme), e pertanto contribuisce solo in onda s , quando la funzione d'onda dell'elettrone ha probabilità non nulla di trovarsi all'interno del protone; tale termine è detto **termine di Darwin**, ed è necessario quando si considera lo splitting della struttura fine. In ogni caso, tramite la teoria delle perturbazioni l'equazione di Dirac prevede delle correzioni ai livelli energetici che dipendono soltanto dal momento angolare totale j , quindi c'è una degenerazione non risolta anche nella teoria relativistica, tra doppietti con stesso j ma diverso momento angolare orbitale l . Ad esempio possiamo considerare i livelli $2p_{1/2}$ e $2s_{1/2}$ dell'idrogeno: per la teoria di Dirac al secondo ordine essi risultano degeneri. Potremmo pensare di andare a ordini superiori, ma come abbiamo già accennato, oltre il secondo ordine la teoria di Dirac perde di accuratezza, e bisogna passare a teorie più sofisticate come l'elettrodinamica quantistica; essa infatti prevede una correzione all'ordine $\alpha^3 \log \alpha$, il Lamb Shift: esso è

una separazione molto più grande della separazione al terzo ordine (quindi in α^4) fornita dall'equazione di Dirac, e tiene conto anche del rinculo del nucleo, oltre che di termini superiori della teoria dei campi. Tale risultato costituisce la prima grande verifica dell'elettrodinamica quantistica.

Tornando all'equazione di Dirac, formalmente è possibile sviluppare la teoria a ordine α^{2n} , con n arbitrario; l'atomo di idrogeno ad esempio è risolubile ad ogni ordine, anche se resta la degenerazione sul momento angolare orbitale, dovuta ad una simmetria nascosta dell'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno. (SCRIVERE DELLE TRASFORMAZIONI DI FOLDY).

1.0.2 Covarianza relativistica dell'equazione di Dirac

Finora abbiamo preso per buona l'equazione di Dirac come equazione relativistica, e abbiamo trovato predizioni soddisfacenti per il fattore giromagnetico e per la struttura fine, ma questa equazione è veramente covariante? L'equazione di Dirac libera si scrive come:

$$i\hbar\partial_t\psi = (\beta m - i\hbar\nabla \cdot \vec{\alpha})\psi$$

E' utile introdurre le matrici **gamma di Dirac**:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu &= (\beta, \beta\vec{\alpha}) \\ \gamma^0 &= \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ \vec{\gamma} &= \beta \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Tali matrici hanno la seguente proprietà:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

ovvero anticommutano tra loro, e $(\gamma^\mu)^2 = 1$. Tramite tali matrici l'equazione di Dirac si riscrive:

$$\begin{aligned}\gamma^0 \cdot i\hbar\partial_t\psi &= \gamma^0 \cdot (\beta m - i\hbar\nabla \cdot \vec{\alpha})\psi \\ \Rightarrow i\hbar\gamma^0\partial_t\psi &= (m - i\hbar\nabla \cdot \vec{\gamma})\psi \\ \Rightarrow (i\hbar\gamma^0\partial_0 + i\hbar\nabla \cdot \vec{\gamma})\psi &= m\psi \Rightarrow (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0\end{aligned}$$

In quanto spinore, ovvero un oggetto con più di una componente libera, in generale $\psi(x)$ non sarà una quantità invariante per trasformazioni di Lorentz: se $\Lambda^\mu{}_\nu$ è una trasformazione tale che $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, e $\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = g_{\nu\rho}$, esisterà una matrice $S(\Lambda)$ 4x4 (ovvero una *rappresentazione del gruppo di Lorentz*) sullo spazio degli spinori, che rimescolerà le quattro componenti di $\psi(x)$. L'unico inconveniente è che la trasformazione $S(\Lambda)$ non sarà in generale unitaria, essendo il gruppo di Lorentz $SO(3, 1)$ non compatto, ed essendo finita la dimensione dello spazio degli spinori (TEOREMA DI ...).

In definitiva, se $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, contemporaneamente $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$, oppure esplicitando il connotato matriciale:

$$\psi'_a(x') = S_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

L'equazione di Dirac si riscrive allora come:

$$\begin{aligned}
(i\hbar\gamma^\mu\partial_{\mu'} - m)\psi'(x') &= 0 \\
\partial'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu \\
\Rightarrow (i\hbar\gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu - m)S(\Lambda)\psi(x) &= 0 \\
\Rightarrow (i\hbar\gamma^\mu S(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu - m)\psi(x) &= 0
\end{aligned}$$

Se moltiplichiamo a sinistra per $S^{-1}(\Lambda)$, otteniamo:

$$(i\hbar S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu - m)\psi(x) = 0$$

Dunque affinché l'equazione di Dirac sia invariante sotto una trasformazione di Lorentz, è necessario che le matrici γ trasformino in un certo modo:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\nu = \gamma^\nu \Rightarrow S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu$$

cioè sotto una trasformazione di Lorentz le matrici γ^μ si trasformano come quadri-vettori.

Le trasformazioni di Lorentz pure consistono in boost lungo gli assi e rotazioni. I generatori delle rotazioni possono essere scelti al solito come $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, mentre per i boost di Lorentz definiamo l'operatore vettoriale $\vec{K} = \frac{i}{2}\gamma_5\vec{\sigma}$; osserviamo che per la presenza dell'unità immaginaria tale operatore è antihermitiano. Le matrici $S(\Lambda)$ si ottengono tramite esponenziazione:

$$S_{rot} = \exp\left[-\frac{i}{2}\vec{\Sigma} \cdot \vec{\theta}\right]$$

dove ricordiamo che $\Sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$; per un boost lungo l'asse z ad esempio si ha:

$$S_{B_z} = \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma_5\Sigma_z\eta\right]$$

dove $\tanh\eta = \frac{v}{c}$. E' possibile compattare sia i generatori dei boost che quelli delle rotazioni in un unico tensore di rango 2 antisimmetrico:

$$\begin{aligned}
J^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\
J^{ij} &= \epsilon^{ijk}J^k \\
J^{0,i} &= K^i
\end{aligned}$$

Le trasformazioni descritte finora sono quelle appartenenti al gruppo di Lorentz *ortocrono proprio*; esso comprende tutte le trasformazioni di Lorentz continue e connesse con l'identità, ma esistono altre trasformazioni, come ad esempio la parità, che val la pena di considerare pur essendo trasformazioni discrete. Una trasformazione di parità su un quadri-vettore $x^\mu = (t, \vec{x})$ semplicemente inverte il sistema di riferimento, e il quadri-vettore risultante sarà $x'^\mu = (t, -\vec{x}) \equiv x_\mu$; la matrice di Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ che effettua una trasformazione del genere è la matrice $g^\mu{}_\nu = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ che avendo determinante pari a -1 non può appartenere al gruppo di Lorentz ortocrono

proprio infatti appartiene al gruppo di Lorentz *esteso*. La matrice $S(\Lambda)$ che riflette la trasformazione di parità sullo spazio degli spinori si ottiene osservando una proprietà delle matrici γ ; si deve avere infatti:

$$g^{\mu}{}_{\nu} \gamma^{\nu} = S(\Lambda) \gamma^{\mu} S^{-1}(\Lambda)$$

Se $\gamma^{\mu} = (\gamma^0, \vec{\gamma})$, sarà $\gamma_{\mu} = (\gamma^0, -\vec{\gamma})$, e ricordando le proprietà di anticommutazione delle γ possiamo facilmente dedurre che $S(\Lambda) = S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0$, infatti:

$$\gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 = 2g^{\mu 0} \gamma^0 - \gamma^{\mu} (\gamma^0)^2 = \begin{cases} \gamma^0, & \text{se } \mu = 0; \\ -\gamma^{\mu}, & \text{se } \mu \neq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 = \gamma_{\mu}$$

Le matrici di rotazione S_{rot} sono operatori unitari, ovvero $S_{rot}^{\dagger} = S_{rot}^{-1}$, mentre lo stesso non accade per le matrici dei boost:

$$S_{B_i}^{\dagger} = (\exp \left[-\frac{1}{2} \gamma_5 \Sigma_i \eta \right])^{\dagger} = S_{B_z}$$

essendo sia γ_5 che Σ_i hermitiane. Tuttavia, la matrice *gamma*⁰ ci permette di definire una trasformazione (unitaria) che manda $S_{B_i}^{\dagger}$ in $S_{B_i}^{-1}$:

$$\gamma^0 S_{B_i}^{\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \exp \left[-\frac{1}{2} \gamma_5 \Sigma_i \eta \right] \gamma^0 = \exp \left[-\frac{1}{2} \gamma^0 \gamma_5 \Sigma_i \gamma^0 \eta \right] =$$

ricordando che se U è una matrice unitaria, $U e^A U^{\dagger} = e^{U A U^{\dagger}}$. In termini delle matrici γ^{μ} , la matrice γ_5 si scrive:

$$\gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

e si può dimostrare che anticommuta con tutte:

$$\{\gamma_5, \gamma_{\mu}\} = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^{\mu} + i \gamma^{\mu} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

In ogni caso, il numero di anticommutazioni da fare per portare γ^{μ} da un estremo all'altro dei prodotti $\gamma^{\mu} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ o $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^{\mu}$ è sempre dispari (e pari a 3), dunque necessariamente $\{\gamma_5, \gamma_{\mu}\} = 0$. In particolare, $\{\gamma_5, \gamma_0\} = 0$, e si ha

$$\gamma^0 S_{B_i}^{\dagger} \gamma^0 = \exp \left[-\frac{1}{2} \gamma^0 \gamma_5 \Sigma_i \gamma^0 \eta \right] = \exp \left[\frac{1}{2} \gamma_5 \Sigma_i \gamma^0 \gamma^0 \eta \right] = \exp \left[-\frac{1}{2} \gamma_5 \Sigma_i \eta \right] = S_{B_i}^{-1}$$

dato che $[\Sigma_i, \gamma^0] = 0$.

Questo risultato ci suggerisce di definire una nuova *metrica* in cui non si considera più l'hermitiano coniugato del campo ψ , ψ^{\dagger} , bensì il campo $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0$. Vediamo infatti come trasforma il campo $\bar{\psi}$ sotto una trasformazione di Lorentz:

$$\begin{aligned} \psi'^{\dagger}(x') &= \psi^{\dagger}(x) S^{\dagger}(\Lambda) \\ \Rightarrow \bar{\psi}'(x') &= \psi'^{\dagger}(x') \gamma^0 = \psi^{\dagger}(x) S^{\dagger}(\Lambda) \gamma^0 = \end{aligned}$$

ma poichè $\gamma^0 \gamma^0 = 1$:

$$= \psi^{\dagger}(x) \gamma^0 \gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda) \gamma^0 = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda)$$

Dunque, se consideriamo l'oggetto $\bar{\psi}(x)\psi(x)$, esso è un invariante di Lorentz, infatti:

$$(\bar{\psi}\psi)' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

Viceversa, il vecchio prodotto scalare $\psi^\dagger\psi$ non è invariante di Lorentz. Alla luce di questi nuovi risultati, possiamo costruire un oggetto, uno dei cosiddetti *bilineari di Dirac*:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Si dimostra facilmente che questo oggetto si comporta come un quadrivettore sotto trasformazioni di Lorentz:

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \Lambda_\mu{}^\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

Vediamo che questo oggetto coincide con la corrente conservata dell'equazione di Dirac:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^\dagger\psi, \psi^\dagger\gamma^0\vec{\gamma}\psi) = (\psi^\dagger\psi, \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi)$$

dunque possiamo reinterpretare l'oggetto $\psi^\dagger\psi$ come la componente temporale di un quadrivettore.

Il difetto della metrica $\bar{\psi}\psi$ è che non è definita positiva nello spazio delle funzioni d'onda, a differenza del vecchio modulo $\psi^\dagger\psi$:

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = (\phi^\dagger, \chi^\dagger) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \phi^\dagger\phi - \chi^\dagger\chi = |\phi|^2 - |\chi|^2 \leq 0$$

dunque tale metrica non può essere posta alla base di una teoria probabilistica. In ogni caso, nella metrica $\bar{\psi}\psi$ le matrici γ sono tutte hermitiane (dove per 'hermitiano' si intende adesso 'barrato'):

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = g^{\mu\mu}\gamma_\mu^\dagger = g^{\mu\mu}g^{\mu\mu}\gamma^\mu = \gamma^\mu$$

Riscriviamo l'equazione di Dirac col formalismo delle matrici γ , introducendo la notazione $\not{p} \equiv \gamma_\mu p^\mu$. Se $\psi^{(+)}$ è una soluzione ad energia positiva, si ha:

$$\psi^{(+)} = e^{-ip \cdot x} u_\lambda(\vec{p}) \quad (p \cdot x = E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})$$

$$(\not{p} - m)u_\lambda = 0$$

Se consideriamo la complessa coniugata:

$$\psi^{\dagger(+)}(-i\overleftarrow{\not{p}}^\dagger - m) = 0$$

Dato che $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ è antihermitiana, si ha $\gamma^{\mu\dagger} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu$, dunque moltiplicando per γ^0 a destra:

$$\begin{aligned} \psi^{\dagger(+)}(-i\overleftarrow{\not{p}}^\dagger - m)\gamma^0 &= 0 \\ \psi^{\dagger(+)}\gamma^0\gamma^0(-i\overleftarrow{\not{p}}^\dagger\gamma^0 - m\gamma^0) &= 0 \\ \Rightarrow \bar{\psi}^{(+)}(-i\overleftarrow{\not{p}}\gamma^0 - m) &= 0 \\ \Rightarrow \bar{\psi}^{(+)}(-i\overleftarrow{\not{p}}\gamma^\mu - m) &= 0 \\ \Rightarrow \bar{\psi}^{(+)}(-i\overleftarrow{\not{p}} - m) &= 0 \Rightarrow \bar{\psi}^{(+)}(\not{p} - m) = 0 \end{aligned}$$

Per le soluzioni ad energia negativa viceversa si ha:

$$\psi^{(-)} = e^{ip \cdot x} v_\lambda(\vec{p})$$

$$(\not{p} + m)v_\lambda = 0 \Rightarrow \bar{v}_\lambda(\not{p} + m) = 0$$

Nella metrica $-$ esistono delle relazioni di completezza e ortonormalità per gli spinori u e v :

Ortonormalità:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \bar{u}_{\alpha}^{(\lambda)}(\vec{p}) u_{\alpha}^{(\lambda')}(\vec{p}) &= 2m \delta_{\lambda\lambda'} \\ \sum_{\alpha} \bar{v}_{\alpha}^{(\lambda)}(\vec{p}) v_{\alpha}^{(\lambda')}(\vec{p}) &= 2m \delta_{\lambda\lambda'} \\ \sum_{\alpha} \bar{u}_{\alpha}^{(\lambda)}(\vec{p}) v_{\alpha}^{(\lambda')}(\vec{p}) &= 0 \end{aligned}$$

Tali relazioni si dimostrano facilmente ricordando che i prodotti $\bar{u}u$, $\bar{v}v$, $\bar{u}v$ sono invarianti relativistici, quindi siamo liberi di calcolarceli in un sistema opportuno, i.e. quello di riposo dell'elettrone:

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} \phi^{(\lambda)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E_p + m)} \phi^{(\lambda)} \end{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \Rightarrow u^{(\lambda)}(0) = \begin{pmatrix} \phi^{(\lambda)} \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2m} \\ \Rightarrow u^{\dagger(\lambda)}(0) u^{(\lambda')}(0) &= 2m \phi^{\dagger(\lambda)} \phi^{(\lambda')} = 2m \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

Completezza:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} u_{\alpha}^{(\lambda)} \bar{u}_{\beta}^{(\lambda)} &= (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \\ \sum_{\lambda} v_{\alpha}^{(\lambda)} \bar{v}_{\beta}^{(\lambda)} &= (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Dunque riscriviamo le soluzioni ad energia positiva e negativa:

$$\begin{aligned} \psi^{(+)} &= e^{-ip \cdot x} u_\lambda(\vec{p}) \\ (\not{p} - m)u_\lambda(\vec{p}) &= 0 \\ \psi^{(-)} &= e^{ip \cdot x} v_\lambda(\vec{p}) \\ (\not{p} + m)v_\lambda(\vec{p}) &= 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che $v(-\vec{p})$ è autostato di $h(\vec{p}) = \beta m + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ con autovalore $-E_p$, mentre $u(\vec{p})$ è autostato con autovalore E_p , dunque i due autovettori appartengono ad autospazi diversi pertanto saranno ortogonali (rispetto alla metrica \dagger):

$$v_{\lambda}^{\dagger}(-\vec{p}) u_{\lambda}(\vec{p}) = 0$$

Nella metrica $-$, invece, l'operatore $h = \beta m + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ non è più hermitiano bensì lo diventa l'operatore $(\not{p} + m)$, di cui $u_\lambda(\vec{p})$ e $v_\lambda(\vec{p})$ sono autovettori con autovalori opposti $\pm m$. Si ha quindi:

$$\bar{v}_{\lambda'} u_{\lambda} = 0$$

Ribadiamo che la metrica $-$ non è definita in quanto $\bar{u}u = 2m$ mentre $\bar{v}v = -2m$.

Il concetto di 'metrica'

Abbiamo fatto largo uso in questo capitolo del termine 'metrica', riferendoci alla 'metrica † ' o alla 'metrica $^-$ '; dietro questa terminologia si nasconde soltanto un cambio nel modo di concepire i prodotti interni tra gli spinori: nel primo caso infatti si utilizza semplicemente il prodotto scalare euclideo, con tensore metrico $\delta_{\alpha\beta}$, per cui $\psi^{\dagger}\psi = \psi_{\alpha}^{\dagger}\delta_{\alpha\beta}\psi_{\beta}$. Nel secondo caso, invece, l'espressione $\bar{\psi}\psi = \psi^{\dagger}\gamma^0\psi$ sottintende che adesso il tensore metrico non è più quello euclideo bensì la matrice $\gamma^0 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$; questo rende il nuovo prodotto scalare non definito positivo, ma ci permette di definire l'invariante di Lorentz $\bar{\psi}\psi$.

1.0.3 Quantizzazione del campo di Dirac

Analogamente a quanto visto nel caso di fononi e fotoni, possiamo pensare di espandere il campo di Dirac $\psi(\vec{x}, t)$ sulla base delle soluzioni dell'equazione di Dirac ad energia positiva e negativa, ovvero:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda, \vec{p}} \frac{1}{2E_p V} \left(a_{\lambda}(\vec{p}) u^{(\lambda)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\lambda}(\vec{p}) v^{(\lambda)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right) \equiv \sum_{\lambda, \vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \left(a_{\lambda}(\vec{p}) \psi^{(+)}(\vec{p}, \lambda) + b_{\lambda}(\vec{p}) \psi^{(-)}(\vec{p}, \lambda) \right)$$

Tale scrittura è conveniente se si usa la metrica $^-$, mentre se si usa la metrica † può essere più conveniente utilizzare l'espressione

$$\sum_{\lambda, \vec{p}} \frac{1}{2E_p V} \left(a_{\lambda}(\vec{p}) u^{(\lambda)}(\vec{p}) e^{-iE_p t} + b_{\lambda}(-\vec{p}) v^{(\lambda)}(-\vec{p}) e^{iE_p \cdot x} \right) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

Le equazioni del moto per il campo di Dirac (ovvero l'equazione di Dirac) possono essere ricavate da una lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\psi^{\dagger} \dot{\psi} - \psi^{\dagger} h \psi$$

dove al solito $h = \beta m - i\nabla \cdot \alpha$. Tale lagrangiana è del primo ordine come accadeva per il campo di Schroedinger; ancora una volta vediamo che non esiste momento coniugato associato a ψ^{\dagger} , mentre per ognuna delle 4 componenti spinoriali di ψ risulta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha}} = i\psi_{\alpha}^{\dagger}$$

L'hamiltoniana (o meglio, la densità hamiltoniana) si trova al solito tramite trasformata di Legendre:

$$\mathcal{H} = i\psi_{\alpha}^{\dagger} \dot{\psi}_{\alpha} - \mathcal{L} = \psi^{\dagger} h \psi$$

da cui l'hamiltoniana vera e propria si ottiene da:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow H = \int d^3x \bar{\psi} h \psi$$

Osserviamo che $h\psi = h\psi^{(+)} + h\psi^{(-)} = E_p(\psi^{(+)} - \psi^{(-)})$, dunque l'integrale diventa:

$$H = \int d^3x \bar{\psi} h \psi = \int d^3x \sum_{\lambda', \vec{p}'} \frac{1}{\sqrt{2V E_{p'}}} \left(b_{\lambda'}(\vec{p}') \bar{v}^{(\lambda')\dagger}(\vec{p}') e^{-ip' \cdot x} + a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{p}') \bar{u}^{(\lambda')\dagger}(\vec{p}') e^{ip' \cdot x} \right) E_{p'}.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{\lambda, \vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2V E_p}} \left(a_\lambda(\vec{p}) u^{(\lambda)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} - b_\lambda^\dagger(\vec{p}) v^{(\lambda)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right) = \\
& = \int d^3x \sum_{\substack{\lambda, \vec{p} \\ \lambda', \vec{p}'}} \frac{1}{2V \sqrt{E_p E_{p'}}} E_p (b_{p'}^{\lambda'} a_p^\lambda \bar{v}_{p'}^{(\lambda')\dagger} u_p^{(\lambda)} e^{-i(p+p') \cdot x} + a_{p'}^{\dagger\lambda'} a_p^\lambda \bar{u}_{p'}^{(\lambda')\dagger} u_p^{(\lambda)} e^{i(p'-p) \cdot x} - b_{p'}^{\lambda'} b_p^{\dagger\lambda} \bar{v}_{p'}^{(\lambda')\dagger} v_p^{(\lambda)} e^{-i(p'-p) \cdot x} + \\
& \quad + a_{p'}^{\dagger\lambda'} b_p^\lambda \bar{u}_{p'}^{(\lambda')\dagger} v_p^{(\lambda)} e^{i(p+p') \cdot x}) =
\end{aligned}$$

Gli esponenziali integrati daranno luogo a delle $\delta^4(p-p')$ e $\delta^4(p+p')$. I prodotti del tipo $\bar{u}_{p'}^{(\lambda')\dagger} v_p^{(\lambda)}$ e $\bar{v}_{p'}^{(\lambda')\dagger} u_p^{(\lambda)}$ sono associati alla $\delta^4(p+p')$, quindi diventeranno $\bar{u}_{-p}^{(\lambda')\dagger} v_p^{(\lambda)}$ e $\bar{v}_{-p}^{(\lambda')\dagger} u_p^{(\lambda)}$, e si annullano per le relazioni di ortogonalità viste poc'anzi. Viceversa, $\bar{u}_p^{(\lambda')\dagger} u_p^{(\lambda)} = \bar{v}_p^{(\lambda')\dagger} v_p^{(\lambda)} = 2E_p$, e l'integrale si riscrive:

$$H = \sum_{\substack{\lambda, \vec{p} \\ \lambda'}} \frac{1}{2E_p} E_p \left(a_p^{\dagger\lambda'} a_p^\lambda 2E_p \delta_{\lambda\lambda'} - b_p^{\lambda'} b_p^{\dagger\lambda} 2E_p \delta_{\lambda\lambda'} \right) = \sum_{\lambda, \vec{p}} E_p \left(a_p^{\dagger\lambda} a_p^\lambda - b_p^\lambda b_p^{\dagger\lambda} \right)$$

Osserviamo che rispetto all'hamiltoniana del caso fotonico e fononico, l'hamiltoniana di Dirac non è definita positiva, sia nel caso in cui trattiamo i coefficienti a e b come numeri, sia nel caso in cui imponiamo regole di commutazione canoniche, infatti in tal caso avremmo comunque:

$$bb^\dagger = 1 + b^\dagger b \Rightarrow H = \sum_{\lambda, \vec{p}} E_p \left(a_p^{\dagger\lambda} a_p^\lambda - b_p^{\dagger\lambda} b_p^\lambda - 1 \right)$$

Ricordando la corrente conservata $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, possiamo definire la carica conservata (moltiplicandola per la carica fondamentale e e attribuendole il senso di carica elettrica):

$$Q = e \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int d^3x \psi^\dagger \psi = e \sum_{p, \lambda} (a_p^{\dagger\lambda} a_p^\lambda + b_p^\lambda b_p^{\dagger\lambda})$$

La carica dal punto di vista classico è definita positiva, tuttavia il fatto che l'energia non abbia questa caratteristica ci suggerisce di imporre regole di *anticommutazione*, anziché di commutazione, per gli operatori a e b :

$$\{a(\lambda, p), a^\dagger(\lambda', p')\} = a(\lambda, p) a^\dagger(\lambda', p') + a^\dagger(\lambda', p') a(\lambda, p) = \delta_{p, p'} \delta_{\lambda, \lambda'}$$

$$\{b(\lambda, p), b^\dagger(\lambda', p')\} = \delta_{p, p'} \delta_{\lambda, \lambda'}$$

$$\{b(\lambda, p), b(\lambda', p')\} = \{a(\lambda, p), a(\lambda', p')\} = 0$$

In questo modo l'hamiltoniana si riscrive come:

$$H = \sum_{\lambda, \vec{p}} E_p \left(a_p^{\dagger\lambda} a_p^\lambda - b_p^\lambda b_p^{\dagger\lambda} \right) \rightarrow \sum_{\lambda, \vec{p}} E_p \left(a_p^{\dagger\lambda} a_p^\lambda + b_p^{\dagger\lambda} b_p^\lambda - 1 \right) = \sum_{\lambda, \vec{p}} E_p \left(a_p^{\dagger\lambda} a_p^\lambda + b_p^{\dagger\lambda} b_p^\lambda \right) + E_0$$

Dove $E_0 = -\sum_{\lambda, \vec{p}} E_p$ è una costante infinita negativa, ma dal punto di vista operatoriale l'hamiltoniana è definita positiva. La carica elettrica viceversa si riscrive come:

$$Q = e \sum_{p, \lambda} (a_p^{\dagger\lambda} a_p^\lambda + b_p^\lambda b_p^{\dagger\lambda}) \rightarrow e \sum_{p, \lambda} (a_p^{\dagger\lambda} a_p^\lambda - b_p^{\dagger\lambda} b_p^\lambda) + Q_0$$

dove anche qui $Q_0 = -\sum_{p,\lambda} e$ è una costante infinita ma stavolta positiva, e può essere interpretata come la carica del cosiddetto 'mare di Fermi'. Gli operatori b e b^\dagger , quindi, creano e distruggono particelle che rispetto a quelle create e distrutte da a e a^\dagger , hanno associata una carica elettrica *opposta*, ma *stessa massa e stesso spin*; dunque l'equazione di Dirac prevede l'esistenza delle antiparticelle.

Anche la costante E_0 nell'hamiltoniana può essere interpretata come energia del 'mare di Fermi' degli stati ad energia negativa. Questi stati sono completamente occupati, e ciò è reso manifesto dall'interpretazione che abbiamo dato agli operatori b e b^\dagger : il secondo crea un 'buco' nel mare di Fermi, che corrisponde ad un positrone, mentre il primo annichila il vuoto, cioè lo stato di vuoto è quello stato in cui non sono presenti 'buchi' da eliminare nel mare di energia negativa.

1.0.4 Stati a una e due particelle e principio di Pauli

Definiamo innanzitutto lo stato di vuoto, esso è definito da:

$$a_{\lambda,p}|0\rangle = b_{\lambda,p}|0\rangle = 0$$

Dunque l'energia dello stato di vuoto è definita dal valore di aspettazione dell'hamiltoniana su di esso, ed è pari a E_0 . Gli stati a una particella sono definiti come:

$$a_{\lambda,p}|0\rangle$$

$$b_{\lambda,p}|0\rangle$$

ed entrambi portano una energia E_p . Osserviamo che quando andiamo a creare uno stato a due particelle, ci troviamo davanti a tre possibilità:

$$a_{\lambda,p}^\dagger a_{\lambda',p'}^\dagger |0\rangle$$

$$b_{\lambda,p}^\dagger b_{\lambda',p'}^\dagger |0\rangle$$

$$a_{\lambda,p}^\dagger b_{\lambda',p'}^\dagger |0\rangle$$

Dalle regole di anticommutazione risulta ad esempio che $(a_{\lambda,p}^\dagger)^2 = 0$, dunque non è possibile creare uno stato con due particelle identiche e con stessi numeri quantici: la teoria di Dirac si concilia bene con il principio di esclusione di Pauli. Inoltre se $p, \lambda \neq p', \lambda'$ lo stato si può creare ed è antisimmetrico nello scambio dei due elettroni, dunque gli elettroni sono **fermioni**.

1.1 Osservabilità e bilineari

Il campo di Dirac è un campo complesso, in particolare $\psi^\dagger \neq \psi$, e questo gli permette di descrivere due tipi di particelle di carica opposta. Ricordiamo la lagrangiana di Dirac:

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \dot{\psi} - \psi^\dagger h \psi$$

Il momento coniugato a ψ era $\Pi_\psi = i\psi^\dagger$, e vedremo adesso che le regole di anticommutazione imposte su a e b si tradurranno in relazioni di anticommutazione fra il campo ψ e il suo momento coniugato:

$$\{\psi(\vec{x}, 0), \psi^\dagger(\vec{y}, 0)\} = \sum_{\lambda,p} \sum_{\lambda',p'} \frac{1}{\sqrt{2VE_p}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'}}} \{a_p^\lambda u_p^\lambda e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_p^\lambda v_p^\lambda e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, b_{p'}^{\dagger\lambda'} v_{p'}^{\dagger\lambda'} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{y}} + a_{p'}^{\dagger\lambda'} u_{p'}^{\dagger\lambda'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{y}}\} =$$

Gli unici anticommutatori che sopravvivono sono quelli tra a e a^\dagger , e b e b^\dagger , dunque:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda,p} \sum_{\lambda',p'} \frac{1}{\sqrt{2VE_p}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{p'}}} \left(\delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{p,p'} u_p^\lambda u_{p'}^{\dagger\lambda'} e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{p,p'} v_p^\lambda v_{p'}^{\dagger\lambda'} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right) = \\
&= \sum_{\lambda,p} \frac{1}{2VE_p} \left(u_p^\lambda u_p^{\dagger\lambda} e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + v_p^\lambda v_p^{\dagger\lambda} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right) \\
&= \sum_{\lambda} u_p^\lambda u_p^{\dagger\lambda} = u_p^\lambda u_p^{\dagger\lambda} \gamma^0 \gamma^0 = u_p^\lambda \bar{u}_p^\lambda \gamma^0 = (\not{p} + m) \gamma^0 \\
&= \sum_{\lambda} v_p^\lambda v_p^{\dagger\lambda} = (\not{p} - m) \gamma^0 \\
&\Rightarrow \sum_{\lambda,p} \frac{1}{2VE_p} \left(u_p^\lambda u_p^{\dagger\lambda} e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + v_p^\lambda v_p^{\dagger\lambda} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right) = \sum_p \frac{1}{2VE_p} \left((\not{p} + m) e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + (\not{p} - m) e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right) \gamma^0 = \\
&= \sum_p \frac{1}{2VE_p} \left((\gamma^0 E_p - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m) + (\gamma^0 E_p + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m) \right) e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \gamma^0 = \sum_p \frac{1}{2VE_p} 2E_p e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \gamma^0 \gamma^0 = \\
&= \sum_p \frac{1}{V} e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})
\end{aligned}$$

In realtà l'ultima uguaglianza è rigorosamente verificata solo nel limite di volume infinito. In ogni caso risulta per l'anticommutatore tra ψ e Π (a tempi uguali):

$$\{\psi(\vec{x}, 0), \Pi(\vec{y}, 0)\} = \{\psi(\vec{x}, 0), i\psi(\vec{y}, 0)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Analogamente è possibile anche dimostrare che $\{\psi(\vec{x}, 0), \psi(\vec{y}, 0)\} = \{\psi^\dagger(\vec{x}, 0), \psi^\dagger(\vec{y}, 0)\} = 0$.

Dal punto di vista dell'osservabilità, il fatto che due variabili commutino a tempi uguali implica che le loro misurazioni contemporanee non sono vicendevolmente influenzabili, essendo possibile trovare una base comune di autostati. Nel caso dell'anticommutazione viceversa accade esattamente il contrario, e l'anticommutatività di due operatori implica una forte correlazione tra di essi. Infatti se due operatori anticommutano, necessariamente non possono anche commutare (a meno che non siano identicamente nulli), dunque i risultati finora ottenuti dicono senza mezzi termini che il campo di Dirac **non** è un'osservabile. Tuttavia è possibile costruire a partire da esso degli operatori che viceversa sono osservabili, ad esempio oggetti bilineari come $\psi^\dagger\psi$. Prendendo due oggetti di questo tipo, e considerandone il commutatore, si ha:

$$\left[\psi^\dagger(\vec{x}_1, 0) \psi(\vec{x}_1, 0), \psi^\dagger(\vec{x}_2, 0) \psi(\vec{x}_2, 0) \right] =$$

Ricordiamo l'identità $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$, da cui:

$$= \psi^\dagger(\vec{x}_1, 0) \{\psi(\vec{x}_1, 0), \psi^\dagger(\vec{x}_2, 0) \psi(\vec{x}_2, 0)\} - \{\psi^\dagger(\vec{x}_1, 0), \psi^\dagger(\vec{x}_2, 0) \psi(\vec{x}_2, 0)\} \psi(\vec{x}_1, 0) = \delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \psi^\dagger(\vec{x}_1, 0) \psi(\vec{x}_2, 0) - \delta^3(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

Vediamo che questo commutatore si annulla quando $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ a causa della delta, mentre se $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ si annulla la quantità tra parentesi, dunque a tempi uguali $\psi^\dagger\psi$ commuta con se stesso.

1.1.1 Applicazioni alla fisica della materia

Se consideriamo un problema statistico, il 'vuoto' cambia di significato: ad esempio a $T = 0$ un fluido di Fermi ha tutte le particelle nello stato fondamentale, con tutti i livelli energetici riempiti fino ad un certo impulso, l'impulso di Fermi p_f . In questo caso si definisce uno stato di 'vuoto' $|\Phi_f\rangle$ in modo che sia annichilato dall'operatore di distruzione di una particella con impulso maggiore di p_f :

$$b_{\lambda,p}|\Phi_f\rangle = 0 \quad (p > p_f)$$

Viceversa, poichè ogni livello di $|\Phi_f\rangle$ è occupato, sarà impossibile creare particelle con impulso minore di p_f :

$$b_{\lambda,p}^\dagger|\Phi_f\rangle = 0 \quad (p < p_f)$$

1.1.2 Casi particolari dell'equazione di Dirac

Massa $\rightarrow 0$: esistono particelle di massa molto piccola, i *neutrini*. Tale massa è dell'ordine delle frazioni di elettronvolto, molto minore dei MeV delle particelle elementari. Nel limite $m \rightarrow 0$ l'equazione di Dirac suggerisce una maniera di spiegare perchè le interazioni deboli violino la parità:

$$i\hbar\partial_t\psi = \beta m\psi + \vec{\alpha} \cdot (-i\nabla)\psi \rightarrow \vec{\alpha} \cdot (-i\nabla)\psi = \gamma^5 \vec{\Sigma} \cdot (-i\nabla)\psi \equiv H\psi$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Allora l'operatore H commuta con γ^5 , e sarà possibile trovare una base simultanea di H e γ^5 . L'operatore γ^5 è detto *chiralità*, e la sua equazione agli autovalori è:

$$\gamma^5\psi = \chi\psi = \pm\psi$$

Poichè γ^5 commuta anche con $\vec{\Sigma}$, l'equazione di Dirac si riscrive:

$$i\hbar\partial_t\psi = \pm\vec{\Sigma} \cdot (-i\nabla)\psi$$

Tale espressione prende il nome di *equazione di Weyl*, ed è estremamente interessante dal punto di vista delle possibili rappresentazioni del gruppo di Lorentz. L'hamiltoniana che dà l'evoluzione temporale infatti è proporzionale all'elicità, ovvero all'operatore $\Lambda = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ che abbiamo visto all'inizio. Tramite semplici considerazioni è possibile dimostrare che nel limite $m \rightarrow 0$ l'elicità commuta con le trasformazioni di Lorentz: se prendiamo una particella con impulso definito \vec{p} , ed elicità definita (diciamo negativa), e effettuiamo una trasformazione di Lorentz che ci porti in un sistema di riferimento che si muove più velocemente della particella, vedremo l'elicità cambiare di segno. Tuttavia, se la particella ha massa nulla, si muove con velocità c , dunque non è possibile effettuare la trasformazione di Lorentz anzidetta, e l'elicità diventa un invariante relativistico, quindi un buon numero quantico.

L'equazione di Weyl descrive un campo a due componenti, corrispondenti a chiralità positiva e negativa. Si può prendere il segno $+$ oppure il segno $-$, ma la scelta non è priva di 'pericoli'; consideriamo infatti una trasformazione di parità:

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi_p(\vec{x}, t) = \gamma^0\psi(-\vec{x}, t)$$

Osserviamo che γ^0 non commuta con γ^5 , quindi i campi ψ e $\gamma^5\psi$ avranno parità opposta:

$$\psi_p(\vec{x}, t) = \gamma^0\psi(-\vec{x}, t)$$

$$(\gamma^5\psi)_p(\vec{x}, t) = \gamma^5\gamma^0\psi(-\vec{x}, t) = -\gamma^0(\gamma^5\psi)_p(-\vec{x}, t)$$

Dunque un autostato di γ^5 è in generale una sovrapposizione di stati con parità opposta, e se fissiamo un sottospazio con parità positiva o negativa si ha *violazione della parità*. Scegliamo una rappresentazione in cui γ^5 è diagonale:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

in tale rappresentazione è la parità a non essere più diagonale:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

I neutrini corrispondono a un sottospazio della chiralità con autovalore $\chi = -1$; essi compaiono nelle interazioni deboli, come ad esempio il decadimento β del neutrone:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

in tutte le interazioni deboli in cui è stato possibile osservare l'elicità del neutrino, questa è sempre risultata negativa, per questo si dice che le interazioni deboli violano la parità. Tuttavia, poichè la massa del neutrino sembra essere comunque diversa da zero, esso deve avere una piccola probabilità di avere elicità positiva. Il neutrino si descrive attraverso un campo, che sarà una sovrapposizione degli autostati di γ^5 con autovalore -1 ; nel limite di $m \rightarrow 0$ gli spinori $u_\lambda(\vec{p})$ e $v_\lambda(\vec{p})$ si riscrivono:

$$u_\lambda(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \phi_\lambda \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \phi_\lambda \end{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_\lambda \\ \lambda \phi_\lambda \end{pmatrix} \sqrt{|\vec{p}|}$$

$$v_\lambda(\vec{p}) = \begin{pmatrix} -\lambda \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix} \sqrt{|\vec{p}|}$$

Per lo spinore u si ha che l'autovalore della chiralità è λ , mentre per lo spinore v l'autovalore è $-\lambda$, dunque la chiralità è legata all'elicità dalla relazione:

$$\chi = \text{sign}(E_p)\lambda$$

Per il campo neutrino si ha uno sviluppo analogo a quello generale, ma con due soli gradi di libertà di polarizzazione anzichè 4:

$$\psi_\nu(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda, \vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2VE_p}} \left[a_{-1,p} u_{-1,p} e^{-ip \cdot x} + b_{1,p}^\dagger v_{1,p} e^{ip \cdot x} \right]$$

Gli operatori $a_{-1,p}$ e $b_{1,p}^\dagger$ rispettivamente annichilano un neutrino di elicità negativa, e creano un antineutrino di elicità positiva.

1.1.3 Ipotesi sui neutrini: il neutrino di Majorana

Alcuni ipotizzano che il neutrino possa non essere una particella di Dirac, e che possano esistere i cosiddetti *neutrini di Majorana*, oggetti neutri, di spin $\frac{1}{2}$ e con massa, caratterizzati dal fatto di essere autoconiugati, ovvero come nel caso del fotone, la particella coincide con l'antiparticella. Nella *rappresentazione di Majorana*, tutte e 4 le matrici γ^μ sono reali, dunque la matrice γ^5 è immaginaria pura; in questa rappresentazione sia ψ che ψ^\dagger soddisfano alla medesima equazione, il che equivale a dire che il campo è scarico, e scariche saranno le particelle che il campo descrive. In questa maniera, l'operatore b^\dagger che compare nello sviluppo in modi propri del campo di Dirac viene sostituito con a^\dagger , proprio come nel caso del campo del fotone.