

APPUNTI DI ASTROFISICA I

Fluidi, Onde, Eliosismologia

Claudio Chiuderi

26 dicembre 2009

1 Richiami di meccanica dei fluidi

Un fluido è definito come un mezzo continuo, descritto attraverso un certo numero di campi scalari o vettoriali. Ogni traccia della struttura discreta, cioè molecolare, del fluido è scomparsa. I campi comunemente usati per descrivere un fluido, sono le *velocità*, \mathbf{v} , la *pressione*, P , e la *densità*, ρ . Tutte queste quantità sono funzioni del spazio e del tempo e descrivono le caratteristiche medie di volumi di dimensione lineare piccola rispetto a quella del sistema nella sua totalità, ma comunque contenenti un grandissimo numero di particelle microscopiche. Questi volumetti sono detti particelle fluide e non vanno confusi con le particelle microscopiche che costituiscono il fluido nella realtà. Una definizione precisa di queste quantità è possibile solo partendo da una descrizione microscopica del fluido, cioè da una descrizione statistica delle sue proprietà. Il significato delle varie grandezze macroscopiche è tuttavia abbastanza intuitivo. Per esempio, il valore della densità in nel punto \mathbf{r} , al tempo t è definito come:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

dove Δm è la massa che al tempo t è contenuta nel volume ΔV centrato intorno al punto \mathbf{r} . Il concetto di velocità è anch'esso chiaro se si pensa che la velocità di una particella fluida sia la media delle velocità delle particelle microscopiche che la costituiscono. Il concetto di pressione è più complicato, ma può essere comunque pensato come il limite della forze interne del gas per unità di superficie quando la superficie tende a zero.

Una volta adottata una descrizione continua, abbiamo ancora due possibilità equivalenti per descrivere la sua dinamica. Possiamo idealmente pensare di piazzare in ciascun punto dello spazio dei rivelatori di densità, pressione e velocità che registrino la variazione di queste quantità al passare del tempo. E' chiaro che ad istanti diversi i valori registrati si riferiranno a particelle fluide diverse, e precisamente a quelle che, nel momento della misura, si trovano a passare per il punto dove si trovano gli apparecchi registratori. La descrizione così ottenuta, che è evidentemente una descrizione completa delle caratteristiche dinamiche del fluido, viene detta descrizione *euleriana*. Alternativamente, si potrebbe pensare di piazzare i rivelatori *a bordo* delle particelle fluide. Ad ogni istante, verrebbero registrate la posizione della particella, la sua velocità e tutte le altre caratteristiche utili a definirne lo stato. E' chiaro che in questo schema ogni singola particella dovrebbe essere in qualche modo identificata, ma, una volta compiuta questa operazione, la descrizione ottenuta, detta descrizione *lagrangiana*, sarebbe altrettanto completa di quella euleriana. La maniera di identificare una particella non è univoca. Per esempio, un particella potrebbe essere definita in base alla sua posizione all'istante iniziale, ma qualunque grandezza che identifichi in maniera non ambigua una particella fluida è ugualmente accettabile. L'utilizzo di una o dell'altra descrizione è solo una questione di convenienza: vedremo in seguito in quali casi una scelta è preferibile all'altra. Poichè le due descrizioni sono equivalenti deve essere possibile trovare delle leggi di trasformazione che permettano di passare dall'una all'altra. Per determinarle, basta ricordare che in un caso(euleriano) il punto di osservazione è fisso, mentre nell'altro (lagrangiano) il punto di osservazione si muove solidalmente con la particella fluida, cioè *ne segue la traiettoria*. La derivata temporale di una qualunque quantità nello schema lagrangiano deve

dunque essere calcolata lungo la traiettoria. Per fissare le idee, consideriamo una funzione di due variabili, $f(x, y)$. Possiamo pensare la $f(x, y)$ come una superficie generata dal moto del punto rappresentativo sul piano (x, y) . Il suo differenziale, cioè la variazione infinitesima di f per variazioni infinitesime arbitrarie dx e dy è data da

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Se però il punto rappresentativo sul piano (x, y) è costretto a muoversi lungo una particolare curva su tale piano, curva descritta dall'equazione $y = y(x)$, avremo

$$dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

e quindi

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} dx.$$

Questo ci permette di definire la *derivata lungo una curva* come:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Ritornando alla descrizione lagrangiana, le derivate temporali saranno dunque derivate rispetto al tempo *lungo la traiettoria*. Indicando tali derivate con il simbolo $\frac{d}{dt}$ e quelle fatte tenendo fissa la posizione, cioè le derivate euleriane, con il simbolo $\frac{\partial}{\partial t}$, vremo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v_x,$$

o, nel caso tridimensionale,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

1.1 L'equazione di continuità

In meccanica dei fluidi, come del resto in tutta la fisica, hanno particolare importanza le grandezze conservate. Per essere espliciti, consideriamo una tipica grandezza conservata (in meccanica non relativistica), la massa. La massa contenuta in un volume V può essere scritta come

$$M = \int_V \rho dV,$$

dove ρ è la densità di massa. Poichè la massa si conserva, se il precedente integrale varia nel tempo (con V fisso), se ne deduce che parte della massa deve essere fluita attraverso la superficie che delimita V . Quindi

$$0 = \frac{dM}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna alla superficie S nel punto considerato. Poichè il volume è fisso, utilizzando note formule potremo trasformare l'integrale di superficie in un integrale di volume, ottenendo:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] dV,$$

e, siccome V è arbitrario ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1.1)$$

E' questa l'equazione di continuità, che esprime appunto la conservazione della massa e che rappresenta la prima equazione fondamentale della meccanica dei fluidi.

L'equazione di continuità può essere riscritta sviluppando il termine contenente l'operatore ∇ , ottenendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Consideriamo ora un fluido *incomprimibile*, cioè una fluido in cui le particelle (fluide) mantengano inalterata la propria densità durante il moto. Per definizione, la derivata lagrangiana della densità rispetto al tempo sarà nulla. Se ne deduce quindi che un fluido incomprimibile potrà essere caratterizzato dalla condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Si osservi che la condizione di incomprimibilità non implica che la densità del fluido sia la stessa in tutti i punti, cioè che $\nabla \rho = 0$, o che la densità sia costante nel tempo in un determinato punto, cioè che $\partial \rho / \partial t = 0$, ma semplicemente la densità sia costante lungo la traiettoria di ogni particella fluida. In particolare in situazioni statiche , $\partial / \partial t = 0$ e $\mathbf{v} = 0$, si possono avere fluidi incomprimibili di densità variabile ($\nabla \rho \neq 0$). L'acqua salata con un gradiente di salinità è un possibile esempio.

1.2 L'equazione di moto

Consideriamo ora l'equazione di moto di una particella fluida, cioè $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$. E' ovvio che questa equazione andrà scritta nella rappresentazione lagrangiana. Infatti, \mathbf{F} è la forza che si esercita su una **ben definita particella** e \mathbf{a} è l'accelerazione che ne consegue. Quindi

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

L'equazione di moto si scrive dunque:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \sum_k \mathbf{F}_k,$$

dove $\sum \mathbf{F}$ rappresenta la somma di tutte le forze che agiscono sulla particella in questione. In meccanica dei fluidi è utile distinguere le forze dovute ai gradienti di pressione, che sono spesso dominanti, da tutte le altre. Dato un volume V , delimitato da una superficie S , la forza totale che le forze di pressione esercitano su di esso è data da

$$-\int_S P \mathbf{n} dS = -\int_V \nabla P dV,$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna alla superficie S nel punto considerato. Quindi le forze dovute alla pressione sono date semplicemente da $-\nabla P$. Si scrive dunque :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \sum_k \mathbf{f}_k, \quad (1.2)$$

dove ora $\sum \mathbf{f}$ include tutte le forze diverse da quelle dovute alla pressione.

Si osservi che nell'equazione di moto non compaiono termini connessi con l'eventuale interazione di una particella fluida con quelle adiacenti. Quando ciò avviene, cioè quando è possibile trascurare gli effetti della viscosità, della conduzione di calore e delle perdite radiative, si parla di *fluido perfetto*. E' evidente che in fluido perfetto ogni particella fluida evolve in modo adiabatico. Se s è l'entropia per unità di massa, avremo (descrizione lagrangiana!) $ds/dt = 0$, cioè:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0. \quad (1.3)$$

In linea di principio, ogni particella fluida potrebbe avere una diversa entropia e la condizione di adiabaticità esprimerebbe semplicemente il fatto che il valore dell'entropia di una singola particella è costante durante il moto. Tuttavia, accade spesso che il valore dell'entropia sia lo stesso per tutte le particelle fluide ad un determinato istante e quindi, a causa dell'adiabaticità, anche in tutti gli istanti successivi. In questo caso si parla di moto *isentropico* e la condizione riguardante l'entropia diviene semplicemente

$$s = \text{costante},$$

sia nello spazio che nel tempo.

L'equazione di evoluzione dell'entropia ($ds/dt = 0$), può essere posta in una forma analoga all'equazione di continuità considerando la quantità ρs , cioè la *densità di entropia* e calcolandone la derivata totale utilizzando l'equazione di continuità. Si ottiene facilmente:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0, \quad (1.4)$$

che ha la stessa struttura e interpretazione dell'equazione di continuità.

Introducendo ora la funzione termodinamica *entalpia* $W = U + PV$ e considerando l'entalpia riferita all'unità di massa w , avremo, tenendo conto che il volume per unità di massa è dato da $1/\rho$:

$$dw = d\epsilon + Pd(1/\rho) + dP/\rho,$$

dove ϵ è l'energia interna per unità di massa e $1/\rho$ è il volume dell'unità di massa. Utilizzando ora il primo principio della termodinamica, $d\epsilon = Tds - Pd(1/\rho)$, otteniamo:

$$dw = Tds + dP/\rho.$$

In un moto isentropico $ds = 0$ e quindi $dw = dP/\rho$. L'equazione di moto di un fluido perfetto si può dunque scrivere:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla w. \quad (1.5)$$

Una formula vettoriale di frequente uso in meccanica dei fluidi è la seguente:

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(u^2/2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (1.6)$$

dove \mathbf{u} è un generico vettore. Utilizzando questa formula possiamo scrivere l'equazione (??) come:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla(w + v^2/2). \quad (1.7)$$

Prendendo il rotore della precedente equazione e introducendo il vettore *vorticità*, $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$, si ottiene:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega), \quad (1.8)$$

che contiene solo la velocità.

1.3 L'equazione di Bernoulli

Un caso di notevole interesse in meccanica dei fluidi è quello di un moto stazionario, cioè un moto in cui, qualunque sia il punto scelto, il valore di tutte le grandezze rimane costante nel tempo. Quindi la derivata *euleriana* rispetto al tempo di qualunque grandezza è nulla: $\partial/\partial t = 0$. Ciò non toglie che il valore delle grandezze fisiche relative a una ben definita particella fluida (schema lagrangiano) possa variare nel tempo: $d/dt = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \neq 0$. L'equazione (??) nel caso stazionario si scrive:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(w + v^2/2).$$

Proiettiamo ora la precedente relazione sulle linee di flusso (o linee di corrente) definite come le linee che in ogni punto sono parallele al vettore velocità. In altre parole, facciamo il prodotto scalare della equazione di moto stazionaria con \mathbf{v} . Poichè $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ è perpendicolare a \mathbf{v} ne segue che

$$\mathbf{v} \cdot \nabla(w + v^2/2),$$

ossia che

$$w + v^2/2 = \text{costante}$$

lungo una linea di flusso. La costante in generale varia da una linea di flusso ad un'altra perchè solo il gradiente lungo la linea di flusso si annulla, ma non l'intero gradiente. La

condizione perchè la costante sia la stessa su tutte le linee di flusso si ricava immediatamente dall'equazione di moto stazionaria, imponendo che $\nabla(w + v^2/2) = 0$, ciò che implica che sia $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ (moti irrotazionali) oppure che $\nabla \times \mathbf{v}$ sia parallelo a \mathbf{v} (moti di Beltrami). Nel caso siano presenti altre forze derivabili da un potenziale, $\mathbf{f} = -\rho\nabla\Phi$, otterremo:

$$v^2/2 + w + \Phi = \text{costante} \quad (1.9)$$

lungo una linea di corrente. Questa relazione è conosciuta come *teorema di Bernoulli*.

1.4 L'equazione dell'energia

L'ultima equazione fondamentale della meccanica dei fluidi riguarda l'energia ed è, almeno per i fluidi perfetti, già contenuta nell'equazione adiabatica. E' utile tuttavia riscriverla in forma diversa, analoga all'equazione di continuità. Per far ciò, consideriamo il contenuto energetico di un volume arbitrario. La densità di energia sarà

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon,$$

dove ϵ è l'energia interna per unità di massa. Mantenendo fisso il volume, consideriamo ora la variazione temporale dei due termini della precedente quantità.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) = -(v^2/2)\nabla(\rho\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla P - \rho\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v},$$

dove si è fatto uso dell'equazione di continuità e dell'equazione di moto. Poichè

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla(v^2/2) \quad , \quad \nabla P = \rho\nabla w - \rho T\nabla s,$$

si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) = -(v^2/2)\nabla(\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v} \cdot \nabla(v^2/2 + w) + \rho T \rho\mathbf{v} \cdot \nabla s.$$

Dal primo principio della termodinamica otteniamo (ricordare che tutte le grandezze sono definite per unità di massa)

$$\rho d\epsilon = \rho T ds + (P/\rho)d\rho,$$

e quindi

$$d(\rho\epsilon) = \rho d\epsilon + \epsilon d\rho = \rho T ds + (P/\rho + \epsilon)d\rho = \rho T ds + w d\rho,$$

e infine

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s - w \nabla(\rho\mathbf{v}),$$

dove si sono usate l'equazione di continuità per la massa e per l'entropia.

Riunendo le espressioni trovate si arriva alla seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon \right) \right] = -\nabla \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right]. \quad (1.10)$$

Come si vede, si ha ancora una forma simile all'equazione di continuità. Infatti al primo membro abbiamo la derivata temporale (euleriana) della densità di energia, mentre al secondo membro abbiamo la divergenza di un vettore che è legato al flusso del vettore $\rho(\frac{1}{2}v^2 + w)\mathbf{v}$. A differenza però di quanto avviene nel caso dell'equazione di continuità per la massa, tale vettore non è semplicemente il prodotto di \mathbf{v} con la densità di energia: la quantità ϵ è sostituita dalla quantità $w = \epsilon + P/\rho$. Il motivo è semplice: l'energia all'interno del volume può variare non solo perchè vi è un flusso di energia attraverso le pareti, ma anche per effetto del lavoro compiuto dalle forze di pressione. Quest'ultimo infatti è pari a

$$- \int_S P \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

che trasformato in integrale di volume dà

$$- \int_V \nabla(P\mathbf{v}) dV = - \int_V \nabla[\rho\mathbf{v}(P/\rho)] dV,$$

cioè esattamente il termine aggiunto a secondo membro.

1.5 Le equazioni della meccanica dei fluidi in forma conservativa

E' utile scrivere le equazioni della meccanica dei fluidi in forma *conservativa*. Con questo si intende che le equazioni assumano la forma:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

nel caso scalare, oppure

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} R_{ik} = 0$$

nel caso vettoriale.

L'equazione di continuità per la massa (Eq. (??)) è già scritta in forma conservativa e così pure quella per la conservazione dell'energia (Eq. (??)). Si è già notato che \mathbf{J} può non coincidere con \mathbf{v} . Le equazioni di continuità e di moto possono essere riunite in una equazione in forma conservativa, legata alla conservazione dell'impulso. Infatti, se calcoliamo la derivata temporale della densità di impulso $\rho\mathbf{v}$, otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k),$$

dove si è fatto uso dell'equazione di continuità e dell'equazione di moto. La precedente espressione suggerisce di definire un *tensore di pressione*

$$P_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k,$$

che consente di scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik}. \quad (1.11)$$

1.6 Cenno sugli effetti non ideali

Se l'approssimazione di fluido perfetto si rivela non corretta, bisogna tener conto dell'interazione fra particelle fluide. Un esempio è dato da un *fluido viscoso*. Esempi noti di tali fluidi sono il miele o il catrame fuso. In un fluido viscoso se due strati adiacenti hanno velocità differenti viene ad esercitarsi una forza tra i due strati che tende a rallentare quello più veloce e ad accelerare quello più lento. In altri termini, la presenza della viscosità tende a riportare il sistema verso uno stato in cui non esistono più gradienti di velocità. Se il moto avviene lungo l'asse x e la velocità si scrive nella forma $\mathbf{v} = v(z)\mathbf{e}_x$, si può dimostrare che la forza viscosa, diretta lungo z è proporzionale a

$$\nu \frac{\partial v(z)}{\partial z},$$

Nella condizioni prevalenti in astrofisica il *coefficiente di viscosità*, ν è estremamente piccolo e quindi gli effetti viscosi possono essere trascurati, **se i gradienti di velocità non sono troppo elevati**.

Analoghe considerazioni valgono per il fenomeno della conduzione termica che è operativo in presenza di gradienti di temperatura, $\nabla T \neq 0$. In questo caso il flusso di calore, che tende a riportare le temperature degli strati di fluido interagenti ad un valore comune, risulta proporzionale a $\kappa \nabla T$, con κ coefficiente di conduzione termica. Vista la piccolezza di κ , gli effetti conduttivi sono normalmente trascurabili, a meno di non essere in presenza di forti gradienti termici. Infine, è interessante il caso delle perdite radiative: l'energia radiante prodotta in uno strato del fluido viene trasportata dai fotoni negli strati adiacenti e tende a cancellare i gradienti di temperatura. Conduzione e radiazione sono due processi *diffusivi* assai simili, con la fondamentale differenza che nel caso conduttivo sono gli elettroni i responsabili del trasporto dell'energia, mentre nel caso del trasporto radiativo tale ruolo viene svolto dai fotoni. Si osservi che i processi di trasporto, viscoso, conduttivo e radiativo, portano ad una redistribuzione dell'energia all'interno del sistema considerato. Nel caso in cui il sistema sia racchiuso in un volume finito (es.: una stella) circondato dal vuoto gli effetti radiativi costituiscono delle vere e proprie perdite, che debbono essere in qualche modo compensate, se il sistema si trova in uno stato stazionario.

La presenza di meccanismi legati a processi *irreversibili*, quali quelli sopra discussi porta a delle modifiche delle equazioni fondamentali della meccanica dei fluidi. Anche se la trattazione di questi processi esula dallo scopo del corso, vale la pena di considerare le modifiche all'equazione di moto indotte dalla presenza della viscosità. Si parla in questo caso dell'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

dove si è supposto che le sole forze non legate alla pressione siano quelle viscoso. Introducendo il vettore vorticità, ω l'equazione di moto (??), assume la forma :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega + \nabla^2 \mathbf{v}).$$

L'importanza degli effetti viscosi è misurata dal rapporto tra i due termini a secondo membro della precedente equazione. Da una semplice analisi dimensionale ricaviamo che il rapporto tra il primo e il secondo membro è dato da:

$$R = \frac{UL}{\nu},$$

dove U ed L sono rispettivamente dei valori tipici per le velocità e le scale di lunghezza. La quantità R vien detta *numero di Reynolds*. Se $R \lesssim 1$, domina il termine viscoso e il moto ha le caratteristiche di un flusso regolare. Si parla in questo caso di un *moto laminare*. Se viceversa $R \gtrsim 1$, il moto diviene più irregolare, incominciano a formarsi dei vortici e il flusso tende diventare caotico: siamo in presenza di un *moto turbolento*. Studi sperimentali hanno permesso di stabilire che la transizione ad un moto completamente turbolento avviene nell'intorno di $R = 1000$.

La teoria della turbolenza è un argomento di notevole difficoltà, ancora solo parzialmente compreso. D'altra parte, visto che buona parte dei fluidi di importanza astrofisica presentano valori bassissimi per la viscosità ($R \gg 1$) si comprende facilmente come lo studio della turbolenza occupi un posto di grande rilievo nella ricerca.

2 Studio delle onde

Definiamo onde dei disturbi che si propagano. Anche le onde stazionarie si possono interpretare come sovrapposizione di due onde che si propagano in direzioni opposte. Le onde sono il modo in cui un sistema fluido reagisce alle sollecitazioni. Sistemi con condizioni di equilibrio differenti reagiscono con differenti tipi di onde. Le onde sono quindi conseguenza della somma di due forze:

1. Il disturbo.
2. La reazione del sistema al disturbo (Reazione antagonista).

In natura le onde si possono osservare di molte specie e in molte occasioni (onde del mare, onde acustiche, vibrazioni, onde sismiche...) ma le possiamo suddividere in due classi ben definite in base alla loro ampiezza:

1. *Onde piccole o lineari*. Le equazioni che le descrivono sono lineari.
2. *Onde grandi o non lineari*. Le equazioni che le descrivono sono non lineari.

Trattiamo ora soltanto le onde lineari; il caso di quelle non lineari (onde d'urto) sarà esaminato in seguito. Poichè le equazioni della meccanica dei fluidi sono non lineari, procederemo utilizzando la teoria delle piccole perturbazioni. Supponiamo cioè di conoscere una soluzione *imperturbata*, tipicamente una soluzione di equilibrio statico, delle equazioni fluide e determiniamo la dinamica del sistema quando essa venga *perturbata*, cioè quando lo stato del sistema si scosti poco dalle condizioni di equilibrio. Questo procedimento consente di linearizzare le equazioni, cioè di passare da un sistema non lineare ad un sistema lineare a cui si possono quindi applicare i metodi standard di soluzione. Lo stato imperturbato è definito dalle condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \mathbf{v} = 0.$$

Le perturbazioni a tutte le quantità saranno quindi definite come:

$$f = f_o + \epsilon f_1 \quad (\epsilon \ll 1),$$

dove sono state indicate con il pedice $_o$ le quantità all'equilibrio. Le perturbazioni sono sempre trascurabili rispetto alle quantità all'equilibrio tranne che per la velocità del fluido che all'equilibrio è supposta nulla ($\mathbf{v} = \epsilon \mathbf{v}$). Per linearizzare le varie equazioni si sostituisce a ciascuna variabile il suo sviluppo perturbativo, separando poi i termini di ordine zero in ϵ da quelli di ordine uno (in quanto non possono compensarsi a vicenda nelle equazioni e quindi devono essere nulli entrambi) e trascurando i termini di ordine superiore. Partiamo quindi dalle equazioni fluide:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla P$$

L'equazione di continuità diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o + \epsilon \rho_1) + \nabla \cdot [(\rho_o + \epsilon \rho_1) \epsilon \mathbf{v}] = 0,$$

e quindi, fino al primo ordine in ϵ ,

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \epsilon \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{v}) \right] = 0$$

Da cui, separando i vari ordini, si ottiene:

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_o \mathbf{v}) = 0$$

Facciamo la stessa cosa con l'equazione di moto; il primo membro dell'equazione di ordine zero ha tutti termini in \mathbf{v} e quindi è nullo:

$$0 = -\nabla P + \mathbf{f}$$

Se per il momento si suppone che agiscano sole le forze legate alla pressione, si ottiene $P_0 = \text{costante}$, mentre al primo ordine si ha:

$$\rho_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P_1$$

Manca da trattare solo l'equazione dell'energia. Supponiamo che il gas sia un gas perfetto. L'espressione dell'entropia è quindi

$$s = c_V \ln(P \rho^{-\gamma}).$$

Nel caso di processi adiabatici l'equazione dell'energia è semplicemente:

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

,

Considerando $s = s_o + s_1$, dove si è conglobata la quantità ϵ in s_1 , si sviluppa la derivata totale:

$$\frac{d(s_o + s_1)}{dt} = \frac{\partial(s_o + s_1)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(s_o + s_1) = 0$$

Il termine contenente \mathbf{v} non dà contributi di ordine zero e quindi:

$$\frac{\partial s_o}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_o = 0$$

Dobbiamo adesso identificare s_o e s_1 :

$$s = c_V \ln \left\{ (P_o + P_1)(\rho_o + \rho_1)^{-\gamma} \right\} = c_V \ln \left\{ P_o \rho_o \left(1 + \frac{P_1}{P_o} \right) \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_o} \right)^{-\gamma} \right\}$$

Sviluppando in serie fino al primo ordine si ha:

$$s = c_V \ln \left\{ P_o \rho_o^{-\gamma} \left(1 + \frac{P_1}{P_o} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} \right) \right\}$$

Ma per $x \ll 1$ $\ln(1+x) \simeq x$ e quindi:

$$s \simeq c_V \left\{ \ln(P_o \rho_o^{-\gamma}) + \frac{P_1}{P_o} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} \right\} = c_V \ln(P_o \rho_o^{-\gamma}) + \frac{1}{P_o} \left(P_1 - \gamma P_o \frac{\rho_1}{\rho_o} \right)$$

Chiamando $c_s^2 = \gamma \frac{P_o}{\rho_o}$ e identificando con s_o il termine $c_V \ln(P_o \rho_o^{-\gamma})$ e con s_1 l'altro si ottiene la forma linearizzata per l'energia:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P_o - c_s^2 \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_o \right\} = 0$$

Vogliamo ora riunire tutto il sistema in un'unica equazione per la velocità \mathbf{v} . Per raggiungere questo risultato si deriva l'equazione di moto rispetto al tempo e poi, sfruttando anche le equazioni di ordine 0, si sostituiscono tutte le variabili diverse da \mathbf{v} per cui arrivando infine a scrivere:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\gamma - 1) \mathbf{g} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \quad (2.1)$$

2.1 Onde sonore

Supponendo che il problema sia piano-parallelo, cioè tutte le quantità variano al variare della sola coordinata x . Supponiamo inoltre che sia $\mathbf{g} = 0$ e che il sistema sia isoterma, $T = \text{costante}$. L'Eq. (??) si riduce a quella per la sola componente x della velocità. Poniamo dunque $\mathbf{v} = v(x)\mathbf{e}_x$ e ricaviamo dalla (??)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2)$$

Il termine c_s^2 dipende solo dalla temperatura ed è quindi una costante. Vediamo dunque che v obbedisce all'*equazione delle onde* che ha come soluzione:

$$v = f(x - c_s t) + h(x + c_s t),$$

dove f e h sono funzioni *arbitrarie* del loro argomento. $f(x - c_s t)$ rappresenta un disturbo che si propaga senza deformazione nella direzione positiva dell'asse delle x con velocità c_s . Analogamente, $h(x + c_s t)$ rappresenta un disturbo che si propaga senza deformazione nella direzione negativa dell'asse delle x con velocità c_s . Si osservi tuttavia che se sia f che h sono diverse da zero, il disturbo composto viene deformato durante la propagazione, come sarà illustrato tra poco. Poiché la velocità della particella fluida, \mathbf{v} , è parallela alla direzione di propagazione dell'onda, quest'ultima viene detta *onda longitudinale*. c_s prende il nome di *velocità del suono* nel mezzo considerato.¹ Si noti come, dipendendo da γ , c_s dipenda anche dal tipo di atomi che compongono il fluido: un atomo con simmetria sferica assorbe meno energia per attivare i suoi gradi di libertà rispetto ad un atomo biatomico. Vogliamo ora dimostrare che, se $\rho_0 = \text{costante}$, la perturbazione di densità, ρ_1 può essere espressa come:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{c_s} [f(x - c_s t) - h(x + c_s t)]$$

Sostituendo nell'equazione di continuità $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = 0$ si ottiene:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{c_s} [c_s f' + h' c_s] = -\rho_0 (f' + h'),$$

$$\nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = \rho_0 (f' + h'),$$

e quindi:

$$\rho_0 (f' + h') - \rho_0 (h' + f') = 0$$

Si vuole ora determinare la forma funzionale di h e f dalla conoscenza delle condizioni iniziali.

¹La velocità del suono corrisponde alla velocità con cui un sistema comunica con le sue parti, equivale quindi alla velocità con cui si propagano i disturbi.

$$v(x; 0) = f(x) + h(x)$$

$$\rho_1(x; 0) = \frac{\rho_o}{c_s} [f(x) - h(x)]$$

Si può ricavare la f moltiplicando l'espressione $v(x; 0)$ per $\frac{\rho_o}{c_s}$ e sommandola all'espressione per $\rho_1(x; 0)$ ottenendo:

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{c_s}{\rho_o} \left[\frac{\rho_o}{c_s} v(x; 0) + \rho_1(x; 0) \right]$$

La h si ricava, invece, sottraendo. Se la forma delle perturbazioni al tempo zero è nota, è determinata la forma funzionale di f e h . Per conoscere il valore di queste funzioni ad un generico tempo t è sufficiente sostituire $x \pm c_s t$ a x nelle loro espressioni al tempo $t = 0$. Per fare un esempio, supponiamo che $v(x; 0) = 0$. Allora:

$$f \propto \rho_1(x; 0) \quad h \propto -\rho_1(x; 0)$$

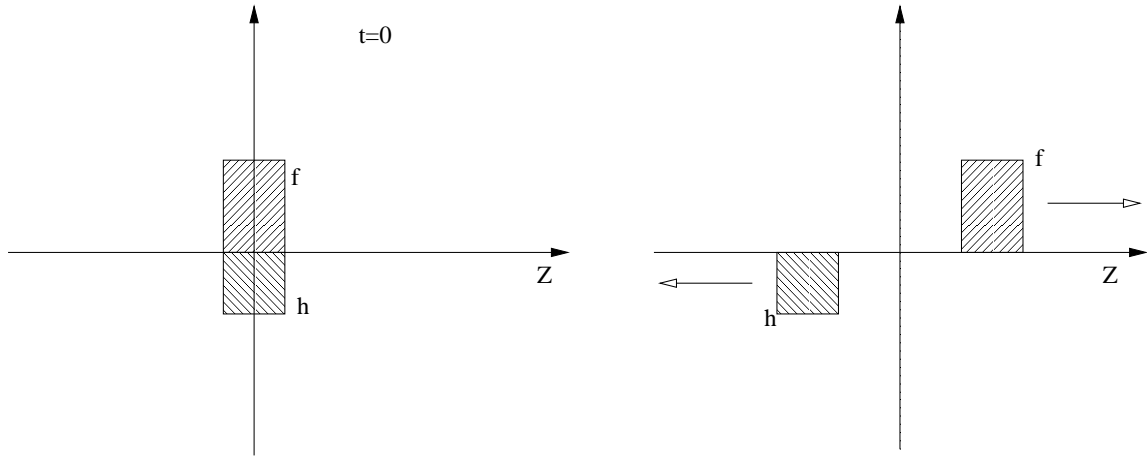


Figura 1:

Come si vede, il profilo della velocità cambia continuamente durante la propagazione. Abbiamo detto che la velocità del suono in un gas perfetto dipende solo dalla temperatura infatti:

$$c_s^2 = \gamma \frac{P_o}{\rho_o} = \gamma \frac{k_B n_o T}{n_o m} = \gamma \frac{k_B T}{m}$$

Si noti la somiglianza con la velocità termica $v_{th} \propto (3k_B T/m)$. Nell'aria la velocità del suono risulta essere $c_s \simeq 320\text{m/s} \simeq 1200\text{Km/h}$. Se c'è una variazione di densità allora il fluido non può essere incomprimibile e quindi $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$. Per quanto riguarda l'energia l'equazione al primo ordine:

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_0 = 0$$

Se sia P_0 che ρ_0 sono costanti, l'equazione dell'energia si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P_1}{P_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) = 0$$

Quindi s_1 è costante e, con una opportuna scelta delle condizioni iniziali, si può scrivere:

$$P_1 - c_s^2 \rho_1 = 0$$

L'equazione dell'energia ci dice quindi che le forze di richiamo, cioè quelle che nel sistema reagiscono al disturbo, sono legate alla pressione e quindi le onde generate sono onde di pressione. Per rendersi conto della sensibilità dell'orecchio umano, si pensi che un frastuono insopportabile produce appena una perturbazione dell'0.5% della densità dell'aria, ciò che giustifica l'uso di una teoria perturbativa in acustica.

2.2 Il metodo di Fourier

Consideriamo dapprima una generica funzione $f(x)$ della coordinata spaziale x e la sua trasformata di Fourier, $\tilde{f}(k)$, definita da (vedi (??)) :

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.3)$$

$f(x)$ è detta *antitrasformata* di Fourier della $f(k)$ ed è evidentemente data da (vedi (??)) :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (2.4)$$

Per comprendere la relazione tra una funzione e la sua trasformata consideriamo dapprima lo speciale caso in cui la $f(x)$ è un'onda piana con lunghezza d'onda $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, infinitamente estesa e di ampiezza costante:

$$f(x) = A e^{ik_0 x}.$$

La sua trasformata di Fourier è data da:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(k_0-k)x} dx = \delta(k_0 - k),$$

Vediamo quindi che mentre la funzione non identifica nessuna particolare regione dello spazio delle x , la trasformata è localizzata con infinita precisione nello spazio delle k . Se volessimo prendere in esame una funzione maggiormente localizzata nello spazio delle x , potremmo considerare un pacchetto d'onde, per esempio un pacchetto gaussiano:

$$f(x) = f_0 e^{-a^2 x^2} e^{ik_0 x}. \quad (2.5)$$

Si tratta sostanzialmente di un'oscillazione di lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k_0$ la cui ampiezza è modulata da una funzione gaussiana. Il parametro a è dà una misura della larghezza della gaussiana: nel punto $x_0 = 1/a$ il valore della gaussiana è pari a f_0/e . La trasformata di Fourier della (??) è data da:

$$\tilde{f}(k) = \frac{f_0}{2a\sqrt{\pi}} e^{-(k-k_0)^2/4a^2}. \quad (2.6)$$

Come si vede la trasformata è ancora una gaussiana, che vale $1/e$ del suo valore massimo in $k - k_0 = 2a$. Possiamo ora definire la regione di localizzazione del pacchetto come:

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle 2x \langle x \rangle \rangle + \langle \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= \langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove si è tenuto conto che $\langle x \rangle = 0$. Definendo in maniera analoga $\langle (\Delta k)^2 \rangle$, ed eseguendo gli integrali, si trova facilmente che

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle = 1/4.$$

Nel caso più generale di un pacchetto non gaussiano, si può dimostrare che la precedente uguaglianza si trasforma nella disuguaglianza:

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle \geq 1/4. \quad (2.8)$$

Possiamo riassumere questi risultati dicendo che tanto più una funzione è localizzata nello spazio delle x , tanto meno è localizzata la sua trasformata nello spazio delle k . Questa proprietà delle trasformate di Fourier ricorda da vicino il Principio di Indeterminazione di Heisenberg. Se infatti $f(x)$ rappresentasse la posizione di una particella, ricordando che in meccanica quantistica l'impulso è definito dalla relazione $p = \hbar k$ e moltiplicando la (??) per \hbar si vede che essa equivale a $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$.

Tutte le espressioni precedenti sono facilmente generalizzabili al caso in cui $f = f(\mathbf{r}, t)$:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega, \quad (2.9)$$

e

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt, \quad (2.10)$$

dove \mathbf{k} e ω sono quantità reali. La (??) rende evidente il significato fisico della trasformata di Fourier: la funzione data viene considerata come una sovrapposizione di onde elementari, rappresentate dal fattore $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, con un'ampiezza data da $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$. La quantità

$$\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k \left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k - \frac{\omega}{k} t \right) \quad (2.11)$$

viene detta fase dell'onda.

La (??) mostra che per ogni onda elementare lo spazio e il tempo compaiono solo nella combinazione $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k - \frac{\omega}{k} t)$. I piani $\Phi = \text{costante}$ si muovono dunque nella direzione di \mathbf{e}_k con velocità

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k. \quad (2.12)$$

Per determinare $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$ è sufficiente conoscere la $f(\mathbf{r}, t)$ al tempo $t = 0$. Infatti, scrivendo $f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, 0) \delta(t)$ nell'integrando della (??), otteniamo un'espressione per le componenti di Fourier, che, introdotta nella (??), ci fornisce l'espressione di $f(\mathbf{r}, t)$ per $t \neq 0$.

Si può descrivere l'insieme di queste operazioni dicendo che l'ampiezza iniziale di ciascuna onda elementare è trasportata con la velocità di fase caratteristica di tale onda, data dalla (??). Ad ogni istante il profilo della $f(\mathbf{r}, t)$ viene ricostruito sommando il contributo di tutte le onde elementari. Poichè, in generale, la velocità di fase è diversa per le diverse onde elementari, il profilo ricostruito al tempo t risulterà modificato rispetto al profilo iniziale: è questo il fenomeno della dispersione. Se tuttavia la velocità di fase è la stessa per tutte le onde elementari, non si avrà distorsione del profilo.

Se esaminiamo criticamente la procedura descritta ci rendiamo però conto che da un lato non abbiamo mai specificato la dinamica del fenomeno e dall'altro non sappiamo quale significato attribuire al parametro ω quando determiniamo la $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$ a partire dalle condizioni iniziali, visto che ω di fatto scompare dal risultato dell'integrale nella (??). Questi due aspetti sono legati tra loro, come ora vedremo.

Abbiamo supposto che la $f(\mathbf{r}, t)$ sia la soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea nelle variabili \mathbf{r} e t . Essa conterrà dunque gli operatori ∇ e $\partial/\partial t$. Scrivendo la $f(\mathbf{r}, t)$ nella forma (??) ci si rende immediatamente conto che

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega \tilde{f}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega,$$

e, analogamente;

$$\nabla f = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{i}\mathbf{k}\tilde{f})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d\mathbf{k}d\omega.$$

Dunque, a livello delle trasformate, gli operatori ∇ e $\partial/\partial t$ sono semplicemente i moltiplicatori $\mathbf{i}\mathbf{k}$ e $-\mathbf{i}\omega$. Questo risultato vale anche per applicazioni ripetute di tali operatori, $\partial^2 f/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2\tilde{f}$, o per le formule del calcolo vettoriale se f è un vettore, $\nabla \cdot \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{f}}$ e così via.

Di conseguenza, l'equazione differenziale omogenea nello spazio (\mathbf{r}, t) che possiamo scrivere simbolicamente nella forma:

$$D(\nabla, \partial/\partial t) f = 0, \quad (2.13)$$

nello spazio delle trasformate (\mathbf{k}, ω) diviene:

$$D(\mathbf{i}\mathbf{k}, -\mathbf{i}\omega) \tilde{f} = 0. \quad (2.14)$$

Nello spazio delle trasformate dobbiamo quindi risolvere un'equazione *algebraica* invece di un'equazione *differenziale*, ciò che rappresenta un indubbio vantaggio. D'altra parte, sappiamo che la condizione per avere una soluzione non identicamente nulla della (??) è

$$D(\mathbf{i}\mathbf{k}, -\mathbf{i}\omega) = 0.$$

La precedente equazione, detta *relazione di dispersione*, stabilisce il legame tra ω e \mathbf{k} di cui avevamo bisogno. In generale, la relazione di dispersione possiede un numero finito di soluzioni discrete (dette *modi normali*):

$$\omega = \omega_\alpha(\mathbf{k}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (2.15)$$

Possiamo introdurre formalmente la condizione $D(\mathbf{i}\mathbf{k}, -\mathbf{i}\omega) = 0$ nella (??) scrivendo:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha=1}^N \tilde{f}_\alpha(\mathbf{k})\delta[\omega - \omega_\alpha(\mathbf{k})],$$

con le ω_α date dalla (??). Eseguendo l'integrale in $d\omega$ nella (??) troviamo che la soluzione generale del nostro problema può essere scritta nella forma:

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{k})e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_\alpha(\mathbf{k})t]}d\mathbf{k}. \quad (2.16)$$

I risultati precedenti si generalizzano facilmente al caso in cui si debbano considerare grandezze vettoriali. La (??) in tal caso diviene

$$D(\nabla, \partial/\partial t) \mathbf{f} = 0,$$

dove D è un tensore e la (??) si scrive ora

$$\tilde{D}(\mathbf{i}\mathbf{k}, -\mathbf{i}\omega) \text{vec} \tilde{f} = 0.$$

La condizione per avere soluzioni non nulle, cioè la relazione di dispersione, è ora data da :

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \text{Det}[\tilde{D}(i\mathbf{k}, -i\omega)] = 0. \quad (2.17)$$

Ad ogni soluzione della relazione di dispersione è associato un *autovettore* $\tilde{\mathbf{f}}$ che caratterizza quel particolare modo di propagazione.

Ritornando ora al problema delle onde sonore, applichiamo il metodo di Fourier alla sua soluzione. Siccome i coefficienti dell'equazione (??) sono costanti, potremo effettuare uno sviluppo di Fourier sia rispetto al tempo che rispetto alla coordinata spaziale x :

$$v(x; t) = \int \hat{v}(k; \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega$$

Sostituendo nell'equazione delle onde si ottiene:

$$\int \hat{v}(k; \omega) [-\omega^2 + c_s^2 k^2] e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega = 0$$

Essendo questa un'identità che deve valere per qualsiasi \hat{v} , l'unica soluzione possibile è che il termine fra parentesi quadre sia nullo e quindi:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm k c_s,$$

che costituisce la relazione di dispersione per le onde sonore. Tenendo conto di tale relazione possiamo scrivere:

$$v(z; t) = \int \hat{v}(k; k c_s) e^{ikx - kc_s t} dk + \int \hat{v}(k; -k c_s) e^{i(kx + kc_s t)} dk$$

Gli integrali possono essere riscritti come:

$$\int \hat{v}(k; \pm c_s k) e^{ik(x \pm c_s t)} dk.$$

Questo integrale semplicemente la rappresentazione di Fourier di una generica funzione di argomento di argomento $x \pm c_s t$ e ritroviamo quindi il ben noto risultato per le soluzioni dell'equazione delle onde. Il beneficio immediato nell'utilizzare al posto della funzione la sua trasformata e quello di trasformare un sistema di equazioni differenziali ordinarie in un sistema algebrico lineare:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \quad (-\omega^2 + k^2 c_s^2) \hat{v}(k; \omega) = 0$$

Il fatto che la relazione di dispersione, $\omega = \pm k c_s$, sia lineare ci dice che la forma della perturbazione non cambia durante la dinamica del sistema: infatti la velocità di fase è uguale per tutte le componenti della trasformata di Fourier e quindi quando si passa all'antitrasformata si ricostruisce esattamente il profilo iniziale. Se la relazione di dispersione non fosse lineare ogni componente della trasformata di Fourier avrebbe una velocità diversa e il pacchetto cambierebbe di forma durante la propagazione.

Nelle onde sonore la velocità del disturbo è parallela alla direzione in cui cambia l'ampiezza dell'onda: si tratta di *onde longitudinali*. Il caso delle onde del mare è invece quello delle *onde trasverse* dove la velocità di propagazione del disturbo è perpendicolare alla direzione di variazione del disturbo.

2.3 Velocità di fase e velocità di gruppo

Abbiamo definito la velocità di fase come la velocità di propagazione delle onde elementari, $\mathbf{v}_f = (\omega/k)\mathbf{e}_k$. E' facile rendersi conto che questa velocità non può essere associata ad alcun effetto fisico, in particolare alla trasmissione di segnali o al trasferimento di energia. Infatti, le onde elementari hanno un'ampiezza costante e sono infinitamente estese nello spazio. Quindi il loro moto con velocità \mathbf{v}_f non può produrre nulla di fisicamente osservabile, poiché la situazione rimane identica a se stessa al passare del tempo. Quindi, anche se la velocità di fase divenisse maggiore di c , questo non costituirebbe una violazione dei principi della relatività, che stabiliscono che la velocità della luce è un limite superiore per la velocità di qualunque *segnale*.

Diverso è il caso di un pacchetto d'onde che distingue una particolare regione dello spazio dalle altre. Un eventuale movimento del pacchetto sarà quindi osservabile e potrà essere associato a effetti fisici. La velocità con cui si muove un pacchetto d'onde è detta *velocità di gruppo*. Per ottenere un'espressione della velocità di gruppo, consideriamo un pacchetto che rappresenti un treno d'onde di lunghezza finita, quale, ad esempio, il pacchetto gaussiano considerato in precedenza. Supponiamo inoltre che lo spettro del pacchetto, cioè l'insieme dei vettori d'onda che lo rappresentano nello spazio delle k , presenti un picco nell'intorno di un particolare valore k_0 . Nel caso del pacchetto gaussiano, questo avviene quando $a/k_0 \ll 1$. Se questo avviene per uno dei modi normali, l'integrale nella (??) riceverà un contributo solo dai valori di k vicini a k_0 e questo ci autorizza a sviluppare in serie di Taylor intorno a k_0 la quantità $\omega_\alpha(\mathbf{k})$ che compare in tale integrale. Limitandoci ai termini del primo ordine scriveremo, omettendo il pedice α ,

$$\omega(\mathbf{k}) \simeq \omega(\mathbf{k}_0) + \sum_i (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)_i \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right|_{\mathbf{k}_0} = \omega_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{v}_g,$$

dove si è introdotta la quantità

$$\mathbf{v}_g = \left| \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}_0}. \quad (2.18)$$

La (??) (limitandoci ad un solo termine della somma) può ora essere scritta nella forma

$$f(\mathbf{r}, t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{v}_g t)} d\mathbf{k} \right] e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t}.$$

L'espressione in parentesi quadra rappresenta una generica funzione della variabile $(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t)$ e in definitiva potremo scrivere

$$f(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t}.$$

Questa equazione mostra che per ogni modo d'onda (scelto cioè il valore del parametro α nella (??)) la soluzione consiste in un'onda piana infinita, corrispondente ad un vettore d'onda k_0 e frequenza ω_0 che si propaga con la *velocità di fase*, $\mathbf{v}_f = (\omega_0/k_0)\mathbf{e}_k$, la cui ampiezza è modulata dalla funzione $A(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t)$, che si propaga con la *velocità di gruppo*, $\mathbf{v}_g = (\partial \omega / \partial \mathbf{k})_{k_0}$. La velocità di gruppo può essere identificata con la velocità di propagazione dell'energia e pertanto deve risultare $v_g < c$.

3 Onde in un campo gravitazionale

Consideriamo ora l'effetto della gravità sulle onde sonore, utilizzando l'equazione generale ricavata precedentemente:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\gamma - 1) \mathbf{g} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}). \quad (3.1)$$

3.1 Geometria piana.

Consideriamo dapprima il caso semplice di un'atmosfera piano-parallela, isoterma, soggetta a un campo gravitazionale costante. Supporremo inoltre che l'accelerazione di gravità sia diretta lungo l'asse negativo delle z . Avremo quindi:

$$c_s^2 = \text{cost.} \quad \mathbf{g} = (0, 0, -g).$$

I termini di ordine 0 determinano la condizione di equilibrio, cioè:

$$\nabla P_o = \rho_o \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP_o}{dz} = -\rho_o g$$

L'equazione di stato ci fornisce un legame fra la pressione e la densità:

$$P_o = \frac{k_B}{m} \rho_o T_o \quad \Rightarrow \quad \rho_o = \frac{m}{k_B T_o} P_o$$

Da cui:

$$\frac{dP_o}{dz} = -\frac{mg}{k_B T_o} P_o$$

Integrando si ottiene:

$$P(z) = P(0) e^{-\frac{mg}{k_B T_o} z}$$

cioè la pressione diminuisce in modo esponenziale con l'altezza. Come si vede la scala su cui varia la pressione in un'atmosfera isoterma (*scala d'altezza*) è:

$$H_0 = \frac{k_B T}{mg}$$

L'andamento della pressione e della densità sono quindi:

$$\begin{cases} P(z) = P(0) e^{-\frac{z}{H}} \\ \rho(z) = \rho(0) e^{-\frac{z}{H}} \end{cases}$$

Analizziamo ora due casi di propagazione: quello di una propagazione verticale e quello di una propagazione obliqua.

a) propagazione verticale : $\mathbf{v} = v(z, t) \mathbf{e}_z$ In questo caso la (??) si riduce a:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\gamma - 1)g \frac{\partial v}{\partial z} + g \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

cio

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \gamma g \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Se applicassimo il metodo delle trasformate di Fourier otterremmo:

$$(-\omega^2 + k^2 c_s^2 + ik\gamma g) \hat{v} = 0.,$$

e quindi la relazione di dispersione:

$$\omega^2 - k^2 c_s^2 - ik\gamma g = 0,$$

che non ha soluzione se k e ω sono reali. Nell'equazione per la velocità nessuna quantità dipende dalle variabili rispetto cui si trasforma (z e t) e quindi la procedura seguita sembra perfettamente giustificata, ma bisogna considerare che questa equazione è stata ottenuta da un sistema e che, in questo sistema, P e ρ dipendono da z . Quindi non è lecito effettuare una trasformata di Fourier rispetto a z , mentre è legittimo farlo rispetto a t , poiché le quantità di ordine 0 non dipendono dal tempo. Quindi possiamo scrivere la soluzione come:

$$v(z, t) = \hat{v}(z)e^{-i\omega t}$$

In questo modo si riduce l'equazione per la velocità ad un'equazione alle derivate ordinarie nella sola variabile z :

$$-\omega^2 \hat{v} - c_s^2 \hat{v}'' + \gamma g \hat{v}' = 0$$

Questa è un'equazione del secondo ordine con i coefficienti costanti del tipo

$$aY'' + bY' + cY = 0,$$

la cui soluzione

$$Y = Ae^{\delta_1 z} + Be^{\delta_2 z},$$

dove δ_1, δ_2 sono le soluzioni dell'equazione algebrica di secondo grado:

$$a\delta^2 + b\delta + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{1,2} = \frac{1}{2a} \left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right].$$

Nel nostro caso:

$$c_s^2 \delta^2 - \gamma g \delta + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{1,2} = \frac{1}{2c_s^2} \left[\gamma g \pm \sqrt{\gamma^2 g^2 - 4c_s^2 \omega^2} \right]$$

Le soluzioni $\delta_{1,2}$ possono essere anche complesse coniugate se:

$$4c_s^2 \omega^2 > \gamma^2 g^2.$$

Se ci avviene,

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2c_s^2} \left[\gamma g \pm i \sqrt{4c_s^2 \omega^2 - \gamma^2 g^2} \right].$$

Ponendo $k = \sqrt{4c_s^2 \omega^2 - \gamma^2 g^2}$ si arriva alla soluzione:

$$\hat{v} = \exp \left[\frac{\gamma g}{2c_s^2} z \right] (Ae^{ikz} + Be^{-ikz})$$

che sostituita in $v = \hat{v}e^{i\omega t}$ dà:

$$v = \exp \left[\frac{\gamma g}{2c_s^2} z \right] (Ae^{i(kz-\omega t)} + Be^{-i(kz+\omega t)}) \quad (3.2)$$

Si tratta quindi di onde che si propagano con ampiezza crescente con le z . Ricordiamo che questa soluzione è valida sotto la condizione, ricavata dalla positività della radice:

$$\omega^2 > \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^2} = \omega_a^2,$$

dove ω_a è detta *frequenza acustica*, che si pu esprimere nel modo seguente in termini della scala di altezza H_0 :

$$\omega_a = \frac{1}{2} \frac{\gamma g}{c_s} = \frac{1}{2} \frac{\gamma g c_s}{\gamma \frac{k_B T}{m}} = \frac{c_s}{2H_0}$$

Nel caso in cui $4c_s^2 \omega^2 < \gamma^2 g^2$ gli esponenziali nella soluzione sono tutti reali e quindi l'onda non si propaga.

Vediamo ora quale sia il significato della frequenza acustica, che si comporta come una frequenza di taglio. Per creare un'onda è necessario che il periodo dell'onda sia piccolo rispetto al tempo necessario perchè l'atmosfera si adatti ad un nuovo equilibrio. In altre parole, se quando modifichiamo leggermente le condizioni alla base l'atmosfera ha il tempo di riadattarsi alle nuove condizioni di equilibrio prima che queste siano nuovamente variate. non si ha la propagazione di un'onda (che presuppone che solo una parte del sistema, quello raggiunto dalla perturbazione, sia cambiato), ma semplicemente una trasformazione quasi-statica delle condizioni di equilibrio. Il tempo per il riequilibrio dipenderà dalla velocità del suono, che rappresenta la velocità con cui il disturbo si propaga, e dal valore della gravità che si oppone alla propagazione verso l'alto delle perturbazioni. Sarà quindi proporzionale

a c_s e inversamente proporzionale a g e quindi la frequenza sarà $\propto g/c_s \propto \omega_a$. Per avere propagazione ondosa sarà quindi necessario che la perturbazione avvenga in tempi brevi, ossia che la frequenza sia sufficientemente alta e quindi $\omega > \omega_a$.

Se torniamo all'approccio basato sul metodo di Fourier e al problema presentato dalla relazione di dispersione

$$\omega^2 - k^2 c_s^2 - ik\gamma g = 0,$$

ci si può rendere conto che lo si potrebbe risolvere supponendo che il numero d'onda k sia un numero complesso ($k = k_r + ik_i$). In tal caso la relazione di dispersione diviene:

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 + ik\gamma g \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = (k_r^2 - k_i^2 + i2k_r k_i) c_s^2 + ik_r \gamma g - \gamma g k_i$$

Separando la parte reale da quella immaginaria si trovano le due equazioni:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= c_s^2 (k_r^2 - k_i^2) - k_i g \gamma, \\ 0 &= 2c_s^2 k_i k_r + k_r \gamma g \quad \Rightarrow \quad k_i = -\frac{\gamma g}{2c_s^2}. \end{aligned}$$

Quest'ultima, sostituita nella precedente equazione dà:

$$\omega^2 = k_r^2 c_s^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^2} = k_r^2 c_s^2 + \omega_a^2,$$

ritrovando quindi la condizione $\omega > \omega_a$. Si noti però come questo sia un caso fortuito. In genere niente ci garantisce che un procedimento di questo tipo porti a risultati fisicamente sensati.

Il fatto che l'onda cresca in ampiezza mentre sale è dovuto alla conservazione dell'energia, che è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale. Quest'ultima varia periodicamente a causa del moto delle particelle messe in movimento dall'onda. Poichè tale moto è verticale (onda longitudinale!), l'energia potenziale ha una media temporale nulla, ciò che implica che l'energia cinetica si conserva. L'energia cinetica delle particelle associata al passaggio del fronte d'onda sarà proporzionale a $\rho_0 v^2 \propto \rho_0 \xi^2$. Ma via via che l'onda sale, la densità dell'atmosfera decresce e quindi il disturbo deve aumentare la sua ampiezza. Com'è facile verificare, la quantità $\langle \rho_0 \xi^2 \rangle$, dove si è effettuata una media sia sullo spazio che sul tempo, risulta costante se si sostituiscono le espressioni per ρ_0 e ξ precedentemente trovate.

b) propagazione obliqua: $\mathbf{v} = v_x(x, z)\mathbf{e}_x + v_z(x, z)\mathbf{e}_z$ Nessuno dei coefficienti delle equazioni che costituiscono il sistema di partenza dipende dalla coordinata x e quindi una

tale coordinata è ignorabile e possiamo fare uno sviluppo di Fourier lungo x . D'altra parte, nulla è cambiato lungo z e, visto che è stato possibile ottenere il risultato corretto sviluppando in serie di Fourier anche secondo z pur di considerare k_z una quantità complessa, potremo supporre che tutte le quantità del primo ordine contengano un fattore

$$e^{1(k_x x + \hat{k}_z z)},$$

dove si è introdotta la notazione \hat{k}_z per indicare appunto che si tratta di una quantità complessa. Nello scrivere così abbiamo implicitamente supposto che il piano coordinato (x, z) sia definito dai due vettori \mathbf{g} e \mathbf{k} . Nel caso che stiamo considerando quindi:

$$\mathbf{g} = [0, 0, -g] \quad \mathbf{k} = [k_x, 0, \hat{k}_z].$$

Con queste posizioni l'equazione delle onde diviene:

$$-\omega^2 \mathbf{v} = c_s^2 i \mathbf{k} (i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - (\gamma - 1) g \mathbf{e}_z (i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - i \mathbf{k} g v_z$$

Sviluppando questa espressione per componenti si ottiene quindi il sistema:

$$(k_x^2 c_s^2 - \omega^2)v_x + (c_s^2 k_x \hat{k}_z + i k_x g)v_z = 0$$

$$\left[c_s^2 k_x \hat{k}_z + i(\gamma - 1)gk_x \right] v_x + \left[c_s^2 \hat{k}_z^2 - \omega^2 + i\gamma g \hat{k}_z \right] v_z = 0$$

Annullando il determinante dei coefficienti per determinare le condizioni per l'esistenza di soluzioni non nulle troviamo la relazione di dispersione (complessa):

$$\omega^4 - \omega^2 \left[c_s^2 (k_x^2 + \hat{k}_z^2) + i\gamma g \hat{k}_z \right] + (\gamma - 1)g^2 k_x^2 = 0,$$

Sostituendo $\hat{k}_z = k_z + i k_i$, dove ora k_z è una quantità reale, e separando la parte reale da quella immaginaria, si trovano due equazioni:

$$k_i = -\frac{1}{2H} = -\frac{\omega_a}{c_s}$$

$$\omega^4 - \omega^2 \left[c_s^2 (k_x^2 + k_z^2) - \omega_a^2 + 2\omega_a^2 \right] + (\gamma - 1)g^2 k_x^2 = 0$$

Definendo una nuova frequenza caratteristica, detta *frequenza gravitazionale* o *frequenza di Brunt-Vaisala*:

$$\omega_g^2 = (\gamma - 1) \frac{g^2}{c_s^2},$$

si ottiene:

$$\omega^4 - \omega^2 \left[c_s^2 (k_x^2 + k_z^2) + \omega_a^2 \right] + \omega_g^2 k_x^2 c_s^2 = 0. \quad (3.3)$$

Si osservi che

$$\frac{\omega_a}{\omega_g} = \frac{\gamma g}{2c_s} \frac{c_s}{g\sqrt{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{2\sqrt{\gamma-1}} > 1.$$

Quindi la frequenza acustica è sempre maggiore di quella gravitazionale ma il rapporto è sempre vicino a uno. Invece di risolvere l'equazione di dispersione (??) rispetto a ω^2 ,

consideriamola una equazione per k_z^2 che è una quantità positiva poiché k_z è reale. Avremo dunque:

$$k_z^2 = \frac{1}{c_s^2 \omega^2} [\omega^2(\omega^2 - \omega_a^2) - k_x^2 c_s^2 (\omega^2 - \omega_g^2)] \geq 0,$$

e questo implica che

$$0 \leq k_x^2 c_s^2 \leq \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_a^2)}{\omega^2 - \omega_g^2},$$

condizione soddisfatta se $\omega \geq \omega_a$ o $\omega \leq \omega_g$. C'è quindi una banda di frequenza nella quale non ci può essere propagazione del disturbo:

$$\omega_g^2 \leq k_x^2 c_s^2 \leq \omega_a^2.$$

Risolviamo ora la (??) rispetto a ω^2 , ottenendo

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[c_s^2 k^2 + \omega_a^2 \pm \sqrt{(c_s^2 k^2 + \omega_a^2)^2 - 4\omega_g^2 k_x^2 c_s^2} \right] \quad (3.4)$$

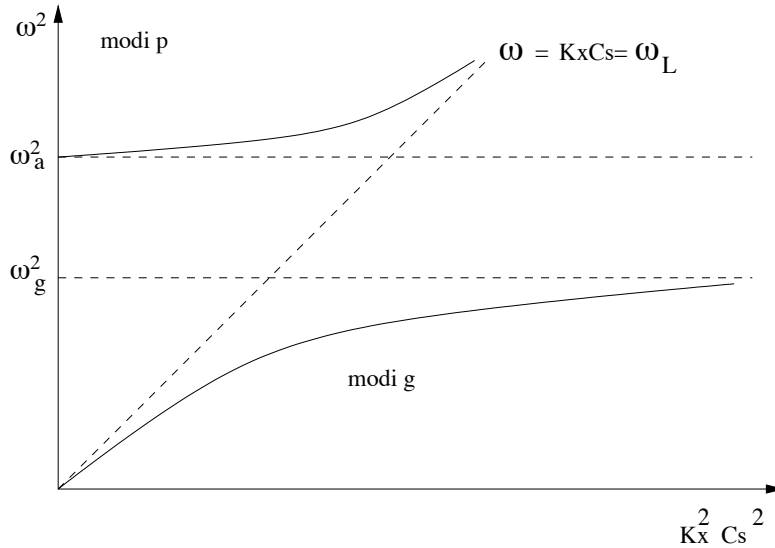


Figura 2: La relazione di dispersione per le onde in un'atmosfera con gravità

Quindi ci può essere propagazione solo dove le frequenze sono simultaneamente:

- Inferiori sia a ω_g che a $k_x c_s$. *Modi g.*
- Superiori sia a ω_a che a $k_x c_s$. *Modi p.*

Questi due modi di propagazione sono fisicamente distinti dalla natura della forza di riequilibrio, nel caso dei modi g si tratta della forza di Archimede, mentre nel caso dei modi p si tratta della pressione.

Le tre frequenze prendono il nome di:

- ω_a *frequenza di taglio acustica*
- ω_g *frequenza di taglio gravitazionale o di Brunt-Vaisala (B-V)*
- $\omega_L = k_x c_s$ *frequenza di Lamb*

In realtà la frequenza di B-V corrisponde alla frequenza di oscillazione di una particella fluida in una atmosfera con gravità, come ora dimostreremo ed è uguale alla frequenza gravitazionale solo nel caso di atmosfera isoterma.

Consideriamo infatti una particella fluida (di fatto, una bolla di fluido) che venga spostata adiabaticamente dalla posizione z a $z + \delta z$. Nella posizione di partenza la densità e pressione della bolla sono ρ_i e P_i , rispettivamente uguali a quelle dell'ambiente circostante (equilibrio!) ρ_e e P_e . Nella posizione finale si avrà

$$\rho_e(z + \delta z) = \rho_e + \delta\rho_e = \rho_e + \left(\frac{d\rho_e}{dz}\right)_z \delta z$$

e

$$\rho_i(z + \delta z) = \rho_i + \delta\rho_i = \rho_i + \frac{\rho_i}{\gamma P_i} \delta P_i,$$

dove si è fatto uso della relazione $P\rho^{-\gamma} = \text{cost}$, valida per trasformazioni adiabatiche. Poichè tutte le grandezze interne sono uguali a quelle esterne in z , potremo scrivere la precedente equazione come:

$$\rho_i(z + \delta z) = \rho_e + \delta\rho_i = \rho_e + \frac{\rho_e}{\gamma P_e} \delta P_e.$$

Utilizzando ora l'equazione dell'equilibrio idrostatico $dP_e/dz = -\rho_e g$, otteniamo infine:

$$\delta\rho_i = -\frac{g}{c_s^2} \rho_e \delta z$$

. La forza che agisce sulla bolla sarà:

$$\mathbf{F} = (\delta\rho_i - \delta\rho_e) \mathbf{g},$$

e quindi

$$F = -(\delta\rho_i - \delta\rho_e)g = \left(\frac{g}{c_s^2} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz}\right) \rho_e \delta z$$

La forza è quindi proporzionale allo spostamento ed il moto è dunque un moto armonico con frequenza

$$N^2 = -g \left(\frac{g}{c_s^2} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz}\right),$$

quando la precedente espressione è una quantità positiva. Utilizzando ora l'equazione di stato $P = (k_B/m)\rho T$, e nuovamente l'equazione per l'equilibrio idrostatico si può esprimere N^2 nella forma :

$$N^2 = \frac{(\gamma - 1)g}{c_s^2} + \frac{g}{T_e} \frac{dT_e}{dz} = \omega_g^2 + \frac{g}{T_e} \frac{dT_e}{dz}.$$

Come si vede, N^2 coincide con ω_g solo nel caso isoterma, mentre nel caso generale si ha un contributo anche da ∇T .

Si noti infine come i modi g non si ammettano una propagazione perfettamente verticale. Infatti in questo caso k_x sarebbe zero e quindi la condizione sulla realtà di k_z diverrebbe:

$$k_z^2 = \frac{1}{c_s^2 \omega^2} \omega^2 (\omega^2 - \omega_a^2)$$

Ma nei modi g , $\omega < \omega_g < \omega_a$ e quindi la propagazione verticale non è possibile.

3.2 Onde radiali in sistemi autogravitanti.

Studiamo adesso un caso più concreto di propagazione delle onde in un sistema autogravitante. Si utilizza un approccio di tipo Lagrangiano con:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_o + \xi(t) \quad \xi(0) = 0$$

Trattandosi di un problema a simmetria sferica la particella fluida che seguiamo lungo l'evoluzione del sistema è una buccia sferica infinitamente sottile. Per identificare un guscio si può usare la sua coordinata radiale, ma questa non è la sola possibilità. Infatti, considerato che la funzione per la massa:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

è monotona crescente e quindi invertibile si può definire un guscio in base alla massa che contiene. Si cambiano quindi le variabili da $(r_o; t)$ a $(m; t)$, mentre le derivate divengono:

$$\frac{\partial}{\partial r_o} = \frac{\partial m}{\partial r_o} \frac{\partial}{\partial m} = 4\pi r_o^2 \rho_o \frac{\partial}{\partial m}$$

Si osservi che in questo schema la variabile indipendente è m , mentre r diviene una variabile dipendente $r = r(m, t)$. Il significato fisico di r è quindi la posizione all'istante t del guscio sferico che include la massa m . Scriviamo adesso l'equazione dell'equilibrio in queste nuove variabili:

$$\frac{\partial P_o}{\partial r_o} = -G \frac{m\rho}{r_o^2} \quad \Rightarrow \quad 4\pi r_o^2 \rho \frac{\partial P_o}{\partial m} = -G \frac{m\rho}{r_o^2}$$

Si ha quindi un vantaggio immediato, ovvero scompare dall'equazione la densità.

$$\frac{\partial P_o}{\partial m} = -G \frac{m}{4\pi r_o^4} \quad (3.5)$$

Scriviamo l'equazione di moto nello schema Lagrangiano:

$$\rho_o \frac{dv}{dt} = \rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{Gm\rho}{r^2}$$

Si considerano le quantità all'equilibrio più le loro variazioni al primo ordine:

$$\rho = \rho_o + \rho_1 \quad r = r_o + \xi \quad etc...$$

Da cui:

$$\begin{aligned} (\rho_o + \rho_1) \frac{\partial^2 (r_o + \xi)}{\partial t^2} &= -m \frac{\partial (P_o + P_1)}{\partial r} - \frac{Gm(\rho_o + \rho_1)}{(r_o + \xi)^2} = \\ &= -4\pi r_o^2 \rho \frac{\partial}{\partial m} (P_o + P_1) - \frac{Gm(\rho_o + \rho_1)}{(r_o + \xi)^2} \end{aligned}$$

Poichè le quantità con pedice $_o$ non dipendono dal tempo la precedente equazione diviene:

$$(\rho_o + \rho_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -4\pi r_o^2 \rho_o \left(1 + \frac{\xi}{r_o}\right)^2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_o}\right) \frac{\partial}{\partial m} (P_o + P_1) - G \frac{m\rho_o \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_o}\right)}{r_o^2 \left(1 + \frac{\xi}{r_o}\right)^2}$$

Separando i termini di ordine zero da quelli di ordine 1, si ottiene:

all'ordine 0

$$0 = 4\pi r_o^2 \rho \frac{\partial P_o}{\partial m} - \frac{Gm\rho_o}{r_o^2}$$

e all'ordine 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -4\pi r_o^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_o} + \frac{2\xi}{r_o} \right) \frac{\partial P_o}{\partial m} - 4\pi r_o^2 \frac{\partial P_1}{\partial m} - G \frac{m}{r_o^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_o} - \frac{2\xi}{r_o} \right) = \\ &= -4\pi r_o^2 \frac{\rho_1}{\rho_o} \left(\frac{\partial P_o}{\partial m} + G \frac{m}{4\pi r_o^4} \right) - 8\pi r_o^2 \frac{\xi}{r_o} \left(\frac{\partial P_o}{\partial m} - G \frac{m}{4\pi r_o^4} \right) - 4\pi r_o^2 \frac{\partial P_1}{\partial m} \end{aligned}$$

Sfruttando l'equazione (??) il primo termine fra parentesi tonde è nullo e il secondo lo si può esprimere in funzione del doppio di uno dei due membri della (??):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -16\pi r_o^2 \frac{\xi}{r_o} \frac{\partial P_o}{\partial m} - 4\pi r_o^2 \frac{\partial P_1}{\partial m}$$

Se riuscissimo ad esprimere P_1 in funzione di ξ avremo un'equazione in una sola variabile. Consideriamo l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_o + \rho_o (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right)_m + \rho_o (\nabla \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_1 + \rho_o (\nabla \cdot \xi)] = 0$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_o} = -\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi)$$

Dall'equazione dell'energia:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_m = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \text{cost.}$$

e quindi:

$$S_1 = \frac{P_1}{P_o} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} = 0$$

$$P_1 = \gamma P_o \frac{\rho_1}{\rho_o} = -\gamma P_o \nabla \cdot \mathbf{v} = -\gamma P_o \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi)$$

Che sostituito nell'equazione per il primo ordine:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 4\pi r_o^2 \frac{\partial}{\partial m} \left[\gamma P_o \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi) \right] - 16\pi r_o^2 \frac{\xi}{r_o} \frac{\partial P_o}{\partial m}$$

A questo punto conviene riscrivere l'equazione usando come variabile indipendente r_o ottenendo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial r_o} \left[\gamma P_o \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi) \right] - \frac{4}{\rho_o} \frac{\xi}{r_o} \frac{\partial P_o}{\partial r_o}$$

In questa equazione niente dipende dal tempo, si può quindi sviluppare con Fourier in questa variabile ponendo:

$$\xi(r, t) = \xi(r) e^{-i\omega t}$$

e ottenendo

$$-\omega^2 \rho_o \xi = \frac{\partial}{\partial r_o} \left[\gamma P_o \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi) \right] - 4 \frac{\xi}{r_o} \frac{\partial P_o}{\partial r_o} \quad (3.6)$$

Questa è l'equazione che regola le piccole oscillazioni radiali di un sistema autogravitante sferico.

Consideriamo ora un caso molto particolare (peraltro l'unico che permette una soluzione analitica) e cioè il caso poco realistico di una sfera omogenea, $\rho_o = \text{costante}$. Si avrà allora:

$$m = \int_0^{r_o} 4\pi \rho r^2 dr = \frac{4\pi}{3} r_o^3 \rho_o$$

e l'equazione di ordine 0 si trasforma in:

$$\frac{\partial P_o}{\partial r_o} = -\frac{G\rho_o \frac{4\pi}{3} r_o^3 \rho_o}{r_o^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_o^2 r_o, \quad (3.7)$$

e integrando fra r_o e R :

$$P_o = -\frac{4\pi}{3} G\rho_o^2 \frac{r_o^2}{2} + cost.$$

La costante ha il valore:

$$cost = \frac{4\pi}{6} G\rho_o^2 R^2$$

Per cui:

$$P_o = \frac{2\pi}{3} G\rho_o^2 (R^2 - r_o^2) \quad (3.8)$$

e finalmente

$$-\omega^2 \rho_o \xi = -\frac{\partial}{\partial r_o} \left[\frac{2\pi}{3} \gamma G\rho_o^2 \left(\frac{R^2}{r_o^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi) \right] + \frac{16\pi}{3} G\rho_o^2 \xi.$$

Compriamo adesso un cambio di variabile, passando dalla variabile r_o alla variabile adimensionale x :

$$x = \frac{r_o}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r_o} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$-\omega^2 \rho_o \xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2\pi}{3} \gamma G\rho_o^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \xi) \right] + \frac{16\pi}{3} G\rho_o^2 \xi$$

Riscriviamo quest'ultima equazione in un altro modo:

$$\left[\frac{2\pi}{3} \gamma G\rho_o^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) (x^2 \xi)' \right]' = \frac{1}{x^2} \left(\frac{16\pi}{3} G\rho_o^2 + \omega^2 \rho_o \right) (x^2 \xi)$$

cosicchè l'equazione diviene formalmente uguale a:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] = [q(x) - \lambda r(x)] y. \quad (3.9)$$

Questa equazione è ben nota in fisica matematica e prende il nome di *equazione di Sturm Liouville*, con la costante λ chiamata *autovalore*. Per ottenere delle soluzioni dobbiamo imporre le condizioni al contorno. Tipicamente i problemi di Sturm-Liouville sono legati all'imposizione del passaggio della soluzione per due punti. Supponiamo infatti di scegliere come una delle condizioni iniziali $y(0) = 0$. Se fissassimo, come si fa abitualmente anche il valore della derivata prima in zero, la soluzione sarebbe completamente determinata e senza specificare il valore di λ non avremmo più la libertà per imporre il passaggio nel secondo punto. D'altra parte, nulla si ottiene variando il valore di $y'(0)$. Infatti, essendo l'equazione omogenea in y , un cambiamento della derivata in zero equivale a moltiplicare la soluzione per una costante in quanto nell'intorno di $x = 0$ si ha

$$y(x) = y(0) + xy'(0) = xy'(0).$$

Questo dimostra che solo per particolari valori di λ sarà possibile soddisfare la condizione di passaggio nel secondo punto.

Le soluzioni dell'equazione di S-L ha le seguenti proprietà:

- * Gli autovalori sono una serie discreta e numerabile e come tale possono essere ordinati. Nel nostro l'autovalore dipende dalla frequenza del moto $\lambda(\omega)$ per cui li ordineremo in ordine crescente di ω .

$$\omega_0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \omega_n$$

- * L'autofunzione n-esima ha n zeri nell'intervallo di definizione.
- * Le autofunzioni sono ortonormali fra loro nel senso che :

$$\int y_n(x)y_m(x)r(x)dx = \delta_{nm}$$

Le condizioni al contorno possono aiutare a determinare anche alcune cose, infatti sulla superficie deve valere:

$$P_o(R) = 0$$

poichè è la definizione stessa di superficie. Questo vale anche quando la stella oscilla e quindi:

$$P(R + \xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_o(R + \xi) + P_1(R + \xi) = 0$$

Sviluppando con Taylor:

$$P_o(R) + \xi P'_o(R) + P_1(R) + \xi P'_1(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi P'_o(R) + P_1(R) = 0$$

Abbiamo applicato la definizione di superficie e trascurato i termini di ordine superiore al primo. Da quest'ultima relazione ricaviamo:

$$\xi = -\frac{P_1(R)}{P'_o(R)} = \xi(R) = \text{costante}$$

In questo modo si determina che l'ampiezza dell'oscillazione è costante. Bisogna ricordare che in realtà si esprime come:

$$\xi(r; t) = \xi(r) e^{i\omega t}$$

e quindi il termine oscillante fa sì che $\xi(R, t)$ assuma successivamente valori positivi e negativi, corrispondenti alle fasi di espansione e di contrazione.

Le condizioni al contorno sulla ξ sono:

$$\xi(0) = 0 \quad \xi(R) = 1$$

Si noti che la realtà degli autovalori impone che ω^2 sia reale, ma non necessariamente positivo. ω può quindi essere reale o immaginario puro, a seconda che sia $\omega^2 \gtrless 0$,

$$\begin{aligned} \omega^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm i\nu \\ e^{\pm i\nu} = e^{-\nu} e^{nu} \end{aligned}$$

Si hanno quindi due soluzioni delle quali una è crescente. Questa, per quanto piccola possa essere all'inizio, finirà con l'essere dominante rendendo instabile il sistema. Possiamo sfruttare l'ordinabilità degli autovalori dell'equazione per guardare solo ω_o (che prende il

nome di *frequenza fondamentale*): se questa è positiva allora, essendo la minore, tutte le altre sono positive. Se questa è negativa allora il sistema è instabile anche se fosse l'unica.

Compiamo uno studio di tipo qualitativo dell'equazione generale per le oscillazioni radiali (??). Introduciamo una nuova variabile:

$$\xi \rightarrow \phi = \frac{\xi}{r_o}$$

La (??) prende la forma:

$$\frac{d}{dr_o} \left[\frac{P_o}{r_o^2} \frac{d}{dr_o} (r_o^3 \phi) \right] + \frac{1}{\gamma} \left(\rho_o \omega^2 - \frac{4}{r_o} \frac{dP_o}{dr_o} \right) r_o \phi = 0$$

Agiamo sul primo termine:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr_o} \left[\frac{P_o}{r_o^2} \frac{d}{dr_o} (r_o^3 \phi) \right] &= \left[\frac{P_o}{r_o^2} (3r_o^2 \phi + r_o^3 \phi') \right]' = [3P_o \phi + P_o r_o \phi']' = \\ &= 3P_o' \phi + 4P_o \phi' + r_o P_o' \phi' + P_o r_o \phi'' = 3P_o' \phi + \frac{1}{r_o^3} [(4r_o^3 P_o + r_o^4 P_o') \phi' + P_o r_o^4 \phi''] = \\ &= 3P_o' \phi + \frac{1}{r_o^3} [r_o^4 P_o \phi']' \end{aligned}$$

Per cui si può riscrivere l'intera equazione moltiplicando tutto per r_o^3 come:

$$\begin{aligned} [r_o^4 P_o \phi']' + \frac{r_o^4}{\gamma} \left[\rho_o \omega^2 - \frac{4}{r_o} P_o' + \frac{3\gamma}{r_o} P_o' \right] \phi &= 0 \\ [r_o^4 P_o \phi']' + \frac{r_o^4}{\gamma} \left[\rho_o \omega^2 - \frac{P_o'}{r_o} (4 - 3\gamma) \right] \phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Integrando in dr_o fra 0 e R si ottiene:

$$\int_0^R \frac{d}{dr_o} [r_o^4 P_o \phi'] dr_o = -\frac{1}{\gamma} \int_0^R r_o^4 \left[\rho_o \omega^2 - \frac{P_o'}{r_o} (4 - 3\gamma) \right] \phi dr_o$$

Il primo membro è nullo infatti essendo $\xi(0) = 0$ al massimo ϕ va all'infinito in zero come $\frac{1}{r_o}$ e quindi $r_o^4 \phi|_o = 0$. Quindi affinché l'integrale al secondo membro sia sempre nullo deve valere:

$$\omega^2 = - \frac{\int_0^R P'_o r_o^3 (3\gamma - 4) \phi dr_o}{\int_0^R r_o^4 \rho_o \phi dr_o}$$

Questa è un'espressione formale per ω^2 in quanto ϕ è la soluzione del problema che non conosciamo. Possiamo però riscrivere questa espressione come:

$$\omega^2 = 3 \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) \frac{\int_0^R (-P'_o) r_o^3 \phi dr_o}{\int_0^R r_o^4 \rho_o \phi dr_o}$$

Consideriamo questa espressione nel caso della funzione con ω minore, cioè quella con $n = 0$. Per le proprietà delle autofunzioni dell'equazione di S-L ϕ_o non ha zeri nell'intervallo di definizione. $P'_o < 0$ sempre in quanto la pressione decresce in modo monotono dal centro alla superficie. Si ricava quindi che la frazione composta dai due integrali è sempre positiva e quindi ω_o ha lo stesso segno di $(\gamma - \frac{4}{3})$.

Si ritrovano quindi le condizioni sulla stabilità del sistema:

$\gamma < \frac{4}{3}$ Il sistema è instabile.

$\gamma > \frac{4}{3}$ Il sistema è stabile.

Si noti come, non avendo mai sfruttato fino ad ora la costanza della densità, questo risultato è del tutto generale.

Torniamo ora al caso della sfera omogenea e cerchiamo la soluzione esplicita. Sostituendo la (??) e la sua derivata nella (??) si ottiene:

$$[r_o^4 P_o \phi']' + \frac{r_o^4 \rho_o}{\gamma} \left[\omega^2 + 4\pi G \rho_o \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \right] \phi = 0$$

Utilizzando la variabile adimensionale ottenuta scalando r_o del raggio:

$$x = \frac{r_o}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} = R \frac{d}{dr_o}$$

$$\frac{1}{R} \left[R^4 x^4 \frac{2\pi}{3} G \rho^2 R^2 (1-x^2) \phi' \frac{1}{R} \right]' + \frac{R^4 x^4 \rho}{\gamma} \left[\omega^2 + 4\pi G \rho \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \right] \phi = 0$$

$$\left[x^4 \frac{2\pi}{3} G \rho^2 (1-x^2) \phi' \right]' + \frac{x^4 \rho}{\gamma} \left[\omega^2 + 4\pi G \rho \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \right] \phi = 0,$$

e, poichè la densità è costante:

$$\frac{2\pi}{3} G \rho_o \left[x^4 (1-x^2) \phi' \right]' + \frac{x^4}{\gamma} \left[\omega^2 + 4\pi G \rho_o \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \right] \phi = 0$$

Sviluppando le derivate e riaggiustando le costanti si ottiene:

$$(1-x^2)\phi'' + \left(\frac{4}{x} - 6x \right) \phi' + \frac{3}{4\pi\gamma G \rho_o} \left[\omega^2 + 4\pi G \rho_o \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \right] \phi = 0.$$

Posto:

$$A = \frac{3}{4\pi\gamma G \rho_o} \left[\omega^2 + 4\pi G \rho_o \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \right]$$

si ottiene infine

$$(1-x^2)\phi'' + \left(\frac{4}{x} - 6x \right) \phi' + A\phi = 0 \quad (3.11)$$

Dalle condizioni al contorno per ξ si vede che ϕ è sottoposto alle condizioni :

$$\xi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(0) = \text{costante}$$

$$\xi(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(1) = 1$$

Cerchiamo ora una soluzione nella forma:

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \phi' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ \phi'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\end{aligned}$$

Sostituendo nella (??) si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x^{n-2} - x^n) + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (4x^{n-2} - 6x^n) + A \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Raggruppando le potenze uguali:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n [n(n-1) + 4n] x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n [A - n(n-1) - 6n] x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n+3) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n [A - n(n+5)] x^n &= 0\end{aligned}$$

Discutiamo i primi due termini della sommatoria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n+3) x^{n-2}$:

$n=0$ L'argomento della sommatoria è nullo e quindi a_0 può essere qualunque.

$n=1$ L'argomento della sommatoria è $4a_1 x^{-1}$. Ma $a_1 = 0$ poichè se non lo fosse la $\phi(0)$ divergerebbe mentre le condizioni al contorno che vogliono $\phi(0) = \text{costante}$.

Nella prima sommatoria poniamo $m = n - 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n+3) x^{n-2} \quad \rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+2)(m+5) x^m$$

e ponendo ora $m = n$ si ottiene un'unica sommatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_{n+2}(n+2)(n+5) - a_n[A - n(n+5)]\} x^n = 0$$

Perchè questa equazione sia verificata devono essere nulli tutti i termini della sommatoria e quindi si ottiene una relazione di ricorrenza per gli a_n :

$$a_{n+2} = \frac{A - n(n+5)}{(n+2)(n+5)} a_n$$

Vediamo dunque che tutti i termini pari sono definiti a partire da a_0 e tutti quelli dispari sono definiti a partire da a_1 . Poichè $a_1 = 0$, tutti i termini dispari sono tutti nulli. La serie contien dunque solo termini pari. Per studiare la convergenza della serie, consideriamo il limite del rapporto a_{n+2}/a_n per $n \rightarrow \infty$. Come si vede dalla precedente espressione,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = -1.$$

Quindi, da un certo valore di n in poi, tutti i coefficienti sarebbero uguali e la serie divergerebbe in $x = 1$, mentre stiamo cercando una soluzione per cui $\phi(1) = 1$. L'unica possibilità di evitare una divergenza e di soddisfare quindi alla suddetta condizione al contorno è quella di supporre che la serie che definisce ϕ sia troncata e si riduca quindi a un polinomio. Dovrà quindi esistere un n_o tale che $a_{n_o} \neq 0$ mentre a_{n_o+2} (e quindi tutti i termini successivi) siano nulli. Questo avviene per tutti quei valori di n_o per cui

$$n_o^2 + 5n_o - A = 0.$$

Ad ogni n_o corrisponde dunque un valore di A , o equivalentemente un valore di ω^2 , che soddisfa alla precedente relazione. La condizione su A determina quindi gli autovalori cioè i quadrati delle frequenze di oscillazione proprie del sistema. Il più piccolo di questi autovalori è quello che si ottien ponendo dalla condizione $n_o = 0$ e quindi $A = 0$:

$$\omega_o^2 = 4\pi G\rho_o \left(\gamma - \frac{4}{3} \right)$$

Come si era trovato precedentemente il segno dell'autovalore più basso, e quindi la stabilità del sistema, è controllato dal segno di $(\gamma - \frac{4}{3})$. In questo modo abbiamo determinato sia le ϕ_n che i loro autovalori:

- $n = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_o$ è una retta e quindi non ha altri zeri nell'intervallo di definizione.

- $n = 2 \quad \Rightarrow \quad \phi_1$ è una parabola e quindi ha uno zero nell'intervallo di definizione.
- ...

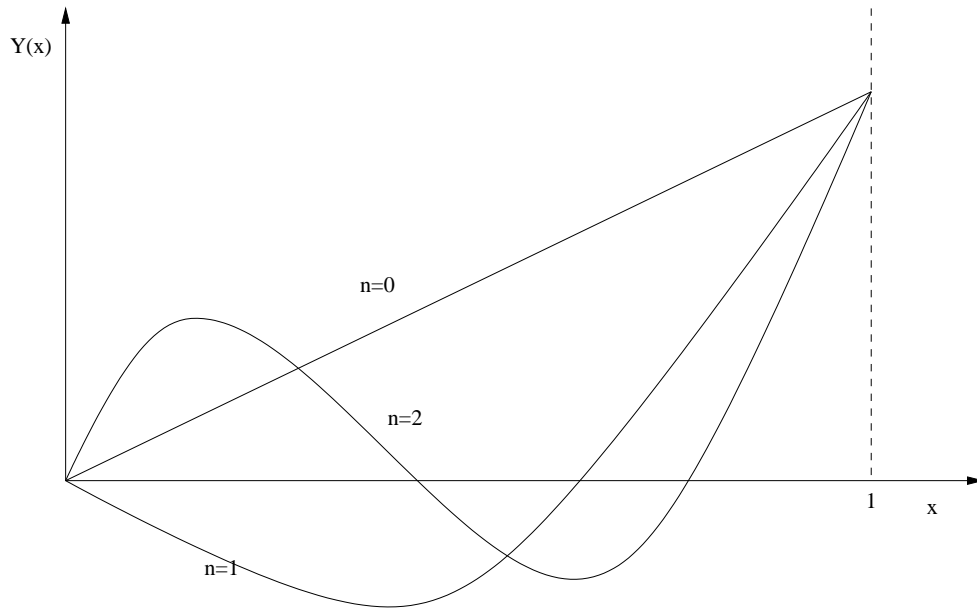


Figura 3: Le autofunzioni di ordine più basso per le oscillazioni di una sfera omogenea

L'espressione esplicita degli autovalori ω^2 è data da:

$$\omega^2 = -4\pi G\rho_o \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) + \frac{2\pi\gamma G\rho_o}{3} A = 2\pi G\rho_o \left[2 \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) + \frac{\gamma}{3} A \right],$$

con $A = n_0^2 + 5n_0$.

La frequenza è quindi proporzionale a $\sqrt{G\rho_o}$ e il periodo a $\frac{1}{\sqrt{G\rho_o}}$ come si era già trovato in precedenza con considerazioni di tipo dimensionale.

Il modello a densità costante permette di ottenere analiticamente lo spettro delle frequenze di oscillazione.. Modelli più realistici si risolvono solo numericamente, la frequenza di oscillazione non è un insieme di frequenze distinte separate da un $\Delta\omega \propto G\rho$ ma è una sovrapposizione di tutti i possibili modi di oscillazione.