

APPUNTI DI ASTROFISICA II

Cosmologia

Claudio Chiuderi

January 3, 2010

1 Introduzione

La cosmologia si propone di studiare la struttura e l'evoluzione dell'Universo osservabile. Questo studio viene fatto utilizzando le leggi della fisica, così come sono state dedotte dalle esperienze condotte sulla Terra. Non vi sono infatti indicazioni che tali leggi debbano essere modificate se applicate su grande scala. In un certo senso quindi la cosmologia è anche un test della validità di tali leggi in un contesto assai più ampio di quello in cui sono state dedotte. L'unicità del soggetto studiato - per definizione non esistono altri universi *osservabili* - rende la cosmologia anomala nel quadro delle scienze fisiche. Infatti viene a mancare una delle caratteristiche fondamentali dell'approccio induttivo-deduttivo proprio della fisica e cioè la riproducibilità delle misure. Le osservazioni possono essere eseguite su un solo oggetto (non abbiamo *altri* universi da osservare) e vengono eseguite ad una ben determinata epoca. Questo fa sì che le osservazioni debbano essere interpretate correttamente nell'ambito di un modello teorico prima di procedere al loro utilizzo.

Le informazioni che riceviamo dall'ambiente cosmico sono per la maggior parte contenute nei segnali elettromagnetici che le varie sorgenti celesti ci inviano e tali informazioni sono propagate con la velocità della luce, che ha un valore finito. Questo fa sì che segnali provenienti da sorgenti a distanza diversa e registrati allo stesso istante siano stati emessi a tempi diversi. Di conseguenza, non è possibile ottenere un quadro istantaneo dell'Universo, a meno che non ci si limiti ad una piccola sezione locale, in cui l'effetto deformante dovuto alla velocità finita della luce sia trascurabile. Nell'interpretazione delle osservazioni dobbiamo quindi sempre tener presente che gli oggetti lontani ci appaiono come *erano* al momento dell'emissione del segnale luminoso e non come *sono* quando tale segnale viene ricevuto. D'altra parte, è proprio la finitezza della velocità di propagazione della luce che ci permette di poter studiare l'evoluzione cosmica e quindi di rimediare parzialmente al fatto di essere costretti a compiere le osservazioni ad un'epoca precisa (e per un tempo breve). Se infatti le caratteristiche di una certa classe di oggetti lontani appaiono diverse da quelle degli oggetti della stessa classe posti nelle nostre vicinanze, saremo portati a concludere che l'Universo ha subito un'evoluzione nel corso del tempo. Da qui l'importanza di sviluppare strumenti in grado di osservare sorgenti sempre più lontane e quindi più deboli. Queste considerazioni giustificano la necessità di elaborare modelli, senza i quali non saremmo neppure in grado di dare un significato alle osservazioni.

Poichè la dinamica su grande scala è dominata dalla gravità, l'unica tra le interazioni fondamentali che non decada troppo rapidamente con la distanza (le interazioni elettromagnetiche, che pure obbediscono ad una legge analoga a quella della gravità, sono di fatto schermate a causa dell'esistenza di cariche di segno opposto), è logico aspettarsi che la cosmologia debba essere inquadrata nell'ambito di una teoria della gravitazione. A tutt'oggi l'unica teoria della gravitazione che ha superato tutte le verifiche sperimentali che è stato

possibile effettuare è la teoria della Relatività Generale (RG) sviluppata da Einstein e quindi i modelli cosmologici più accreditati sono modelli relativistici.

Non è possibile in questo corso trattare la RG al livello di dettaglio richiesto e quindi ci limiteremo a descrivere brevemente le basi fisiche di tale teoria e a dedurre i risultati salienti che si ottengono dalle equazioni che derivano dall'applicazione della RG al problema cosmologico, senza peraltro dimostrarle. Si cercherà comunque, quando possibile, di giustificare tali equazioni.

Poichè la cosmologia riguarda l'Universo nel suo insieme, potremmo dire che qualunque osservazione ha una valenza cosmologica. Tuttavia, le osservazioni veramente significative sono in realtà in numero limitato. Quelle cruciali, cioè quelle che ci hanno portato all'attuale concezione della cosmologia, sono ancora meno e cioè:

- l'osservazione che il cielo non è uniformemente luminoso (paradosso di Olbers),
- l'osservazione dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali delle galassie lontane ,
- l'osservazione del fondo di radiazione cosmica (CBR, Cosmic Background Radiation).

Il paradosso di Olbers (1828)

Nonostante che il paradosso porti il nome di Olbers, esso era già stato messo in luce molto tempo prima, addirittura dallo stesso Keplero. Il fatto che la luminosità media del cielo sia molto minore di quella delle singole stelle pone un problema, se le seguenti condizioni sono verificate:

- a) Le stelle hanno tutte la stessa luminosità intrinseca,
- b) le stelle sono distribuite con una densità uniforme in uno spazio infinito,
- c) le stelle hanno una vita infinita.

Le ipotesi *a)* e *b)* implicano che il contributo cumulativo delle stelle alla luminosità apparente del cielo non dipende dalla distanza (il numero di stelle tra r e $r + dr$ è proporzionale a r^2 (nell'ipotesi *b*) e la luminosità apparente scala con $1/r^2$. Di conseguenza la luminosità integrata fino alla distanza D potrebbe assumere qualunque valore, pur di andare sufficientemente lontano. Se tuttavia una stella si trova a una distanza D , la sua luce impiega un tempo $T = D/c$ per giungere a noi. Ciò implica che la vita della stella deve essere almeno lunga almeno quanto T . D , e quindi T , possono divenire comunque grandi, ma la validità dell'ipotesi *c)* garantisce che comunque la luce di qualsiasi stella arriverà a noi e quindi il cielo dovrebbe avere la stessa luminosità delle stelle. D'altra parte, se non vale *c)*, il paradosso scompare perchè al più potremo vedere quelle stelle situate ad una distanza tale che il tempo di percorrenza della luce dalla stella fino a noi sia inferiore alla durata della vita della stella stessa. La soluzione del paradosso di Olbers, implica quindi che almeno una delle tre suddette condizioni non sia soddisfatte e, come abbiamo visto, quella cruciale è l'ultima delle tre, che implica che le stelle devono evolversi, cioè nascere e morire.

Lo spostamento verso il rosso (1929)

Negli anni 20, Hubble condusse uno studio sistematico degli spettri delle galassie e trovò che la lunghezza d'onda delle righe spettrali era sistematicamente spostata verso il rosso rispetto a quella misurata in laboratorio e che tale spostamento aumentava con la distanza, D , della galassia da noi. Detta λ_e la lunghezza d'onda emessa, che si suppone sia la stessa di quella misurata in laboratorio (le leggi della fisica atomica sono le stesse!) e λ_o la lunghezza d'onda osservata, posto $\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda_e$, Hubble trovò che:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \alpha D \quad (1.1)$$

dove α è una costante. Questo è il dato diretto d'osservazione. Se lo spostamento in lunghezza d'onda viene interpretato come dovuto ad un effetto Doppler (non relativistico), se cioè si pone

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{v}{c}$$

si ottiene

$$v = (\alpha c)D = H_o D \quad (1.2)$$

H_o è la *costante di Hubble* e la precedente relazione lineare tra v e D viene detta *legge di Hubble* e stabilisce che le galassie appaiono allontanarsi da noi con una velocità proporzionale alla loro distanza. L'implicazione immediata è che l'Universo non è statico, ma appare dotato di un moto di espansione. La costante H_o ha evidentemente le dimensioni di *secondi*⁻¹, ma essa viene comunemente espressa in unità più direttamente legate all'osservazione e cioè $km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$. A causa delle difficoltà della misura il valore della costante di Hubble è variato notevolmente nel corso degli anni. Si usa perciò scrivere:

$$H_o = h \times 100\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1} \quad (1.3)$$

e mantenere esplicita la dipendenza da h nelle varie formule. Le misure più recenti danno $h = 0.72$.

Una discussione più approfondita della legge di Hubble e delle sue implicazioni cosmologiche è rimandata al capitolo seguente.

Il fondo di radiazione cosmica (1965)

Nel 1965 Penzias e Wilson, nel corso di una ricerca sulle cause di un rumore di fondo che disturbava le trasmissioni radio transoceaniche, scoprirono che lo spazio è permeato da una radiazione elettromagnetica (quasi) perfettamente isotropa. Le prime misure, effettuate a lunghezze d'onda radio, suggerivano che lo spettro potesse essere ben rappresentato da quello di un corpo nero alla temperatura di circa $3K$. Successive misure, in particolare quelle eseguite a bordo del satellite CoBE (Cosmic Background Explorer) a partire dal 1990, hanno permesso di determinare che lo spettro è in effetti quello di un corpo nero con temperatura

$T = 2.725 \pm 0.0001K$. La possibilità che esistesse una simile radiazione era stata prevista da Gamow negli anni '40 nell'ipotesi che l'Universo primordiale avesse una temperatura estremamente elevata e che tale temperatura fosse diminuita nel corso del tempo a causa dell'espansione dell'Universo, suggerita dalla legge di Hubble. Lo studio delle caratteristiche della radiazione cosmica di fondo, CBR (Cosmic Background Radiation) che, come vedremo, è l'oggetto più vecchio con cui siamo venuti a contatto, è divenuto oggi uno dei principali strumenti di indagine cosmologica. Sulle proprietà della CBR e sulle informazioni che se ne traggono ritorneremo nei capitoli successivi.

Negli anni recenti, gli sviluppi tecnologici da un lato e l'aumento impressionante della potenza dei calcolatori dall'altro, hanno enormemente aumentato il numero e la precisione delle osservazioni significative ed hanno permesso un serrato confronto tra i modelli teorici ed i dati osservati. Ne sono risultate alcune profonde modifiche dei fondamenti della cosmologia che si presenta, una volta di più, come un campo in continua evoluzione. Discuteremo più avanti la situazione attuale e ne indicheremo le presumibili linee di sviluppo.

2 Omogeneità e isotropia dell'Universo

Tutti i modelli cosmologici moderni hanno in comune alcune ipotesi fondamentali, in parte suggerite dalle osservazioni, in parte frutto dei paradigmi scientifici post-galileiani. La prima di queste ipotesi, detta *Principio Cosmologico*, è di fatto una generalizzazione della visione copernicana che nega alla Terra una posizione privilegiata. Secondo tale principio: *"La struttura spaziale media dell'Universo appare la stessa a qualsiasi osservatore"*. L'adozione di questo principio appare inevitabile se si vuol procedere alla costruzione di modelli cosmologici. Se esso non fosse valido, non avremmo nessuna garanzia che le nostre osservazioni siano significative. Osserviamo che il Principio Cosmologico riguarda solo le proprietà spaziali e non esclude che la struttura media dell'Universo possa subire un'evoluzione temporale.

Il Principio Cosmologico può tuttavia essere generalizzato a includere anche l'indipendenza della struttura media dall'epoca dell'osservazione. In questo caso si parla di *Principio Cosmologico Perfetto*. Una delle motivazioni alla base di tale principio è che esso rimuoverebbe la distinzione fra spazio e tempo presente nel modello imperfetto, distinzione che sarebbe contraria allo spirito della relatività. E' evidente che se si adotta il Principio "perfetto" nessuna evoluzione è permessa: il modello che ne risulta è quello dell'*Universo stazionario*, modello che ha avuto i suoi sostenitori in passato, ma che attualmente è stato abbandonato, in quanto inconciliabile con le più recenti osservazioni, in particolare quelle relative alla CBR.

I modelli cosmologici correnti si fondano su una descrizione di tipo fluido. L'Universo è rappresentato cioè da un fluido cosmico, di cui le galassie sono l'equivalente delle molecole, in perfetta analogia con la descrizione fluida di un gas in cui la struttura molecolare discreta viene sostituita da una struttura media continua. Interviene a questo punto un'altra ipotesi fondamentale e cioè quella che prescrive che il fluido cosmico sia omogeneo ed isotropo. Il fluido cosmico ha quindi una densità costante, ciò che significa che la densità media delle galassie non dipende né dalla distanza dall'osservatore, né dalla direzione di osservazione.

Possiamo chiederci quanto questa ipotesi sia suffragata dalle osservazioni. A prima vista la distribuzione delle galassie in una qualunque immagine del cielo non appare uniforme, ma naturalmente quando si vuol parlare di densità media, a cui il concetto di omogeneità si riferisce, bisogna prima specificare su quali volumi viene calcolata la media. Per esempio, la densità media della Galassia è circa $2 \times 10^{-24} gcm^{-3}$, quella di un ammasso di galassie circa $2 \times 10^{-27} gcm^{-3}$, quella di un superammasso circa $2 \times 10^{-29} gcm^{-3}$. In maniera più quantitativa, l'analisi delle sorgenti infrarosse del catalogo ricavato dalla missione spaziale IRAS (Fig. c1) ha rivelato che la fluttuazione quadratica media del numero di galassie contenute in un cubo di lato $L = 90 Mpc$, $\delta N_g / N_g \simeq 0.2$ e diminuisce all'aumentare del volume della cella su cui si effettua la media.

L'isotropia può essere verificata dalle osservazioni meglio dell'omogeneità, per esempio dallo studio della correlazione angolare delle posizioni delle galassie di luminosità maggiore di un certo valore limite. La probabilità composta di trovare due galassie negli elementi di

angolo solido $d\Omega_1$ e $d\Omega_2$, separati da un angolo θ è data da

$$dP = N^2 d\Omega_1 d\Omega_2 [1 + g_{ww}(\theta)]$$

dove N è la densità superficiale media di galassie e g_{ww} è la funzione di correlazione. Nel caso di distribuzione isotropa $g_{ww} = 0$. Come si vede dalla Fig c2, g_{ww} tende effettivamente a zero per angoli $\theta \leq 6^\circ$.

Come vedremo, una delle più significative prove a sostegno dell'isotropia deriva dalle osservazioni della CBR, la cui isotropia su scale angolari dell'ordine di qualche grado risulta verificata meglio di una parte su 10^4 . D'altra parte, l'isotropia osservata, combinata con il Principio Cosmologico, implica l'omogeneità. Infatti, se da ogni punto di osservazione l'Universo appare identico e se dalla Terra esso appare isotropo, ne segue che esso è isotropo per qualunque osservatore e quindi omogeneo. Naturalmente queste conclusioni si applicano solo alla parte visibile dell'Universo; nulla vieta di speculare che la parte visibile sia solo una frazione (omogenea) di un Universo assai più grande e disomogeneo. Ma si tratta appunto di una speculazione.

Se la legge di Hubble viene considerata come una prova dell'espansione dell'Universo, l'isotropia osservata suggerisce che anche l'espansione debba essere isotropa. Il fatto che l'espansione sia apparentemente centrata su di noi non contraddice affatto il Principio Cosmologico. Per capirlo, basta considerare quello che accade a dei granelli di sabbia incollati sulla superficie di una palla che si gonfia. Ciascun granello vede tutti gli altri allontanarsi da sè e quindi giudica di essere al centro dell'espansione, mentre in realtà l'unica cosa che cambia è la mutua distanza tra i granelli. Un analogo esempio a tre dimensioni è quello dei chicchi di uvetta in un immenso panettone in procinto di lievitare. Anche qui l'espansione non ha un centro geometrico, ma è semplicemente un cambiamento di scala. Se così è, se ne può concludere che l'espansione dell'Universo (omogeneo ed isotropo!) può essere descritta da una singola funzione del tempo, $a(t)$, che regola tale variazione di scala. Per vedere la cosa con un maggiore dettaglio, consideriamo tre galassie A , B e C che in un certo istante definiscono il triangolo ABC mostrato in Fig. c3. L'isotropia dell'espansione significa che l'osservatore in A vede la variazione frazionaria della distanza $AB \rightarrow A'B'$ uguale a quella di $AC \rightarrow A'C'$, mentre l'osservatore in C giudica che la variazione frazionaria di $AC \rightarrow A'C'$ sia uguale a $BC \rightarrow B'C'$. Il triangolo $A'B'C'$ è pertanto simile ad ABC . Tutte le distanze debbono quindi variare secondo la legge:

$$\ell(t) = \ell(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)}. \quad (2.1)$$

Derivando la precedente espressione rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d\ell}{dt} = v(t) = \ell(t_0) \frac{\dot{a}(t)}{a(t_0)} = \ell(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

Troviamo quindi che la velocità apparente con cui si allontanano due galassie è proporzionale alla loro distanza, come vuole la legge di Hubble. La funzione che lega la velocità di recessione

alla distanza è detta *parametro di Hubble*,

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.2)$$

La costante di Hubble, H_0 , è semplicemente il valore attuale del parametro di Hubble. Osservare che in questo quadro la velocità di recessione non deve essere pensata come l'espansione del sistema delle galassie in uno spazio esterno vuoto (l'Universo per definizione contiene tutto, non c'è niente al di fuori di esso in cui espandersi), ma piuttosto come un'espansione dello spazio che separa le galassie stesse.

Quali sono le strutture che nel nostro modello possono essere considerate le molecole del gas cosmico, cioè le strutture che mantengono le loro dimensioni senza partecipare al moto di espansione cosmica? Gli atomi, la Terra, le stelle non si espandono perchè sono tenuti insieme da forze interne di natura elettrica o gravitazionale. Se si esamina il caso della Galassia si può procedere così. Consideriamo la Galassia come un sistema sferico di massa M_G e di raggio R_G . Il potenziale gravitazionale è $\simeq GM_G/R_G$ e la velocità di fuga $v_f = (2GM_G/R_G)^{1/2}$. Inserendo i dati per la Galassia si ottiene $v_f/c \simeq 10^{-3}$. D'altra parte la velocità di recessione del bordo della Galassia dovuta al moto di espansione cosmica, vista dal centro della Galassia stessa, sarebbe $v/c = (\dot{a}/a)R_G/c = H_0R_G/c \simeq 3 \times 10^{-6}$, che è trascurabile rispetto alla velocità di fuga. Per una Galassia quindi le forze interne dominano rispetto agli effetti dell'Universo in espansione. Questo giustifica l'ipotesi di considerare le galassie come le "molecole" del gas cosmico.

Consideriamo ora il moto di un fotone emesso da una galassia all'istante t con una frequenza $\nu(t)$. Il fotone sarà ricevuto all'istante $t + dt$ da un altro osservatore posto a distanza $\Delta\ell = cdt$ con una frequenza spostata per effetto Doppler, $\nu(t + dt)$. Quindi:

$$d\nu = \nu(t + dt) - \nu(t) = -(\Delta v/c)\nu.$$

Ma $\Delta v = H\Delta\ell = Hcdt$, e quindi .

$$\frac{d\nu}{dt} = -H\nu = -\frac{\dot{a}}{a}\nu \implies \nu \propto \frac{1}{a}.$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (2.3)$$

In cosmologia lo spostamento percentuale in lunghezza d'onda $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}$ viene tradizionalmente indicato con la lettera z . Quindi:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (2.4)$$

La legge di Hubble implica $z > 0$ e quindi z viene anche detto "spostamento verso il rosso (*redshift*) delle righe spettrali".

La semplice applicazione dei concetti di omogeneità e isotropia ci ha portato a postulare l'esistenza di un fattore di scala universale, $a(t)$, che regola il moto di espansione cosmica. E' evidente che uno degli scopi dei modelli cosmologici dovrà appunto essere quello di determinare la funzione $a(t)$. Inoltre, almeno nel caso non relativistico, abbiamo dedotto la validità della legge di Hubble e una fondamentale relazione tra lo spostamento delle righe spettrali e il fattore di scala universale. Una semplice osservazione spettroscopica viene dunque ad assumere una rilevanza cosmologica in quanto ci permette di conoscere il rapporto tra i valori che la funzione $a(t)$ assume negli istanti di emissione del fotone e della sua osservazione.

3 Le basi fisiche della Relatività Generale

La relatività Generale (RG) è sostanzialmente una teoria della gravitazione. Si tratta di una teoria formalmente complessa, la cui trattazione esula dalle possibilità di questo corso. Ci limiteremo quindi a riassumere i principali concetti della relatività ristretta, che si suppone nota, e a descrivere brevemente le basi fisiche della RG, come premessa alla comprensione dei modelli cosmologici che su di essa si basano. Enunceremo quindi le equazioni che derivano dall'applicazione della RG alla cosmologia senza derivarle e discuteremo le loro soluzioni.

Il concetto di relatività riguarda le trasformazioni che le equazioni della fisica subiscono quando si esegua una trasformazione di coordinate dinamica, che cioè coinvolga anche il tempo. La relatività galileiana, che riguarda l'invarianza formale (o *covarianza*) delle equazioni della meccanica classica quando siano scritte in due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro, era già stata magistralmente descritta da Galileo stesso e le formule che consentono di passare da un sistema all'altro sono note come trasformazioni di Galileo. Secondo questa prima variante della relatività è possibile determinare soltanto il moto relativo dei due sistemi, ma nessuna esperienza di meccanica può mettere in evidenza il moto assoluto. La relatività galileiana tuttavia non può essere estesa ai fenomeni elettromagnetici: le equazioni di Maxwell infatti non sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Esse avrebbero la forma nota soltanto in un particolare sistema inerziale, mentre in tutti gli altri la struttura delle equazioni cambierebbe. Di conseguenza, dovrebbe essere possibile distinguere il moto assoluto rispetto a tale sistema eseguendo delle esperienze di elettromagnetismo. Ma la verifica sperimentale della precedente affermazione, eseguita da Michelson, portò a un risultato paradossale: il sistema di riferimento ancorato alla Terra, evidentemente non inerziale, risultava essere il sistema privilegiato. Inoltre, i risultati dell'esperimento mostravano che la velocità della luce non si componeva con quella dell'osservatore o della sorgente, ma era la stessa in tutti i sistemi inerziali. Questi fatti spinsero Einstein a riconsiderare la formulazione della relatività galileiana e ad elaborare la teoria della relatività ristretta. Nella formulazione di Einstein le formule di passaggio da un sistema inerziale ad un altro non sono quelle di Galileo bensì le trasformazioni di Lorentz, che sono anche quelle che lasciano invarianti in forma le equazioni di Maxwell. Le trasformazioni di Lorentz convergono a quelle di Galileo per valori della velocità relativa dei due sistemi piccole rispetto alla velocità della luce. Come conseguenza della relatività ristretta, il moto assoluto di un sistema inerziale non è determinabile neppure con esperienze di elettromagnetismo. Il prezzo da pagare per questa generalizzazione del principio di relatività, che peraltro risulta inevitabile a causa dell'esperienza di Michelson, è l'abbandono dei concetti di spazio e tempo assoluti della meccanica newtoniana e l'introduzione di un nuovo continuo quadrimensionale, lo *spazio-tempo*. La geometria dello spazio-tempo non è euclidea (a differenza di quella dello spazio geometrico newtoniano) e le trasformazioni di Lorentz possono essere considerate delle pseudo-rotazioni nel nuovo spazio. Una delle caratteristiche salienti della relatività ristretta risiede nella geometrizzazione della fisica. Questo è reso evidente dall'uso del concetto di intervallo. Preso un sistema di riferimento inerziale ($x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), si considerino due eventi infinitamente vicini e si definisca

la quantità ds , detta *intervallo* (infinitesimo) tra i due eventi:

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = dx_0^2 - d\ell^2$$

L'intervallo è un invariante relativistico, cioè il suo valore rimane inalterato per passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro per mezzo delle trasformazioni di Lorentz. Dall'invarianza dell'intervallo è possibile derivare tutta la cinematica relativistica e, usando il principio di causalità, è anche possibile dimostrare che la velocità della luce rappresenta la velocità limite con la quale si possono trasmettere le interazioni. D'altra parte, la forma del ds^2 definisce la geometria dello spazio-tempo: la presenza del segno meno davanti a $d\ell^2$ dimostra appunto che si tratta di una geometria non euclidea. Le proprietà fisiche nei sistemi inerziali vengono in qualche modo trasferite nelle proprietà geometriche dello spazio-tempo.

La relatività ristretta riguarda dunque la covarianza delle equazioni della fisica rispetto ad una classe ben precisa, ristretta appunto, di trasformazioni cioè quella tra riferimenti inerziali. A questo punto viene naturale chiedersi se il principio di relatività non possa essere esteso ad una classe più ampia di trasformazioni che, alla luce di quanto sopra detto, dovrebbe ancora una volta riflettersi nelle caratteristiche geometriche dello spazio-tempo. Ciò porta a considerare espressioni più generali dell'intervallo, del tipo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.1}$$

dove si è usata la convenzione di somma sugli indici ripetuti. Gli elementi del tensore metrico, $g_{\mu\nu}$, definiscono la geometria dello spazio-tempo per la classe di trasformazioni di coordinate che si considerano.

Che il problema della generalizzazione, se possibile, non sia banale, è dimostrato da una serie di considerazioni. Ricordiamo per prima cosa che il concetto di massa viene usato in meccanica newtoniana in due accezioni diverse: la *massa inerziale*, che è una proprietà della materia che sostanzialmente resiste al moto e la *massa gravitazionale* che provoca una forza e quindi un moto. Logicamente, queste due quantità non avrebbero ragione di essere uguali tra loro. Ma il risultato di esperienze estremamente precise mostra che esse sono *identiche*. Questa *equivalenza* fa sì che tutti i corpi cadano con la stessa accelerazione, ma ha anche altre importanti conseguenze. Si consideri quel che succede quando si voglia descrivere la meccanica da un sistema non inerziale (per esempio un sistema ancorato ad un disco rotante). Si osserva la nascita di nuove forze, per esempio la forza centrifuga, dette appunto *forze non inerziali*. In realtà quel che nasce sono delle accelerazioni, indipendenti dalla massa perché di origine puramente cinematica. Invece di parlare di accelerazioni possiamo parlare di forze, pur di moltiplicare le suddette accelerazioni per la massa inerziale. Possiamo sempre eliminare tali forze dalla nostra descrizione passando ad un sistema inerziale.

La forza di gravità è proporzionale alla massa gravitazionale, ma, a causa dell'equivalenza tra i due tipi di masse, possiamo considerare che essa sia proporzionale alla massa inerziale, assumendo quindi il carattere di forza non inerziale. E, come tutte le forze di questo tipo, deve essere possibile eliminarla attraverso un'opportuna trasformazione di coordinate. Che

quest'ultima affermazione, apparentemente paradossale, sia fisicamente accettabile risulta chiaro riflettendo al seguente esperimento ideale. Si consideri un sistema in caduta libera, per esempio un ascensore a cui sia stato reciso il cavo di sostegno. Questo sistema è a tutti gli effetti un sistema inerziale, nonostante la presenza della gravità. Infatti, in meccanica newtoniana un sistema è inerziale se un corpo non soggetto a forze rimane in quiete o si muove di moto rettilineo e uniforme e ciò è quanto succede nell'ascensore in caduta libera, poichè tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa. Inversamente, un sistema in cui si noti la presenza della gravità potrà sempre essere descritto come un sistema senza gravità, ma sottoposto ad un moto accelerato in senso inverso a quello della gravità.

Da quanto precede risulta come sia effettivamente possibile eliminare la gravità, ma solo *localmente* nello spazio e nel tempo. Infatti l'ascensore prima o poi finirà la sua corsa contro il suolo e in un ascensore troppo grande sarà possibile notare che le traiettorie non sono parallele, ma convergenti. L'eliminazione della gravità è dunque possibile solo in regioni sufficientemente piccole dello spazio-tempo in cui la gravità possa essere considerata costante. Non sarà viceversa possibile trovare una trasformazione *globale* che elimini la gravità ovunque, in accordo con la fisica e il buon senso.

Per quel che riguarda gli aspetti geometrici, lo spazio-tempo sarà descritto dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Localmente sarà sempre possibile effettuare una trasformazione di coordinate che riduca alla forma tipica dei sistemi inerziali, cioè quella della relatività ristretta. Ma cosa determina la geometria dello spazio-tempo? Einstein, assorbendo le idee già esposte da Mach, postula che la struttura spazio-temporale sia determinata dalla distribuzione di materia su grande scala, anzi, secondo i dettami della relatività ristretta che prescrive l'equivalenza tra massa ed energia, dalla distribuzione di energia su grande scala. Gli effetti gravitazionali della distribuzione di massa-energia sono trasferiti nella struttura geometrica dello spazio-tempo e in questo senso il tensore metrico, $g_{\mu\nu}$, rappresenta il campo gravitazionale.

Naturalmente la geometrizzazione della gravitazione, tipica della RG, ci obbliga a formulare le leggi della fisica in modo che esse risultino naturalmente esprimibili in forma covariante, cioè in modo che la loro espressione formale risulti inalterata per qualunque trasformazione di coordinate dello spazio-tempo. Per esempio, il principio di inerzia dovrà venire espresso nella forma: *"un corpo in moto non soggetto a forze percorre una geodetica dello spazio-tempo"*, la geodetica essendo definita come la curva di minor lunghezza tra due punti dati. Nello spazio-tempo di Newton (e anche in quello della relatività ristretta) la geodetica è una retta, in accordo con la definizione newtoniana del principio di inerzia. La presenza di un campo gravitazionale determina una differente geometria dello spazio tempo e quindi le geodetiche non saranno più rette. Ma la formulazione della legge d'inerzia rimarrà la stessa.

Gli sviluppi formali della teoria costruita sulle basi sopra esposte porta a formulare le equazioni di Einstein, un sistema di 10 equazioni non lineari nelle 10 componenti indipendenti

del tensore simmetrico $g_{\mu\nu}$. Le equazioni di Einstein possono essere scritte nel modo seguente:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Il tensore simbolico $G_{\mu\nu}$ è costruito a partire da $g_{\mu\nu}$ e quindi racchiude in sé tutte le informazioni sulla geometria dello spazio-tempo, mentre $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso che compendia le informazioni relative alla distribuzione di massa-energia. Si noti una delle caratteristiche fondamentali della RG: si tratta di una teoria senza parametri aggiustabili che consentano di adattarla alle varie applicazioni. E questo un aspetto della teoria di grande eleganza formale, che tuttavia la rende in linea di principio vulnerabile. Finora tuttavia, tutte le previsioni della RG sono state verificate dall'esperienza.

Il procedimento con il quale si affrontano i problemi relativi alla risoluzione delle equazioni di Einstein può essere così schematizzato. Si adotta una forma del tensore metrico che contenga in sé le eventuali simmetrie suggerite dall'applicazione che si sta considerando. Una tale forma conterrà un certo numero di parametri e di funzioni incognite. Si sceglie un tensore energia-impulso che descriva le sorgenti di campo proprie del problema studiato. Si scrivono le equazioni di Einstein ottenendo in tal modo un sistema di equazioni differenziali non lineari nelle funzioni incognite contenute nel $g_{\mu\nu}$. La soluzione di questo sistema determina le funzioni incognite e permette quindi di conoscere la struttura geometrica dello spazio-tempo.

4 La metrica di Robertson-Walker

Le considerazioni svolte precedentemente sull'omogeneità e isotropia dell'Universo e le indicazioni che da queste emergono sull'esistenza di un fattore di scala cosmico, ci portano a considerare un'elemento dell'intervallo infinitesimo tra due eventi del tipo:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - a^2(t) d\ell^2 \\ &= c^2 dt^2 - a^2(t) g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 3), \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove si dovrà imporre la condizione che la parte spaziale del tensore metrico, $g_{\mu\nu}$, sia omogenea e isotropa. Si pone quindi il problema di determinare tutte le possibili geometrie aventi questa caratteristica. Robertson e Walker hanno dimostrato che esistono solo tre geometrie con la proprietà richiesta, limitando così notevolmente il numero dei casi possibili. Per comprendere la natura di queste geometrie, cominciamo con l'esaminare il caso della geometria delle superfici a due dimensioni. Il piano è evidentemente una superficie che ha queste proprietà. Ogni punto di un piano può essere mappato in qualunque altro punto con una opportuna trasformazione di coordinate e non esistono direzioni preferenziali nel piano. L'elemento infinitesimo di linea nel piano può essere scritto come

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2$$

oppure, usando coordinate polari nel piano,

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

. Entrambe le forme rappresentano la stessa geometria, quella del piano.

Se consideriamo ora un'altra geometria, quella della superficie di una sfera, ci accorgiamo che anch'essa è omogenea e isotropa (tutti i punti sono equivalenti), ma con caratteristiche geometriche differenti da quelle del piano. Per esempio, due rette localmente parallele finiscono con l'incontrarsi (si pensi a due meridiani che sono paralleli tra loro all'equatore, ma si incontrano al polo). Inoltre, la somma degli angoli interni di un triangolo tracciato sulla superficie sferica è maggiore di 180° . Si tratta quindi di una geometria *non euclidea*. Data l'equazione della sfera, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, si ottiene per la distanza infinitesima tra due punti sulla superficie

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(x dx + y dy)^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

e, introducendo un sistema di coordinate polari nello spazio

$$x = R \sin\theta \cos\phi,$$

$$y = R \sin\theta \sin\phi,$$

$$z = R \cos\theta,$$

si ottiene la ben nota espressione per l'elemento di linea sulla sfera :

$$d\ell^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = R^2 d\Omega^2 \quad (4.2)$$

Si osservi che R è una costante e quindi può essere assorbita nella definizione dell'unità di misura delle lunghezze. La forma (4.2) pertanto definisce la geometria della superficie sferica in maniera intrinseca, cioè senza riferimento allo spazio 3D euclideo in cui la sfera è immersa. Non esiste alcuna trasformazione di coordinate $(\theta, \phi) \rightarrow (\xi, \eta)$ che permetta di scrivere la (4.2) nella forma euclidea, $d\ell^2 = d\xi^2 + d\eta^2$. È facile verificare che lo spazio descritto dalla (4.2) ha caratteristiche profondamente diverse dallo spazio euclideo 2D del piano. Infatti, preso come centro il punto posto al polo della sfera potremo scrivere l'equazione della circonferenza tracciata sulla superficie sferica come il luogo dei punti che hanno la stessa distanza dal centro. In pratica si tratta di calcolare la lunghezza di un *parallelo* alla colatitudine θ , che risulta pari a $2\pi R \sin\theta$. D'altra parte, la distanza dei punti di questa circonferenza dal polo (il *raggio* della sfera) è $R\theta$ e quindi il rapporto tra circonferenza e raggio risulta $2\pi \sin\theta / \theta \leq 2\pi$. La lunghezza della circonferenza cresce fino a $\theta = \pi/2$, per poi diminuire fino a zero per $\theta = \pi$. Analogamente, l'elemento d'area del cerchio sulla superficie della sfera, cioè l'area della calotta sferica è:

$$dA = (R \sin\theta d\phi)(R d\theta) = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

che integrato dà :

$$A = 2\pi R^2 (1 - \cos\theta)$$

. Quindi l'area aumenta sempre raggiungendo il valore $4\pi R^2$ per $\theta = \pi$. Possiamo anche immaginare che il raggio della sfera tridimensionale, R , dipenda dal tempo: la geometria della superficie rimarrebbe la stessa e solo l'unità di misura delle lunghezze varierebbe nel tempo. Nello spazio euclideo 3D la situazione verrebbe descritta dicendo che la sfera si sta espandendo. Sulla superficie sferica 2D, una volta definite ad un certo istante il sistema di coordinate, le coordinate mancherebbero lo stesso valore al passare del tempo, ma la distanza tra due punti (misurata sulla superficie sferica) varierebbe col tempo. Ancora una volta, non abbiamo bisogno di fare riferimento allo spazio euclideo 3D in cui la sfera è immersa. Questo tipo di sistema di coordinate viene detto sistema *comovente* ed è particolarmente adatto in cosmologia. Di fatto esso viene adottato in tutti i modelli cosmologici. Le precedenti considerazioni si generalizzano facilmente al caso degli spazi omogeni e isotropi tridimensionali. Basta infatti considerare una sfera 3D immersa in un ipotetico spazio euclideo quadridimensionale, descritto dalle coordinate (x, y, z, w) . L'equazione della sfera sarà

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$$

. Procedendo come sopra, avremo:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} \end{aligned}$$

Passando a coordinate polari nello spazio geometrico 3D

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

si ottiene;

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{r^2 dr^2}{R-r^2} \\ &= \frac{R^2}{R^2 - r^2} + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

dove si è posto $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. La precedente equazione si può mettere sotto la forma:

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{d(r/R)^2}{1 - (r/R)^2} + (r/R)^2 d\Omega^2 \right)$$

Convenendo di misurare le distanze rispetto a R e indicando ancora con r la quantità adimensionale r/R , si arriva alla forma finale:

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega^2 \right).$$

Ricordando che la forma dell'elemento di linea nello spazio euclideo 3D si può scrivere $d\ell^2 = R^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$, dove r è ancora la coordinata radiale adimensionale, si vede che i casi euclideo e sferico si possono riunire nella forma:

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (4.3)$$

,

dove $k = 0$ nel caso euclideo e $k = 1$ nel caso sferico. R può essere una funzione del tempo, in analogia a quanto discusso per il caso 2D.

Abbiamo dunque trovato due geometrie nello spazio 3D che obbediscono alla condizione di essere omogenee ed isotrope. Robertson e Walker hanno dimostrato che esiste soltanto un altro caso. L'elemento di linea anche in questo caso può essere messo nella forma (4.3), con $k = -1$. La superficie corrispondente nel caso 2D sarebbe quella di un iperboloide.

Si può quindi concludere che la forma più generale dell'intervallo infinitesimo tra due eventi per descrivere i modelli cosmologici è:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (4.4)$$

Questa è la cosiddetta metrica di Robertson-Walker (RW), dove (r, θ, ϕ) sono coordinate adimensionali comoventi (che cioè mantengono fisso il loro valore al passare del tempo) e $a(t)$ è il fattore di scala cosmico.

La validità della metrica di RW può venire immediatamente verificata su due test cruciali: lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali (*redshift*) e la legge di Hubble.

Osserviamo innanzitutto che la base osservativa dell'espansione dell'Universo è costituita dalla misura dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali emesse da galassie di cui si conosce la distanza. Il secondo passo per giungere alla legge di Hubble, cioè la proporzionalità tra velocità di recessione e distanza, deriva da un'interpretazione del redshift in termini di effetto Doppler, per di più nella sua versione non relativistica. In RG tuttavia le traiettorie dei fotoni e l'eventuale variazione della loro frequenza sono completamente determinate dalla metrica. La possibilità di ricavare la relazione data dall'Eq. (2.4) rappresenta dunque un buon banco di prova per la validità della metrica di RW. Consideriamo l'emissione di un treno d'onde da parte di una galassia tra gli istanti t_e e $t_e + dt_e$ e supponiamo che lo stesso treno d'onde sia ricevuto da un osservatore posto su un'altra galassia, che supporremo situata nell'origine delle coordinate. Ciascuna delle due galassie mantiene inalterato il valore delle proprie coordinate spaziali, visto che abbiamo adottato un sistema di coordinate comoventi. Siccome l'osservatore è situato nell'origine, il raggio di luce incidente si muove radialmente e quindi $d\theta = d\phi = 0$. La propagazione di un raggio luminoso è espressa dall'equazione $ds = 0$ e nella metrica di RW questo implica:

$$\frac{cdt}{a(t)} = -\frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}},$$

dove il segno meno tiene conto del fatto che il raggio luminoso si muove radialmente verso l'origine cioè che r decresce durante il tragitto. Integrando la precedente equazione tra l'evento inizio dell'emissione (t_e, r_e) e l'evento inizio dell'osservazione $(t_0, 0)$ si ottiene :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = -\int_{r_e}^0 \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}.$$

Analogamente se consideriamo gli eventi relativi alla fine dell'emissione e della ricezione del treno donde avremo:

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)} = -\int_{r_e}^0 \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}.$$

Siccome, come già detto, il valore delle coordinate di entrambe le galassie rimane costante nel tempo (non la distanza fisica, che cambia col tempo) , i due integrali a secondo membro delle precedenti equazioni sono identici. Eguagliando i primi membri si ottiene facilmente:

$$\int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a(t)},$$

cioè, dato che gli integrali sono estesi a intervalli infinitesimi:

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_e}{a(t_e)}$$

Ricordiamo ora che il prodotto νdt rappresenta il numero di oscillazioni contenute nel treno donde, numero che non cambia durante il tragitto. Quindi $\nu_e dt_e = \nu_0 dt_0$, da cui:

$$\frac{dt_e}{dt_0} = \frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}$$

e infine

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (4.5)$$

La metrica di RW ci permette dunque di prevedere l'esistenza del redshift come effetto dell'espansione dell'Universo, Eq. (2.4), senza far ricorso a interpretazioni in termini di effetto Doppler.

Per verificare che la legge di Hubble è correttamente prevista dalla metrica di RW consideriamo la *distanza propria*, $\ell(t)$, cioè la distanza che separa due punti ad un determinato istante, nell'ambito di tale metrica. Si avrà evidentemente:

$$\ell(t) = a(t) \int \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = a(t)f(r, k).$$

Derivando la precedente equazione si ottiene:

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{da}{dt}f(r, k) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ell(t) = H(t)\ell(t),$$

cioè la corretta espressione della legge di Hubble.

1

5 I modelli di Friedmann

5.1 Le equazioni di Friedmann

La metrica di RW descritta nel precedente capitolo determina completamente il primo membro delle equazioni di Einstein, cioè il tensore $G_{\mu\nu}$. Per affrontare il problema cosmologico secondo lo schema delineato nel Cap.3, è necessario ora scegliere la forma corretta del tensore $T_{\mu\nu}$ che rappresenta la distribuzione delle sorgenti fisiche della gravità. Nel caso in cui si adotti un modello fluido si può dimostrare che il tensore energia-impulso assume la forma:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

dove $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{dx_\mu}{cd\tau}$ è la quadrivelocità (τ è il tempo proprio). Si osservi che ρc^2 è la densità di energia totale e comprende quindi tutte le forme di energia, qualunque sia la loro natura, e che sia ρ che P sono costanti nello spazio, ma possono essere funzioni del tempo.

In un sistema di coordinate comoventi, la sola componente della quadrivelocità diversa da zero è $u_0 = 1$. Introducendo questa espressione nelle equazioni di Einstein la scelta $\mu = \nu = 0$ determina una prima equazione, mentre le scelte $\mu = \nu = 1, 2, 3$ producono tutte la stessa equazione, cosa non sorprendente vista l'omogeneità e l'isotropia dello spazio geometrico. Le equazioni risultanti sono:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho c^2)$$
$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi GP$$

Combinando le due espressioni precedenti si ottengono le *equazioni di Friedmann*

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho c^2) \quad (5.2)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P)a \quad (5.3)$$

Una interessante conseguenza può essere ricavata derivando la prima equazione ed eliminando \ddot{a} , ottenendo così:

$$-3P\dot{a} = \dot{\rho}c^2 + 3(\rho c^2)\dot{a}.$$

Moltiplicando ambo i membri per a^2 si può infine scrivere:

$$P\frac{d}{dt}(a^3) = -\frac{d}{dt}(\rho c^2 a^3) \quad (5.4)$$

Se si tiene conto che a^3 è proporzionale al volume, per cui $\rho c^2 a^3$ è proporzionale all'energia totale, la precedente equazione può essere riscritta nella forma:

$$PdV = -dU$$

che, ricordando il Primo Principio della Termodinamica, ci dice che l'espansione dell'Universo è adiabatica, risultato scontato (con chi scambierebbe calore l'Universo?), ma che rappresenta comunque un'utile verifica. Da quanto precede è chiaro che è possibile scegliere una qualsiasi coppia tra le equazioni (5.2)-(5.4) come sistema di equazioni indipendenti, mentre la terza è una conseguenza delle altre due. Poichè dunque le equazioni indipendenti sono due, mentre le funzioni incognite sono tre e cioè $a(t), \rho(t), P(t)$ (oltre alla costante k), sarà necessario avere un'equazione di stato cioè una relazione tra P e ρ .

Storicamente le equazioni di Friedmann sono state scritte e risolte prima della scoperta di Hubble e quindi all'epoca avevano un po' il sapore di un problema accademico. Einstein infatti cercava delle soluzioni statiche, in accordo con quanto noto in quel periodo. Tuttavia le equazioni di Friedmann non ammettono soluzioni di questo tipo. Questo risulta immediatamente dalla (5.3) ponendo $\ddot{a} = 0$. In tal caso si ottiene infatti la condizione $\rho c^2 + 3P = 0$ che non può essere soddisfatta poichè sia P che ρ sono quantità definite positive.

Le equazioni di Einstein possono tuttavia essere modificate in modo da ammettere soluzioni statiche. Questo si ottiene aggiungendo al tensore $G_{\mu\nu}$ al primo membro (quello che contiene le caratteristiche geometriche) un termine proporzionale a $g_{\mu,\nu}$, che per motivi di convenienza viene scritto nella forma $c^2 \Lambda g_{\mu,\nu}$, dove Λ è una costante, detta *costante cosmologica*. Si noti che la presenza di questo termine introduce nella teoria un parametro aggiustabile, cosa che Einstein giudicava esteticamente spiacevole. Portando il termine aggiunto al secondo membro del sistema di equazioni di Einstein, si vede che il tensore di energia-impulso originale, $T_{\mu\nu}$, è stato sostituito da:

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} &= (P + \rho c^2) u_\mu u_\nu - \left(P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) g_{\mu\nu} \\ &= (P' + \rho' c^2) - P' g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

dove

$$P' = P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \tag{5.5}$$

$$\rho' = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \tag{5.6}$$

L'espressione di $T'_{\mu\nu}$ coincide dunque formalmente con quella di $T_{\mu\nu}$, ma con P' e ρ' al posto di P e ρ . Le equazioni di Friedmann hanno quindi ancora la stessa struttura delle (5.2) e (5.3), pur di effettuare la precedente sostituzione. Esplicitamente:

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G})a^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + \rho_\Lambda c^2)a^2 \quad (5.7)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G})a = -\frac{4\pi G}{3c^2}[(\rho + \rho_\Lambda)c^2 - 3(P + P_\Lambda)], \quad (5.8)$$

dove si è posto:

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}.$$

La condizione per l'esistenza di un modello statico diviene ora:

$$\rho c^2 + 3P - \frac{\Lambda c^4}{4\pi G} = 0,$$

e questa può essere soddisfatta da un'opportuna scelta della costante cosmologica senza violare il carattere positivo definito di densità e pressione. In particolare, se la pressione è trascurabile rispetto alla densità di energia, il che equivale a porre formalmente $P = 0$ (modelli di *polvere*), si ottiene $\rho = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G}$ e, sostituendo questa espressione nella (5.6):

$$k = \Lambda a^2 \Rightarrow k = 1 \quad ; \quad \Lambda = 1/a^2.$$

Si vede dunque che l'introduzione della costante cosmologica equivale a postulare l'esistenza di una nuova sorgente di energia, la cui natura è peraltro sconosciuta, con densità $\rho_\Lambda c^2$, che obbedisce all'insolita equazione di stato:

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (5.9)$$

L'introduzione della costante Λ , oltre a permettere di ottenere un modello statico, amplia la rosa di modelli possibili. A titolo di esempio di modelli *esotici* possibili (ma si tratta di un esempio che ci tornerà utile in seguito), si consideri il caso in cui le sole sorgenti della gravità siano quelle legate alla presenza di Λ . La (5.8) con $P = \rho = 0$ dà:

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda c^2}{3}a \Rightarrow a \propto e^{t/\tau} \quad , \quad \tau = \left(\frac{3}{\Lambda c^2}\right)^{1/2} \quad (5.10)$$

La caratteristica importante di questo modello è legata al fatto che la presenza di una pressione negativa, P_Λ , ha cambiato il segno dell'accelerazione, dando luogo ad un'espansione esponenziale.

Dopo la scoperta di Hubble, che eliminava la necessità di trovare soluzioni statiche, Einstein ripudiò il termine cosmologico (dichiarando che era stato "il più grande errore della sua vita"). Tuttavia, recenti osservazioni cosmologiche sembrano richiedere la reintroduzione del termine cosmologico nelle equazioni di Einstein. Dopotutto, non era stato un errore ... Torneremo su questi aspetti più avanti e nei capitoli successivi porremo sempre $\Lambda = 0$, a meno che non sia esplicitamente indicato.

Le equazioni di Friedmann (senza costante cosmologica) possono essere ricavate anche in uno schema puramente newtoniano, come adesso verrà dimostrato. Consideriamo dapprima il fatto che il modello omogeneo e isotropo di universo che stiamo considerando è semplicemente un caso particolare di un modello a simmetria sferica, in cui ogni punto può essere scelto come centro. D'altra parte, uno dei risultati salienti della teoria newtoniana della gravitazione stabilisce che una distribuzione sfericamente simmetrica di materia non crea campo gravitazionale all'interno di una cavità sferica (questa proprietà rimane valida anche in RG nell'ipotesi di uno spazio geometrico omogeneo e isotropo). L'omogeneità e l'isotropia sono inoltre proprietà che non vengono alterate nel tempo se vale la legge di Hubble. Per rendercene conto, consideriamo la variazione della densità all'interno di una sfera di raggio $R = R(t)$. La densità sarà data da

$$\rho = \frac{M}{4\pi/3 R^3},$$

da cui derivando otteniamo:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\rho}{R}\dot{R} = -3\rho H,$$

dove si è fatto uso della legge di Hubble : $\dot{R} = v = HR$. Poichè sia H che ρ non dipendono dalle coordinate spaziali, ne segue che, se vale la legge di Hubble e se ρ non dipende dalle coordinate spaziali ad un certo istante, tale proprietà è mantenuta a tempi successivi.

Consideriamo ora l'equazione di moto di una particella che si trovi sulla superficie di una sfera di raggio $R = R(t)$ e che partecipi solidalmente al moto di espansione di tale sfera. Si avrà: $\ddot{R} = -(GM)/R^2$, il cui integrale primo si scrive

$$\dot{R}^2 - \frac{2GM}{R} = C = cost$$

Esprimendo la massa in termini della densità, si vede che la precedente equazione è identica all'equazione di Friedmann (5.2). Quello che in questa trattazione ovviamente manca è il legame tra la costante d'integrazione, C , e la costante k che definisce la geometria nella metrica di RW.

5.2 Le soluzioni delle equazioni di Friedmann

Come già osservato in precedenza, per ottenere le soluzioni delle equazioni di Friedmann è necessario conoscere la relazione che intercorre tra P e ρ . Una maniera comoda di parametrizzare tale relazione consiste nello scrivere ,

$$P = w\rho c^2 \quad (5.11)$$

con w costante. Questa forma raggruppa diversi casi interessanti: $w = 0$, che corrisponde a modelli di polvere, $w = 1/3$ che si applica al caso in cui il sistema sia composto di particelle ultra-relativistiche e infine $w = 1$, che corrisponde a materia con il massimo di rigidità compatibile con la relatività. In quest'ultimo caso infatti, la velocità del suono sarebbe uguale alla velocità della luce. Anche l'equazione di stato di un gas non relativistico a temperatura T può essere messa nella forma (5.11). Infatti avremo:

$$P = (k/m)\rho_m T \quad e \quad \rho c^2 = \rho_m c^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{kT}{mc^2}\right).$$

Ponendo $\theta = \frac{kT}{mc^2}$ potremo scrivere $\rho_m = \rho(1 + \frac{3}{2}\theta)^{-1}$ e finalmente:

$$P = \frac{\theta}{1 + \frac{3}{2}\theta} \rho c^2.$$

P ha quindi un'espressione del tipo (5.11), con $w = \frac{\theta}{1 + \frac{3}{2}\theta}$. Si verifica facilmente che $w \ll 1$ per $T < 10^9 K$.

Sostituendo la forma parametrica dell'equazione di stato (5.11) nella (5.4) si ottiene:

$$w\rho c^2 \frac{da^3}{dt} = -\frac{d(\rho c^2 a^3)}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{da^3}{a^3} = -\frac{d\rho}{(1+w)\rho},$$

che integrata dà:

$$\rho a^{3(1+w)} = const. \quad (5.12)$$

La precedente relazione ci dice che per un Universo di pura materia ($w = 0$) $\rho \propto a^{-3}$, mentre per un Universo di pura radiazione ($w = 1/3$), $\rho \propto a^{-4}$. Questo ci fa capire che la radiazione sarà la sorgente di energia dominante per valori di a che tendono a zero. Poiché nei modelli di Friedmann il redshift è univocamente legato al fattore di scala, a , possiamo riscrivere la precedente relazione in termini del redshift, $z = (a_0/a) - 1$,

$$\rho(1+z)^{-3(1+w)} = cost \quad (5.13)$$

Consideriamo ora l'equazione (5.2) che riscriviamo nella forma:

$$kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a_0^2 - \dot{a}_0^2, \quad (5.14)$$

dove la seconda eguaglianza segue dall'aver valutato la costante del primo membro al momento attuale $t = t_0$ (d'ora in poi il pedice 0 indica che le grandezze sono valutate al tempo presente). Definendo la densità critica, ρ_c , e il parametro di densità, Ω come:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad , \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (5.15)$$

dove $H = H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ è il parametro di Hubble già introdotto in precedenza, la precedente equazione si può scrivere:

$$kc^2 = H^2 a^2 (\Omega - 1) = H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1). \quad (5.16)$$

Poichè k può assumere solo i valori 0, +1, -1, si vede che questa costante è determinata dal valore di $(\Omega_0 - 1)$. Quindi, *un Universo con curvatura spaziale positiva ha una densità maggiore di quella critica, mentre un Universo con curvatura spaziale negativa ha una densità inferiore a quella critica*. Se la densità assume esattamente il valore critico, la geometria dell'Universo è piatta, cioè euclidea. Da questa considerazione discende l'importanza di stimare il valore della densità di massa-energia al momento attuale. Il valore numerico della densità critica è:

$$\rho_{c0} = \rho_c(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1.88 \times 10^{-29} h^2 g \text{ cm}^{-3}.$$

Alternativamente, si può esprimere la densità critica in unità più direttamente legate all'osservazione come:

$$\rho_{c0} \simeq 2,76 \times 10^{11} h^2 M_\odot \text{ Mpc}^{-3}$$

Con $h = 0.72$ (vedi Cap. 1) le precedenti espressioni danno

$$\rho_{c0} \simeq 9.75 \times 10^{-30} g \text{ cm}^{-3} \simeq 1.43 \times 10^{11} M_\odot \text{ Mpc}^{-3}$$

Discuteremo più avanti i contributi noti o ipotizzati alla densità totale al momento attuale. Anticipando i risultati di tale analisi e limitandoci ai contributi provenienti dalla materia, sia sotto forma luminosa che oscura, e dal fondo di radiazione cosmica, si ha per la materia un densità di circa $3 \times 10^{-30} g \text{ cm}^{-3}$ e per il fondo di radiazione cosmica una densità di

massa equivalente di circa $5 \times 10^{-34} g cm^{-3}$. Al momento attuale l'Universo sembra quindi dominato dalla materia e Ω_0 risulta minore di uno. Nel passato tuttavia, a causa della diversa dipendenza di queste forme di energia dal fattore di scala a , la radiazione era la forma dominante e di questo bisognerà tener conto in una descrizione completa dell'evoluzione dell'Universo. Bisognerà inoltre considerare il possibile contributo del termine cosmologico.

L'evoluzione di un Universo dominato dalla materia in cui il contributo della pressione sia trascurabile (approssimazione eccellente nel caso che si considerino le galassie come le sorgenti principali della gravità) è particolarmente semplice e rappresenta un'utile base per la discussione del caso più generale. Dalla definizione di Ω abbiamo:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{H_0^2}{H^2} = (1+z)^3 \frac{H_0^2}{H^2} \quad (5.17)$$

cioè

$$\Omega H^2 = (1+z)^3 \Omega_0 H_0^2. \quad (5.18)$$

E' ora semplice ottenere una equazione per l'evoluzione del parametro di Hubble dalla (5.16) che si può mettere nella forma:

$$H^2(\Omega - 1) = (1+z)^2 H_0^2(\Omega_0 - 1)$$

e, utilizzando la (5.18)

$$H = H_0(1+z)(1+\Omega_0 z)^{1/2}. \quad (5.19)$$

Sostituendo questa espressione nella (5.18) si ottiene infine:

$$\Omega = \frac{\Omega_0(1+z)}{1+\Omega_0 z}. \quad (5.20)$$

E' infine possibile ottenere la relazione fra il redshift e il tempo, semplicemente derivando la relazione $1+z = a_0/a$ e utilizzando la (5.19):

$$\frac{dz}{dt} = -H(1+z) = -H_0(1+z)^2(1+\Omega_0 z)^{1/2} \quad (5.21)$$

La precedente equazione è valida per tutti i valori di k e può essere utilizzata al posto di una delle equazioni di Friedmann.

Veniamo ora a una caratteristica fondamentale dei modelli di Friedmann e cioè al loro carattere esplosivo. Con questo si vuol significare che è esistito un tempo *finito* nel passato in cui il fattore di scala era nullo. Questo risultato discende direttamente dall'equazione (5.3), che ci dice che la derivata seconda di a è definita negativa e quindi che la curva $a(t)$ ha la concavità rivolta verso il basso. Poichè attualmente a sta crescendo, è chiaro che procedendo all'indietro nel tempo a decresce e quindi vi sarà un momento nel passato, a distanza temporale finita, in cui a si annullerà. Questo istante può evidentemente essere preso come origine dell'asse dei tempi e viene indicato come listante del Grande Scoppio (*Big Bang*). Nel seguito misureremo *sempre* i tempi a partire dal Big Bang, a meno che non sia esplicitamente indicato il contrario.

Mentre l'origine esplosiva è comune a tutti i modelli di Friedmann, la *durata* dell'intervallo temporale che ci separa dal Big Bang, cioè l'età attuale dell'Universo, t_0 , dipende dal modello adottato. Dalla definizione della costante di Hubble, $H_0 = \dot{a}_0/a_0$ si vede che $1/H_0$ sarebbe il valore dell'età dell'Universo se la velocità di espansione fosse costante. Una tale stima di t_0 rappresenta un valore per eccesso, a causa della curvatura negativa di $a(t)$. Numericamente

$$1/H_0 \simeq 9.78 \times 10^9 h^{-1} \text{ anni} \simeq 13.6 \times 10^9 \text{ anni},$$

con $h = 0.72$.

Per passare alle soluzioni esplicite delle equazioni di Friedmann, consideriamo dapprima un modello che ha ricevuto una certa attenzione e che viene spesso utilizzato per avere un'idea approssimativa dell'evoluzione di un Universo di polvere è, il cosiddetto Universo di *Einstein-de Sitter* (EdS), in cui si suppone che sia $\Omega_0 = 1$ e quindi $\Omega = 1$ (vedi la (5.16)). In questo caso si può integrare immediatamente la (6.1), ottenendo

$$t = \frac{2}{3H_0} \frac{1}{(1+z)^{3/2}} = \frac{t_0}{(1+z)^{3/2}} \quad (5.22)$$

dove t_0 , età dell'Universo nel modello EdS, è pari a $(2/3)H_0$ cioè 9.06×10^9 anni. La legge esplicita per la variazione di $a(t)$ si ottiene integrando la (5.2) con $k = 0$ (come richiesto dalla condizione $\Omega_0 = 1$) e tenendo presente la (5.12):

$$a(t) = (6\pi\rho_0 a_0^3)^{1/3} t^{2/3}, \quad \rho(t) = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}. \quad (5.23)$$

Più in generale, possiamo considerare modelli con una generica equazione di stato $P = w\rho c^2$. In tal caso, la seconda eguaglianza della (5.14) combinata con la (5.12) dà:

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= H^2 a^2 \Omega - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) = \\ &= H_0^2 a_0^2 \Omega_0 [\Omega_0 (a_0/a)^{1+3w} + (1 - \Omega_0)] \end{aligned} \quad (5.24)$$

Il modello EdS si ottiene ovviamente ponendo $w = 0$ e $\Omega_0 = 1$.

Nel caso di un Universo curvo, $\Omega_0 \neq 1$, il primo termine in parentesi quadra dominerà quando $t \rightarrow 0$, poichè $a \rightarrow 0$ mentre il secondo termine è una costante. Per piccoli valori di t la (5.24) diviene quindi:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \Omega_0 (a_0/a)^{1+3w},$$

la cui soluzione è:

$$a(t) = a_0 (t/t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad \text{con} \quad t_0 = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{H_0}. \quad (5.25)$$

La densità varia come

$$\rho(t) = \rho_0 (t/t_0)^{-2} = \frac{\Omega_0}{6\pi G(1+w)^2} \frac{1}{t^2}. \quad (5.26)$$

Al passare del tempo il primo termine in parentesi quadra della (5.24) diviene paragonabile al secondo e l'evoluzione temporale cambia a seconda che sia $\Omega_0 < 1$ oppure $\Omega_0 > 1$. Nel primo caso infatti \dot{a} non si annulla mai e quindi si ha un'espansione indefinita. Nel secondo caso esiste un valore di $a = a_{max}$ che annulla il termine a secondo membro della (5.24). Per questo valore di a , l'espansione si arresta e viene sostituita da una contrazione che prosegue fino a raggiungere nuovamente uno stato singolare con $a = 0$. A questo punto si può immaginare che il processo ricominci per una serie indefinita di cicli. Siamo quindi in presenza di un modello di *Universo oscillante*. La soluzione esplicita della (5.24) per $\Omega_0 > 1$ e $w = 0$ si esprime meglio in forma parametrica, introducendo un parametro θ :

$$\begin{aligned} a(\theta) &= a_0 \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (1 - \cos\theta) \\ t(\theta) &= \frac{1}{2h_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\theta - \sin\theta) \end{aligned} \quad (5.27)$$

che è l'equazione di una cicloide.

Dalla (5.27) si possono ricavare immediatamente i valori di

$$a_{max} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} \quad \text{e} \quad t_{max} = \frac{\pi}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

Anche l'età dell'Universo si ricava facilmente dalla (5.27). Infatti, ponendo $a(\theta_0) = a_0$ nella prima si ottiene:

$$\cos\theta_0 = 1 - \frac{2(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0},$$

e sostituendo nella seconda:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{1/2}} \left[\arccos\left(\frac{2}{\Omega_0 - 1}\right) - \frac{2}{\Omega_0}(\Omega_0 - 1)^{1/2} \right] < \frac{2}{3H_0}$$

Come abbiamo già notato, nelle fasi iniziali dell'Universo la forma di energia dominante è quella radiante ($w = 1/3$). E' quindi interessante studiare questo caso. Sempre dalla (5.24) si ottiene:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 [\Omega_0(a_0/a)^2 + (1 - \Omega_0)]$$

dove ora $\Omega_0 < 1$ è il parametro di densità della radiazione al momento attuale.

La soluzione della precedente equazione è:

$$a(t) = a_0 \left(2H_0\Omega_0^{1/2} \right)^{1/2} \left(t + \frac{1 - \Omega_0}{2\Omega_0^{1/2}} H_0 t^2 \right)^{1/2} \quad (5.28)$$

Per piccoli valori di t :

$$a(t) = \left(\frac{32\pi G}{3} \rho_{r0} \right)^{1/4} t^{1/2} \quad (5.29)$$

dove con ρ_{r0} si è indicato il valore attuale della densità equivalente di energia radiante. Quest'ultima quantità si può facilmente calcolare dalla teoria del corpo nero e dalla conoscenza del valore attuale della temperatura della radiazione cosmica di fondo che, come si è detto, vale $T_0 = 2,725 \pm 0.001K$. Si ha infatti:

$$\rho_{r0} c^2 = a_R T_0^4 \simeq 4.17 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3},$$

dove si è indicato con a_R la costante che compare nella teoria del corpo nero per evitare confusioni con il fattore di scala cosmica, a . Il valore corrispondente di Ω_0 è $\simeq 4.8 \times 10^{-5}$.

Con questo valore di Ω_0 si vede Dalla (5.28) si vede che l'equazione approssimata (5.29) è valida per $t \ll \frac{2\Omega_0^{1/2}}{H_0(1-\Omega_0)}$. Con il valore di Ω_0 appena calcolato otteniamo $t \ll 2 \times 10^4$ *anni*.

In un Universo dominato dalla radiazione è possibile trovare una relazione esplicita tra il tempo trascorso dal Big Bang e la temperatura. Infatti, utilizzando la teoria del corpo nero e la (5.12) con $w = 1/3$, si ottiene:

$$\rho_r \propto T^4 \propto a^{-4} \quad \Rightarrow T \propto a^{-1} \quad T = T_0(a_0/a). \quad (5.30)$$

Ricordando ora la (5.29) otteniamo:

$$\frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{32\pi G}{3c^2} a_R \right)^{1/4} T_0 t^{1/2}, \quad (5.31)$$

e, usando la (5.30):

$$T = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a_R} \right)^{1/4} t^{-1/2} \simeq \frac{1.3 \times 10^{10}}{t^{1/2}} K, \quad (5.32)$$

con t in secondi. Quindi all'età di un secondo l'Universo primordiale dominato dalla radiazione aveva una temperatura di circa 13 miliardi di gradi.

6 Il modello standard

E' ora possibile cercare di tracciare la storia termica dell'Universo, cioè l'evoluzione della temperatura causata dall'espansione, ed associare a ciascuna epoca la fisica rilevante. Come modello si sceglie il cosiddetto *modello standard*: Fino a pochi anni fa con questa espressione si intendeva un modello di Friedmann con $\Lambda = 0$, ma recentemente, a causa dell'apparente necessit di introdurre la costante cosmologica, la stessa espressione viene usata anche quando $\Lambda \neq 0$. Il modello standard contiene le caratteristiche essenziali dell'evoluzione dell'Universo e rappresenta la base di partenza per il confronto con i dati di osservazione. Come vedremo, tale confronto mette in luce alcuni problemi, la cui soluzione impone l'introduzione di modifiche importanti nel modello stesso.

Formalmente il modello standard ha inizio nel Big Bang, con $a = 0$ e densità e temperatura infinite. E' chiaro che non ha senso estrapolare il modello all'istante iniziale: nulla sappiamo della fisica della materia a densità superiori a quelle nucleari e quindi a rigore dovremmo fermarci all'istante in cui la densità media della materia è dell'ordine, o di poco superiore, a $10^{15} g cm^{-3}$. Assumendo per la densità attuale della materia il già citato valore di $2.7 \times 10^{-30} g cm^{-3}$ e ricordando la (5.13), si ottiene: $1 + z_{nuc} = (10^{15}/2.7 \times 10^{-30})^{1/3} \simeq 10^{15}$, dove z_{nuc} è il redshift a cui corrisponde una densità dell'ordine di quella nucleare.

A un redshift così elevato corrisponde un'epoca in cui l'Universo era dominato dalla radiazione. Infatti la transizione tra un Universo dominato dalla radiazione a quella attuale, in cui la materia esercita un ruolo preponderante, avviene al redshift z_{eq} a cui si ha equipartizione tra le due forme di energia: $\rho_m(z_{eq}) = \rho_r(z_{eq})$. Utilizzando la (5.13) si ha:

$$\rho_r = \rho_{r0}(1 + z_{eq})^4 = \rho_m = \rho_{m0}(1 + z_{eq})^3$$

da cui

$$1 + z_{eq} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{r0}} \simeq 3500, \quad (6.1)$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene utilizzando i valori di ρ_{m0} indicato in precedenza e il valore di ρ_{r0} dato dall'equazione (6.2) di pag. 33.

D'altra parte, in un Universo dominato dalla radiazione possiamo utilizzare la relazione $T = T_0(1 + z)$ e la (5.32), ottenendo:

$$t_{nuc} = \left(\frac{1.3 \times 10^{10}}{T_0} \right)^2 (1 + z_{nuc})^{-2} \simeq 10^{-10} s.$$

Come si vede la nostra estrapolazione può arrivare affidabilmente molto vicino al Big Bang. Il modello standard rappresenta dunque una descrizione attendibile della dinamica dell'Universo per $t > t_{nuc}$. Per tempi inferiori a t_{nuc} entriamo viceversa nel campo delle speculazioni, più o meno giustificate teoricamente. D'altra parte, non ci possiamo aspettare che una teoria classica, come la RG, possa avere validità nelle condizioni prevalenti nella

fase iniziale dell'Universo, in cui comunque gli effetti quantistici giocheranno un ruolo importante. E' quindi importante stimare la durata del periodo, a partire dall'istante iniziale, durante il quale sarà necessario utilizzare una teoria quantistica della gravitazione, teoria che a tutt'oggi non è stata formulata. Una tale stima si può ottenere nel modo seguente.

Calcoliamo dapprima un lunghezza caratteristica che esprima la condizione che sia gli effetti della RG che quelli quantistici siano importanti. Gli effetti gravitazionali richiederanno l'uso della RG quando l'energia gravitazionale di un corpo di massa M e raggio R è dello stesso ordine dell'energia di riposo, cioè quando $GM^2/R = Mc^2$, da cui si ricava $R = (GM/c^2)$. Se questa lunghezza risulta essere dell'ordine della lunghezza d'onda Compton relativa alla massa M , $\lambda_c = \hbar/Mc$, anche gli effetti quantistici saranno importanti. Si ottiene così un valore caratteristico per M , la cosiddetta *massa di Planck*, che risulta essere

$$M_P = (\hbar c/G)^{1/2} \simeq 10^{-5}g.$$

La lunghezza Compton relativa alla massa di Planck è la *lunghezza di Planck*,

$$L_P = (\hbar G/c^3)^{1/2} \simeq 10^{-33}cm$$

e rappresenta la quantità desiderata. Infine, il *tempo di Planck* è definito da:

$$t_P = L_P/c \simeq 10^{-44}s.$$

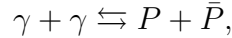
Come si vede, le correzioni quantistiche intervengono solo nei primissimi istanti dopo il Big Bang, $t \lesssim t_P$. L'intervallo di tempo tra t_P e t_{nuc} non richiede dunque una teoria quantistica della gravitazione e, nonostante la nostra ignoranza della fisica a densità molto superiori a quella nucleare, le teorie quantistiche dei campi che descrivono le interazioni fondamentali ci consentono di dare una descrizione coerente della dinamica dell'Universo, sia pure mantenendo una dose di sana cautela, almeno da $t \simeq 10^{-35}$ secondi in poi.

Nell'Universo primordiale le particelle possono essere trattate come non interagenti, nonostante esse siano, in maggioranza, cariche. Questo è dovuto al fatto che l'energia potenziale elettrostatica, $e^2/r \sim e^2 n^{1/3}$ è molto minore dell'energia cinetica $\sim kT$. Poichè $n^{1/3}$ e kT si trasformano allo stesso modo, cioè proporzionalmente a a_0/a , il rapporto tra le due energie non cambia nel tempo e può quindi essere calcolato al momento attuale in cui vale circa 10^{-5} . Se le particelle non interagiscono tra di loro, la loro termodinamica è quella di un gas in equilibrio e questo permette di tracciare l'evoluzione termica dell'Universo primordiale in maniera semplice.

Secondo la visione attuale, in queste primissime fasi la materia-energia che forma l'Universo è in una situazione di massima caoticità e quindi di (quasi) perfetta omogeneità. Le sole disomogeneità residue sono il relitto delle fluttuazioni quantistiche presenti nell'epoca di Planck. A questo stadio tutta la materia è scomposta nei suoi elementi primi, i cosiddetti *quarks*, legati alle interazioni forti, i *leptoni* legati alle interazioni deboli (sostanzialmente i neutrini e gli elettroni e le rispettive antiparticelle) e naturalmente i fotoni. A temperature

al disopra di $\simeq 10^{28}K$ si suppone che addirittura le interazioni fondamentali siano indistinguibili tra di loro. Solo la progressiva diminuzione di temperatura permette la formazione di aggregazioni dei componenti primigeni capaci di sopravvivere all'effetto distruttivo dei fotoni della radiazione primordiale. Al tempo stesso si assiste ad una differenziazione delle interazioni fondamentali. Si differenziano dapprima le interazioni forti, poi quelle deboli e infine quelle elettromagnetiche. Possiamo quindi distinguere le varie epoche in funzione dell'interazione fondamentale dominante in quella fase.

In un universo dominato dalla radiazione, la *composizione* della materia ad ogni particolare epoca è dettata da reazioni del tipo:



dove P e \bar{P} rappresentano genericamente una particella e la sua antiparticella. Queste reazioni mantengono l'intero sistema all'equilibrio termodinamico, cosicchè le densità numeriche dei fotoni e delle particelle sono approssimativamente le stesse. L'effetto dell'espansione dell'Universo, e quindi della diminuzione della temperatura di equilibrio, si manifesta in due modi diversi. In primo luogo, quando la temperatura scende al disotto della soglia per la produzione di coppie (P, \bar{P}) , cioè quando $kT < 2mc^2$, dove m è la massa della particella in questione, l'equilibrio non può più essere mantenuto, le coppie si annichilano, lasciando quindi soltanto fotoni. In questo processo viene trasferita energia al gas di fotoni, la cui temperatura dunque aumenta. In secondo luogo, può accadere che l'intervallo di tempo tra due successive interazioni divenga comparabile con il tempo scala evolutivo dell'epoca considerata. In questo caso le particelle si *disaccoppiano*, cioè non hanno più la possibilità di interagire e quindi evolvono indipendentemente dal gas di fotoni. L'ordine temporale in cui queste circostanze si presentano determina univocamente la composizione della materia in funzione del tempo.

Per stimare in modo semi-quantitativo l'epoca del *disaccoppiamento* si utilizza il cosiddetto *criterio di Gamow*, che confronta il tempo medio tra due interazioni successive, t_{int} , con il tempo scala dell'evoluzione cosmica, t_{ev} , che si assume pari all'età dell'Universo all'epoca in considerazione. Perchè un'interazione sia efficace è necessario che $t_{int} < t_{ev}$. Quando questa disuguaglianza non è più verificata, il tasso di reazione crolla e gli effetti dell'interazione divengono del tutto trascurabili. Poichè $t_{int} = (n\sigma v)^{-1}$, dove σ è la sezione d'urto per la reazione considerata, n la densità numerica delle particelle interagenti e v la velocità relativa, e $t_{ev} \simeq H^{-1}$, dove H è il valore del parametro di Hubble all'epoca considerata, una particolare interazione è importante fino a quando $H(t) > n\sigma c$, dove si è considerato che le particelle interagenti siano ultrarelativistiche.

All'equilibrio termodinamico le densità numeriche dei bosoni e fermioni, con energia compresa tra E e $E + dE$ sono date da:

$$n(E)dE = \frac{4\pi}{c^3 h^3} g \frac{E dE}{e^{E/kT} \pm 1}$$

dove il segno $+$ si riferisce ai fermioni e il segno $-$ ai bosoni ed il fattore g tien conto della molteplicità degli stati di spin. Quindi $g = 2$ per fotoni e fermioni non relativistici di spin $1/2$ mentre $g = 1$ per neutrini e per fermioni ultrarelativistici.

Partendo da queste espressioni è possibile calcolare le densità di energia nel limite ultra-relativistico come

$$\epsilon = \int_0^\infty E n(E) dE$$

per ciascuna delle specie di particelle presenti ad ogni determinata epoca. Calcoli dettagliati dimostrano che in tutti i casi $\epsilon \propto a_R T^4$, dove T è la temperatura della specie considerata (che non è necessariamente la stessa per tutte le specie dopo il disaccoppiamento!) Al tempo presente, in cui sono sopravvissuti solo fotoni e tre famiglie di neutrini, si ottiene:

$$\epsilon = \rho_{r0} c^2 = 1.68 a_R T_0^4 \simeq 7.0 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3} K^{-4} \quad (6.2)$$

dove si è usato per T_0 il valore misurato della temperatura della CBR, $T_0 = 2.725 \text{ K}$.

Nell'era delle **interazioni forti** $t \simeq 10^{-12} s$, $T \simeq 10^{16} K$ l'Universo è composto da quarks e antiquarks, sostanzialmente in ugual numero, con una lieve eccedenza di quarks, circa una parte su 10^9 . I quarks si combinano con gli antiquarks e formano sia la materia che noi conosciamo, cioè protoni e neutroni, che vengono raggruppati nella categoria dei *barioni*, che le relative antiparticelle. Quando la temperatura scende sotto i $10^{12} K$ non si hanno più quarks liberi. Particelle ed antiparticelle si annichilano e, a causa della lieve eccedenza di particelle sulle antiparticelle, sopravvive soltanto una certa quantità di barioni: l'Universo, alla fine di questa fase, è composto essenzialmente di fotoni e barioni, nella misura di un barione ogni 10^9 fotoni, e di elettroni, positroni ed altri *leptoni*).

Si osservi che, siccome il numero totale di barioni è una grandezza conservata, *tutti i barioni si sono formati in questa fase*. In altre parole, i protoni ed i neutroni che sono i "mattoni" della materia nella forma a noi familiare e che costituiscono l'Universo conosciuto, e dunque anche noi stessi, si sono formati allora. Noi conserviamo quindi nel nostro corpo la traccia tangibile di quanto è avvenuto nei primi 10^{-3} secondi dopo il Big Bang!

Nella successiva era delle **interazioni deboli** si ha un sostanziale equilibrio tra elettroni, neutrini e le relative antiparticelle. Le reazioni che contribuiscono a mantenere l'equilibrio tra queste specie sono lo scattering elastico elettrone-neutrino e la reazione



. Una stima dei valori delle sezioni d'urto di questi processi e l'uso del criterio di Gamow permette di concludere che l'equilibrio non può essere mantenuto quando $T \lesssim 10^{10} K$, temperatura alla quale i neutrini si disaccoppiano dagli elettroni. I neutrini, tuttavia, possono ancora interagire con i barioni a causa del fatto che la sezione d'urto per queste reazioni è notevolmente maggiore di quella per l'interazione con gli elettroni. I neutrini non sono ancora completamente disaccoppiati dalla materia, circostanza che si presenterà a temperature leggermente inferiori.

A $T \simeq 10^{10} K$ l'energia dei fotoni, kT è dello stesso ordine dell'energia di riposo degli elettroni, cioè $0.51 MeV$. La reazione:

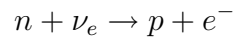
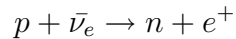


che fino ad allora aveva mantenuto la precedente reazione all'equilibrio non è più in grado di farlo, le annichilazioni non sono più compensate dalla produzione di coppie, e si assiste quindi ad un aumento della densità di energia collegata alla radiazione. La reazione alternativa per l'annichilazione delle coppie con produzione di neutrini, (6.3), è ormai inefficiente, come si è già detto. Si può calcolare la quantità di energia che questo processo genera, supponendo che l'entropia sia conservata nel processo di annichilazione, ipotesi che è possibile giustificare. Ne risulta che la temperatura della radiazione, al termine della fase di annichilazione, è maggiore di quella dei neutrini che si sono disaccoppiati precedentemente e precisamente si ha:

$$T_\gamma \simeq 1.4 \times T_\nu$$

. Pertanto, se fosse possibile rivelare oggi il fondo di neutrini, analogamente a quello della radiazione, ad esso corrisponderebbe una temperatura di $(2.7/1.4) K \simeq 1.93 K$.

Le densità numeriche delle due specie di barioni, protoni e neutroni, non sono fisse perchè gli uni possono trasformarsi negli altri, grazie alle reazioni:



Il criterio di Gamow applicato a queste reazioni permette di stabilire che esse perdono la loro influenza ad una temperatura corrispondente a $kT \simeq 0.3 MeV$. A partire da questo istante il rapporto delle densità numeriche dei neutroni e dei protoni rimane congelato al valore $n_n/n_p \simeq 1/7$.

Senza entrare nei dettagli, possiamo comprendere che all'ulteriore diminuire della temperatura si formino stabilmente composti che sarebbero stati immediatamente distrutti a temperature superiori. A temperature inferiori a circa $10^{11} K$ (corrispondente a circa 1/10 di secondo dopo il Big Bang - (5.32), Universo di radiazione!) divengono possibili le reazioni nucleari tra protoni e neutroni e comincia la *nucleosintesi primordiale*, che ha come risultato la formazione di elio e di altri elementi leggeri, quali il deuterio. La nucleosintesi primordiale non può tuttavia produrre elementi più pesanti. Infatti, sia la temperatura che la densità diminuiscono col tempo e viene quindi preclusa la possibilità di ottenere le condizioni necessarie per la bruciatura dell'elio e la conseguente formazione di elementi più pesanti quali carbonio, azoto, ossigeno Per ritrovare queste condizioni, bisognerà attendere la formazione delle stelle, nel cui interno possono verificarsi le condizioni appropriate per proseguire la nucleosintesi.

Le reazioni di nucleosintesi cessano quando l'età dell'Universo è dell'ordine di qualche giorno. Possiamo immaginare che allo spegnersi delle reazioni di nucleosintesi tutti i neutroni siano stati incorporati nei nuclei di elio, cosicché il numero dei quest'ultimi è pari alla metà del numero iniziale di neutroni. Il numero di protoni è pari a quello iniziale, diminuito del doppio del numero di nuclei di elio, poichè quest'ultimo contiene due protoni. La frazione di

elio (in numero) è quindi data da:

$$\begin{aligned} \frac{\text{numero } He_4}{\text{numero protoni} + \text{numero } He_4} &= \frac{n_n/2}{(n_p - n_n) + n_n/2} \\ &= \frac{2(n_n/n_p)}{2 - n_n/n_p} \end{aligned}$$

Usando $n_n/n_p \simeq 1/7$ si ottiene per la frazione di elio in numero il valore di circa 7.5 %. La frazione di elio in massa, il parametro Y della teoria della struttura stellare, si ricava da:

$$\frac{n_4 m_4}{n_p m_p + n_n m_n} = \frac{2(n_n/n_p)}{1 + n_n/n_p}$$

cioè circa il 25%, se $n_n/n_p \simeq 1/7$.

La composizione della materia al termine della nucleosintesi è dunque circa 75 % idrogeno e 25% elio. oltre a questi elementi, rimangono tracce di altri elementi leggeri, quali D, He₃ e Li. L'abbondanza del deuterio, anche se esigua, è particolarmente importante. infatti il deuterio prodotto per nucleosintesi nell'interno delle stelle, viene immediatamente riutilizzato per la sintesi dell'He₃ e quindi non vi è immissione di D nel mezzo interstellare per effetto della nucleosintesi stellare, a differenza di quanto avviene per l'He₄. La misura del deuterio interstellare è quindi un buon test dei calcoli della nucleosintesi primordiale.

La fase successiva alla nucleosintesi vede la materia sotto forma di *plasma*, cioè di un gas di protoni ed elettroni liberi. La radiazione interagisce essenzialmente con gli elettroni, sia attraverso lo scattering Thomson che lo scattering Compton. Questa situazione si protrae fin quando la temperatura si è abbassata sufficientemente da permettere la ricombinazione di protoni ed elettroni e la conseguente formazione di atomi neutri. Questo avviene quando la temperatura si è abbassata fino a circa 4000K. La formazione di atomi neutri ha come effetto quello di aumentare notevolmente il cammino libero medio dei fotoni, poichè la loro sezione d'urto con gli atomi neutri è molto più piccola di quella con gli elettroni liberi. L'Universo diviene quindi *trasparente alla radiazione*. La materia e la radiazione sono (quasi) completamente disaccoppiate: i fotoni emessi in questa fase viaggiano per un tempo molto lungo prima di poter interagire. i fotoni della CBR che riveliamo oggi sono stati emessi a quest'epoca. All'epoca del disaccoppiamento il tempo tra due collisioni diventa paragonabile all'età dell'Universo e questo ci permette di determinare il momento in cui i fotoni della radiazione di fondo hanno subito l'ultimo scattering prima di venir catturati dai nostri strumenti.

Il tempo medio tra due collisioni è infatti dato da $\tau_{coll} = (\sigma_{Th} n_e c)^{-1}$, dove σ_{Th} è la sezione d'urto Thomson e n_e la densità numerica degli elettroni. La condizione $t_{dis} \simeq \tau_{coll}$ ci permette di determinare t_{dis} (o meglio z_{dis}), una volta nota la legge di variazione di n_e . Calcoli dettagliati, basati sulle previsioni del modello standard, portano a $z_{dis} \simeq 1100$.

Questo dimostra che la radiazione di fondo è l'oggetto più vecchio con cui siamo venuti a contatto, oggetto che porta codificate in sé tutte le informazioni relative allo stato dell'Uni-

verso ben prima delle formazione di stelle e galassie. La sua scoperta ha segnato uno dei punti di svolta della cosmologia moderna ed è quindi importante conoscerne le caratteristiche.

Le più recenti misure hanno mostrato che lo spettro della CBR riproduce con sorprendente esattezza quello di un corpo nero con $T_0 = 2.725 \pm 0.001K$, ma ha anche messo in evidenza delle piccolissime fluttuazioni di temperatura dell'ordine di alcune decine di microKelvin, sulla scala angolare di qualche grado. E' chiaro quindi che qualunque modello cosmologico deve essere capace di spiegare l'esistenza e le caratteristiche di questa radiazione. La CBR è di fatto la più convincente motivazione per l'adozione di modelli di Friedmann ed ha rappresentato l'argomento vincente nello scartare i modelli stazionari. Possiamo tuttavia chiederci se il fatto che la CBR esibisca oggi un perfetto spettro di corpo nero ci autorizzi a identificarla come il relitto della radiazione in equilibrio termodinamico con la materia delle prime fasi della vita dell'Universo. In altri termini, come evolve lo spettro della radiazione per effetto dell'espansione universale?

Per rispondere a questa domanda cerchiamo allora il legame tra la densità di fotoni tra ν e $\nu + d\nu$ al tempo t e quella tra ν_0 e $\nu_0 + d\nu_0$ al tempo t_0 . Tenendo conto che i volumi scalano proporzionalmente ad a^3 , avremo:

$$n_{\nu_0}(t_0)d\nu_0 = (a/a_0)^3 n_{\nu}(t)d\nu$$

e, utilizzando la nota formula di Planck:

$$n_{\nu_0}(t_0)d\nu_0 = (a/a_0)^3 (8\pi/c^3) \frac{\nu^2 d\nu}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1}.$$

Ricordando ora che $\nu/\nu_0 = a_0/a$, si può scrivere la precedente equazione nella forma:

$$n_{\nu_0}(t_0)d\nu_0 = (8\pi/c^3) \frac{\nu_0^2 d\nu_0}{\exp\left[\frac{h\nu_0}{kT(a/a_0)}\right] - 1}.$$

Lo spettro ha quindi mantenuto la forma di Planck, ma la temperatura vale ora

$$T_0 = (a/a_0)T = \frac{T}{1+z}.$$

All'epoca del disaccoppiamento è già avvenuta la transizione tra un Universo dominato dalla radiazione a quella attuale in cui la materia esercita un ruolo preponderante. Infatti $z_{eq} \simeq 3500$ (vedi (6.1)), mentre, come si è visto, $z_{dis} \simeq 1100$. Utilizzando la relazione $T = T_0(1+z)$ si trova che $T_{eq} \simeq 1.6 \times 10^4 K$, mentre da

$$T_{dis} = T_{eq} \frac{1+z_{dis}}{1+z_{eq}}$$

si ottiene $T_{dis} \simeq 5000K$.

7 Contributi alla densità di energia

Come abbiamo visto la dinamica dell'Universo è controllata dalla densità totale di massa-energia che determina le sorgenti del campo gravitazionale. In realtà, la quantità di maggior interesse è il parametro $\Omega = \rho/\rho_c$. Come già detto, ρ e quindi Ω raggruppano *tutti* i contributi alla densità di energia, indipendentemente dalla loro natura. Pertanto potremo scrivere Ω nella forma:

$$\Omega = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \dots$$

, dove il primo termine raggruppa i contributi, oltre che dei fotoni, delle altre particelle ultrarelativistiche, il secondo si riferisce al contributo della materia, il terzo all'eventuale contributo derivante dalla costante cosmologica e i puntini rappresentano altri ipotetici contributi. Abbiamo anche visto che è sufficiente valutare questa cruciale quantità al tempo attuale. La stima dei contributi delle varie forme di energia a Ω_0 , ha rappresentato e tuttora rappresenta uno dei più importanti e difficili compiti della cosmologia osservativa. Esamineremo adesso brevemente i contributi noti alla densità totale di massa-energia, indicando di volta in volta i metodi usati per ottenere queste stime.

Se si suppone che ρ_{r0} sia sostanzialmente determinata dalla CBR e dalle tre famiglie di neutrini, dalla (6.2) si ottiene

$$\rho_{r0} \simeq 7.8 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$$

a cui corrisponde

$$\Omega_{r0} \simeq 4.15 \times 10^{-5} \tag{7.1}$$

Come si vede la radiazione contribuisce in maniera trascurabile ad Ω_0 .

La materia costituisce sicuramente uno dei componenti fondamentali dell'Universo e la sua presenza può essere messa in evidenza sia attraverso gli effetti gravitazionali che essa esercita nel suo intorno, che rivelando la radiazione emessa. E' evidente che il primo metodo permette di stimare la quantità di massa presente, indipendentemente dal fatto che essa emetta della radiazione o meno, mentre il secondo si applica evidentemente solo alla materia *luminosa*. Il procedimento comunemente adottato si basa sulla supposta conoscenza di una relazione tra la quantità media di materia (luminosa e non) e la radiazione totale emessa. La suddetta relazione ha la forma:

$$\rho_m = \ell \frac{M}{L}, \tag{7.2}$$

dove L è la luminosità dell'oggetto e M la sua massa. ℓ è la luminosità media per unità di volume della materia e M/L è il valor medio del rapporto tra massa e luminosità per la categoria di oggetti considerata. La funzione universale di luminosità, ℓ , quantità nota con sufficiente precisione, vale

$$\ell = (2 \pm 0.2) \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-1},$$

In pratica, la stima di ρ_m si ottiene dal rapporto massa-luminosità per gli ammassi di galassie che, a causa delle loro ragguardevoli dimensioni, possono essere considerati rappresentativi della materia che costituisce l'Universo.

Possiamo ora ricavare una espressione di Ω_m in termini del rapporto M/L per gli ammassi di galassie. Ponendo $\rho_m = \rho_{c0}$ nella (7.2) e usando i valori di ρ_{c0} e ℓ indicati in precedenza, otteniamo:

$$(L/M)_c = \rho_{c0}/\ell \simeq (1390 \pm 140)hM_\odot/L_\odot,$$

dove si sono usati i valori solari per misurare sia le masse che le luminosità. Il parametro Ω_m potrà quindi essere scritto come:

$$\Omega_m = \frac{M/L}{(M/L)_c} h^{-1} \simeq (7.2 \pm 0.7) \times 10^{-4} \frac{M/L}{(M_\odot/L_\odot)} h^{-1}.$$

Le osservazioni mostrano che stelle meno massicce del Sole hanno un rapporto M/L minore di quello solare, mentre l'opposto è vero per stelle più massicce del Sole. Sulle base di queste stime, dovremmo concludere che, se il maggior contributo alla massa di una galassia venisse dalle stelle che la costituiscono, il rapporto M/L per le galassie dovrebbe attestarsi nell'intervallo $1 - 10M_\odot/L_\odot$. Di fatto, i valori per le galassie a spirale sono circa un ordine di grandezza maggiori e quelli per le ellittiche ancora più alti e questo spinge a pensare che la maggior parte della materia che costituisce le galassie non sia luminosa.

Una conferma di questa ipotesi viene dallo studio delle caratteristiche delle galassie a spirale. Una galassia di questo tipo appare formata da un disco circolare composto da stelle e gas che ruota intorno al suo centro. La distribuzione di massa nella galassia determina il campo gravitazionale in cui si muovono le varie componenti e quindi le loro velocità orbitali. Se consideriamo un corpo di massa m che si muove in un'orbita circolare di raggio r con velocità v e indichiamo con $M(r)$ la massa contenuta all'interno della sfera di raggio r , dall'equazione di moto avremo:

$$M(r) = \frac{rv^2}{G}.$$

Nel caso in cui la massa sia concentrata centralmente, e quindi il valore di M sia una costante indipendente da r , si ricava dalla precedente equazione $v \propto r^{-1/2}$. Nel caso di una galassia a spirale la materia è invece distribuita su una regione assai vasta che, come vedremo, supera largamente le dimensioni della galassia visibile.

Se la galassia non è vista esattamente di faccia, le stelle (o la materia emittente) situati ai lati opposti della galassia avranno redshift diversi a causa dell'effetto Doppler. Sfruttando questa circostanza è possibile ottenere una *curva di rotazione*, cioè un grafico delle velocità orbitali delle stelle in funzione della distanza dal centro. Tipicamente, le velocità orbitali non presentano il decremento con la distanza atteso per le orbite kepleriane, neppure quando le misure si estendono a distanze molto maggiori delle dimensioni visibili della galassia utilizzando l'emissione nella riga a 21cm dell'idrogeno. Si osserva invece una curva di rotazione piatta, $v = cost.$, che dimostra che la massa della galassia è distribuita su una regione più

estesa di quella tracciata dalla sua emissione ottica. Questo comportamento può essere spiegato supponendo che la galassia sia di fatto un sistema sferoidale con una distribuzione di densità che decresce come $\rho \propto r^{-2}$. Di conseguenza, la massa all'interno della sfera di raggio r è proporzionale a r e quindi $v = \text{cost}$. Si ottengono così valori per il raggio della distribuzione dell'ordine o superiori a 10 volte il raggio del disco visibile e valori di M/L dell'ordine di $10^2 M_\odot/L_\odot$. Da quanto precede si può concludere che la maggior parte della materia delle galassie a spirale ha una luminosità assai minore di quella delle stelle, e che si tratta quindi di *materia oscura*.

Le galassie ellittiche non presentano un'evidenza chiara di rotazione e quindi il metodo non è applicabile. Si possono tuttavia fare delle stime indirette che danno per M/L valori dell'ordine di qualche centinaio, sempre in unità solari. Quindi anche le galassie ellittiche sono costituite essenzialmente di materia oscura.

Passiamo ora alla stima della massa di un ammasso di galassie. Il metodo comunemente usato è quello di utilizzare i redshift misurati delle galassie che fanno parte dell'ammasso per dedurre le velocità *peculiar*, cioè le velocità depurate della componente dovuta all'espansione cosmica. Queste velocità sono l'analogo della velocità termica delle molecole di un gas e l'energia cinetica associata a questi moti è quindi l'equivalente dell'energia termica, E_t . Potremo dunque scrivere:

$$E_T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle,$$

dove m_i è la massa della i -esima galassia e $\langle v^2 \rangle = \sum m_i v_i^2 / \sum m_i$ è la velocità quadratica media e M la massa totale dell'ammasso.

L'energia potenziale gravitazionale dell'ammasso sarà esprimibile come

$$E_G = -\alpha \frac{GM^2}{R},$$

dove α è una costante dell'ordine dell'unità e R è una stima delle dimensioni lineari dell'ammasso. Utilizzando il teorema del viriale: $E_G + 2E_T = 0$, si ottiene finalmente:

$$M = \frac{R \langle v^2 \rangle}{\alpha G}.$$

Il risultato di una lunga serie di osservazioni indica che i valori del rapporto massa-luminosità per gli ammassi è dello stesso ordine di quello già ricavato per le galassie singole. Quindi il maggior contributo alla massa totale di un ammasso proviene dalle galassie che lo costituiscono. In conclusione, utilizzando queste misure per valutare il contributo della materia alla densità di massa-energia, si ottiene con una certa affidabilità:

$$\Omega_{m0} = 0.29 \pm 0.04 \tag{7.3}$$

Questo valore è confermato da altre stime indipendenti, in particolare quelle legate all'osservazione di supernovae di tipo Ia ad alto redshift, su cui ritorneremo nelle prossime lezioni. Come

si vede il contributo della radiazione oggi è completamente trascurabile rispetto a quello della materia.

Se dunque la materia costituisse il contributo dominante alla densità di massa-energia dell'Universo, dovremmo concludere che il nostro Universo è un universo *aperto*, $\Omega_0 \simeq \Omega_{m0} < 1$ e che la materia è in maggioranza materia oscura. Ω_{m0} si riferisce al contributo dovuto alla *totalità* della massa, sia essa luminosa o oscura e qualunque sia la sua natura e quindi nulla ci dice circa la composizione della materia stessa. E' possibile tuttavia ottenere una stima indipendente della quantità di materia *barionica*, cioè in ultima analisi della materia nella forma in cui la conosciamo sulla Terra. Questa stima si ottiene confrontando le previsioni dei calcoli sulla nucleosintesi primordiale basata sul modello standard con le osservazioni dell'abbondanza del deuterio, dell'elio e degli altri elementi leggeri e, in maniera più indiretta, ma molto precisa, dalle misure dell'anisotropia della CBR. Tutte queste misure convergono verso un valore del contributo *barionico* alla densità di massa:

$$\Omega_{b0} = 0.039 \pm 0.008. \quad (7.4)$$

Se ne deduce quindi che la materia barionica rappresenta solo il 13% della materia e questo naturalmente fa nascere la domanda: *qual'è la natura del rimanente 87%*? A tutt'oggi non ci sono risposte universalmente accettate, anche se sono state fatte proposte di vario genere, tutte basate su considerazioni teoriche sulla fisica, convenzionale e non, delle particelle elementari. Sia come sia, rimane il fatto che tutto sembra indicare che la materia che costituisce l'Universo è in maggioranza **oscura** e **non-barionica**. Se poi, come vedremo in seguito, si tien conto del fatto che vi sono indicazioni indipendenti che il valore della densità totale di massa-energia è molto vicino a quello critico, $\Omega_0 = 1$, si deve concludere che la materia costituisce solo una componente minoritaria della densità globale di massa-energia e che la materia barionica, cioè quella a noi familiare, rappresenta solo il 4% del totale. Evidentemente, se $\Omega_0 = 1$ nasce il problema di capire di quale natura siano i contributi che permettono di "chiudere" l'Universo.

8 Aspetti critici del Modello Standard e loro possibile soluzione

Il Modello Standard, come già accennato, rappresenta la base teorica per il confronto con i dati osservativi. Questo confronto, nel quale non è possibile entrare in dettaglio in questa breve introduzione alla cosmologia, mette in luce un gran numero di aspetti positivi, ma al tempo stesso rivela alcune importanti discrepanze che costringono ad una revisione di alcuni aspetti del modello stesso. In questo capitolo saranno illustrati i principali problemi che sollecitano una tale revisione.

8.1 La propagazione della luce in un universo in espansione

La visione dell'Universo che le osservazioni ci forniscono è una visione distorta a causa della velocità finita della luce. La distorsione è tanto maggiore quanto maggiore è il redshift della sorgente osservata: in questo caso infatti noi vediamo la sorgente *com'era al momento dell'emissione* e nulla sappiamo del suo stato attuale, che, ovviamente, può essere cambiato, sia a causa del moto di espansione cosmica che a causa di una evoluzione intrinseca della sorgente stessa. In altre parole, una "istantanea" dell'Universo contiene in realtà informazioni che si riferiscono a epoche completamente diverse. Per comprendere meglio gli effetti legati all'espansione cosmica, è opportuno studiare le caratteristiche della propagazione della luce in un universo evolutivo. Si tratta dunque di determinare la traiettoria di un fotone nello spazio-tempo descritto dalla metrica di RW in coordinate comoventi.

Consideriamo un osservatore posto nell'origine delle coordinate e un raggio luminoso che si muova lungo una traiettoria radiale, in cui quindi le coordinate θ e ϕ abbiano un valore costante, cosicchè $d\theta = d\phi = 0$. Ciò è possibile senza perdita di generalità a causa delle proprietà di simmetria della metrica. L'equazione della traiettoria del fotone, $ds = 0$, risulta dunque:

$$cdt = -a(t)dr(1 - kr^2)^{-1/2},$$

dove si è scelto il segno meno della radice perchè stiamo considerando una traiettoria diretta verso l'origine. Se il fotone viene ricevuto dall'osservatore nell'origine al tempo t_0 , si avrà:

$$c \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 (1 - kr^2)^{-1/2} dr \quad , \quad (8.1)$$

dove r è la posizione istantanea del fotone al tempo t . La precedente espressione può essere valutata per qualunque modello, cioè qualunque sia la forma, supposta nota, di $a(t)$. Per riferirci ad un caso specifico, peraltro non privo di interesse, calcoliamo la precedente espressione per un modello di Einstein-De Sitter (EdS), cioè un modello con

$$k = 0, \quad \rho = \rho_m = \rho_0(a_0/a)^3, \quad a(t) = a_0(t/t_0)^{2/3} \quad .$$

Otteniamo in tal modo:

$$r = \frac{3ct_0}{a_0}(1 - \tau^{1/3}) \quad , \quad (8.2)$$

dove si è introdotta la variabile $\tau = t/t_0$.

La *distanza propria*, ℓ , ovvero l'effettiva separazione fisica del fotone dall'osservatore al tempo t , vale

$$\ell(\tau) = a(t)r = 3ct_0\tau^{2/3}(1 - \tau^{1/3}) = 3ct_0(\tau^{2/3} - \tau) \quad . \quad (8.3)$$

Questa equazione descrive la traiettoria fisica del fotone, cioè la distanza del fotone dall'osservatore in funzione del tempo t , tenendo fisso il tempo di ricezione del fotone ($t = t_0$). Alternativamente, si può usare il redshift tramite la relazione, valida nel modello EdS , $1 + z = \tau^{-2/3}$, ottenendo:

$$\ell(z) = 3ct_0(1 + z)^{-1}[1 - (1 + z)^{-1/2}] \quad . \quad (8.4)$$

L'equazione (8.3) è analoga a quella del cono-luce (passato) della relatività ristretta, ma in questo caso esso risulta deformato a causa della differente metrica dello spazio-tempo, in particolare a causa dell'espansione dell'universo.

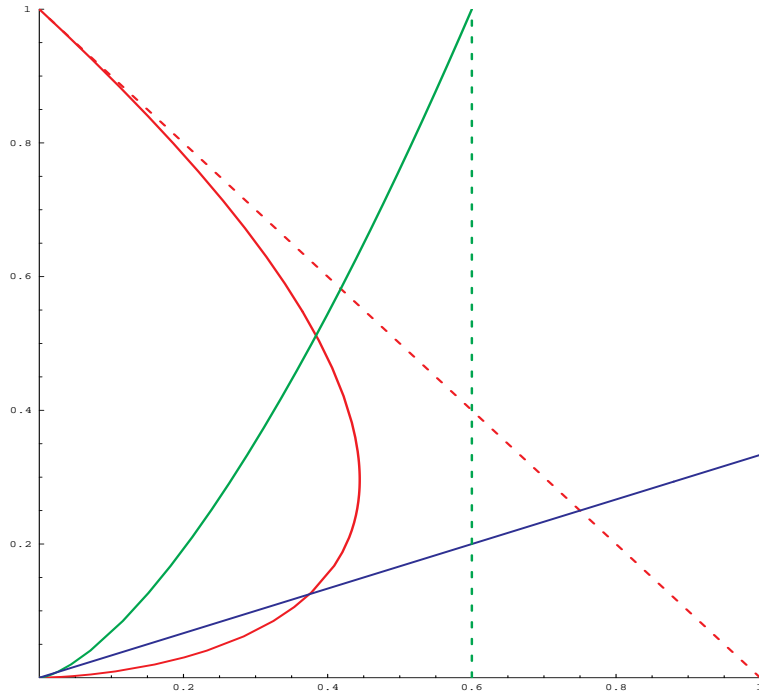


Figure 1: *Traiettorie spazio-temporali in un universo statico (curve tratteggiate) e in un universo EdS (curve a tratto intero). In ascisse $\ell(\tau)$ in unità di ct_0 , in ordinate τ . Per l'identificazione delle varie curve vedi il testo.*

Le diverse situazioni sono rappresentate in Figura 8.1 : le linee tratteggiate si riferiscono

ad un universo statico, quelle a tratto intero ad un universo in espansione (EdS). Le curve rosse sono le traiettorie dei fotoni. La differenza fondamentale è dovuta al fatto che in un qualsiasi universo di Friedmann tutte le traiettorie convergono in $r = 0$ per $t = 0$. Quindi anche la traiettoria del fotone parte da $r = 0$ a $t = 0$ e riassume lo stesso valore quando il fotone viene ricevuto a $t = t_0$: a traiettoria deve quindi presentare un massimo per un valore intermedio tra 0 e t_0 .

Dalla (8.3) si vede facilmente che partendo da $\tau \ll 1$, ossia molto vicino al Big Bang, $\ell(\tau)$ inizialmente **augmenta**, raggiungendo un massimo per $\tau = 8/27$ (a cui corrisponde nel modello EdS un tempo $t \simeq 0.3t_0$ ed un redshift $z = 5/4$), per poi decrescere fino ad annullarsi per $\tau = 1$. Quindi, un fotone emesso ad un redshift maggiore di 5/4 inizialmente si **allontana** dall'osservatore per poi cominciare ad avvicinarsi ed essere infine intercettato a $t = t_0$. Questo è dovuto al fatto che l'espansione dello spazio-tempo a grandi z è più veloce del fotone. Si tenga infatti presente che la distanza tra due punti aumenta come $a(t)$ e che in tutti i modelli di Friedmann $\dot{a}(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 0$. L'esistenza di velocità maggiori di c non è in contraddizione con la relatività ristretta, perchè questa si applica solo *localmente* e non è possibile stabilire un sistema di riferimento *globale* in cui valga la relatività ristretta. E' chiaro che localmente la velocità della luce sarà sempre c e che questo valore costituirà il limite delle velocità possibili. Inoltre, poichè

Supponiamo ora che il fotone sia stato emesso da una sorgente (per esempio una galassia) con coordinata radiale r_e ($r_e = costante$, coordinate comoventi!) al tempo t_e . Possiamo facilmente calcolare qual'è la posizione *attuale*, cioè al tempo $t = t_0$, di tale sorgente. Essa è data dall'Eq.(8.2), valutata per $r = r_e, t = t_e$:

$$\ell_0 = a_0 r_e = 3ct_0(1 - \tau_e^{1/3}) = 3ct_0[1 - (1 + z_e)^{-1/2}] \quad . \quad (8.5)$$

Poichè ℓ_0 è una funzione crescente di z_e , la distanza massima delle sorgenti che hanno emesso i fotoni che noi riceviamo oggi, cioè a $t = t_0$, si ottiene prendendo il limite per $z_e \rightarrow \infty$ della (8.5), che equivale a porre $\tau_e = t_e = 0$. Questo valore di ℓ_0 vien chiamato **orizzonte** e sarà nel seguito indicato con D_h :

$$D_h(t_0) = Max[\ell_0] = r_e a_0 = 3ct_0$$

Ad ogni istante c'è quindi un orizzonte, $D_h(t) = 3ct$, che delimita quindi la regione di spazio che contiene tutte le sorgenti da cui l'osservatore posto nell'origine può aver ricevuto segnali [lumi/Users/chiuderi/Desktop/lezioni/Cosmologia/cosmologia_10_1ez/AppuntiastroII.pdfnosialtempot_0](#) e, di conseguenza, tutte le sorgenti che possono essere collegate col suddetto osservatore da una relazione causa-effetto.

Nella Figura 8.1 sono rappresentate (in verde) anche le traiettorie spazio-temporali di una galassia la cui distanza propria dall'osservatore al momento attuale ($t = t_0$) vale $\ell(1) = 0.6ct_0$. Si osservi che il fotone ricevuto a $t = t_0$ è stato emesso a $\tau = 0.4$ nel caso statico e a $\tau = 0.512$, cioè a un tempo maggiore, nel caso EdS. La retta blu nella figura rappresenta la distanza dell'orizzonte dalla galassia posta in $r = 0$.

Le definizioni date finora si riferiscono esplicitamente al caso del modello di Einstein-de Sitter. E' facile tuttavia dimostrare che esse possono essere generalizzate a qualunque modello di Friedmann. La definizione generale di orizzonte al tempo t si ottiene infatti dalla (8.1), ponendo uguale a zero l'estremo inferiore dell'integrale:

$$c \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 (1 - kr^2)^{-1/2} dr \quad ,$$

e tenendo conto che l'integrale a secondo membro rappresenta la distanza radiale nella metrica di Robertson-Walker. Ricordando infine che la distanza propria, ℓ si ottiene moltiplicando la distanza radiale per il fattore di scala si ottiene:

$$D_h(t) = c a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad . \quad (8.6)$$

L'integrale converge per tutti i modelli di Friedmann, nei quali infatti $a(t) \propto t^n$, $0 < n < 1$ e quindi:

$$D_h(t) = c t^n \int_0^t \frac{dt'}{(t')^n} = \frac{c}{1-n} t \quad (8.7)$$

Se ne deduce che tali modelli possiedono un orizzonte che cresce linearmente con t .

8.2 Il problema dell'orizzonte

La teoria svolta nel precedente paragrafo ci aiuta a capire in cosa consiste il *problema dell'orizzonte*, uno degli aspetti critici del Modello Standard. Come abbiamo già accennato precedentemente, l'osservazione della radiazione cosmica di Fondo (CBR) mostra una straordinaria omogeneità: le fluttuazioni di temperatura $\Delta T/T$ sono infatti inferiori a 10^{-4} ed hanno luogo su scale angolari di qualche grado. Più precisamente, si trova che l'intensità della radiazione, e quindi la temperatura, è omogenea su dimensioni angolari dell'ordine di circa 6° . D'altra parte, se una regione è omogenea le sue parti debbono aver interagito tra loro. E' infatti impensabile che senza interazione reciproca esse possano trovarsi esattamente nelle stesse condizioni fisiche. Siccome l'orizzonte definisce ad ogni istante la dimensione della regione all'interno della quale possono essere avvenute interazioni, se ne deduce che regioni omogenee debbano avere dimensioni minori dell'orizzonte. Nell'interpretazione della CBR che viene data nei modelli evolutivi, la radiazione che noi riceviamo oggi è stata emessa all'epoca del disaccoppiamento, corrispondente a $z_{dis} \simeq 1100$. L'omogeneità osservata implica dunque che l'orizzonte a tale epoca doveva avere dimensioni tali da far sì che oggi esso si estenda su una scala angolare superiore a 6° .

Dobbiamo dunque calcolare il valore di D_h per $z = z_{dis}$. Per semplicità useremo un modello di Einstein-de Sitter, ma i risultati non cambiano utilizzando modelli più realistici. Avremo dunque:

$$D_h(t_{dis}) = 3ct_{dis} = 3ct_0(1 + z_{dis})^{-3/2},$$

dove si sono usate le relazioni $a(t) = a_0 (t/t_0)^{2/3}$, e $1 + z = a_0/a$.

Poichè il modello EdS è euclideo, $k = 0$, la dimensione angolare, Φ , sotto cui è visto oggi l'orizzonte del tempo t_{dis} è data da:

$$\Phi = \frac{D_h(t_{dis})}{\ell_{dis}} = (1 + z_{dis})^{-1/2} [1 - (1 + z_{dis})^{-1/2}],$$

dove è stata utilizzata la (8.4). Per $z_{dis} \simeq 1100$ si ottiene:

$$\Phi \simeq z_{dis}^{-1/2} \simeq 0.03 < 2^0.$$

Sulla base del modello Standard non sarebbe quindi possibile osservare una CBR omogenea su scale dell'ordine di 6^0 ! Questa incapacità del Modello Standard di render conto delle osservazioni della CBR costituisce il cosiddetto problema dell'orizzonte (o problema dell'omogeneità). E' chiaro che il problema sarebbe risolto se per qualche motivo avessimo sottostimato la dimensione dell'orizzonte all'epoca del disaccoppiamento. Su questa linea si muovono i cosiddetti modelli *inflattivi* che tratteremo tra breve. Prima però vogliamo illustrare un secondo aspetto critico del Modello Standard: il *problema della piattezza*.

8.3 Il problema della piattezza

Il problema della piattezza, che adesso illustreremo, deriva dal fatto che il valore $\Omega = 1$ del parametro di densità corrisponde ad un equilibrio instabile. Per rendercene conto, consideriamo la prima delle uguaglianze della (5.17) che riscriviamo nella forma:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k| c^2}{a^2 H^2}$$

e deriviamola rispetto al tempo, ottenendo:

$$\frac{d}{dt} |\Omega - 1| = \frac{d}{dt} \frac{|k| c^2}{a^2} = -2 \frac{|k| c^2}{a^3} \ddot{a}. \quad (8.8)$$

Poichè nel Modello Standard $\ddot{a} < 0$, se ne deduce che qualunque deviazione dal valore di Ω esattamente uguale ad uno è destinata a crescere nel tempo.

Abbiamo visto che le più recenti misure sembrano indicare un valore di Ω_0 molto vicino all'unità, $\Omega_0 \simeq 1.02$. Questo implica, tenendo conto della (8.8), che in passato era ancor più prossimo ad uno di quanto non lo sia oggi. Per comprendere perchè questo rappresenti un problema, utilizziamo la seconda delle uguaglianze della (5.16) e la prima uguaglianza della (5.17) e scriviamo:

$$H^2 a^2 (1 - \Omega) = H_0^2 a_0^2 (1 - \Omega_0) \quad ; \quad \frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{H_0^2}{H^2}.$$

Combinando le due espressioni precedenti otteniamo:

$$(1 - \Omega) \frac{\Omega_0}{\Omega} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) (1 - \Omega_0).$$

Supponiamo ora

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^n \quad \text{con } n > 2.$$

Questa parametrizzazione ci permette di trattare sia il caso di un Universo di polvere ($n = 3$) che quello di un Universo dominato dalla radiazione ($n = 4$). Sostituendo e ricavando Ω otteniamo infine:

$$\Omega = \left[1 + \left(\frac{a}{a_0}\right)^{n-2} \frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} \right]^{-1}. \quad (8.9)$$

Tenendo conto del valore attuale di Ω_0 , si ha : $(1 - \Omega_0)/\Omega_0 \simeq 1 - \Omega_0 \ll 1$ e $(a/a_0) = 1/(1+z)$, e quindi, per grandi valori di z ,

$$\Omega \simeq \left[1 + \frac{1 - \Omega_0}{z^{n+2}} \right]^{-1} \simeq 1 - \frac{1 - \Omega_0}{z^{n+2}}.$$

Quando z è sufficientemente grande, l'universo è dominato dalla radiazione e quindi $n = 4$, cosicchè

$$\Omega(z) - 1 \simeq \frac{\Omega_0 - 1}{z^2} \simeq \frac{0.02}{z^2}.$$

Questo fa sì che a grandi redshift, cioè a tempi sufficientemente vicini al Big Bang, la differenza di Ω dall'unità sia intollerabilmente piccola. Per essere quantitativi, ricordiamo che in un universo dominato dalla radiazione si ha:

$$\frac{1}{1+z} \simeq \frac{1}{z} = (4H_0^2 \Omega_{r0})^{1/2} t^{1/2} \simeq 1.7 \times 10^{-10} t^{1/2}.$$

Quindi per $t = 1s$, $\Omega - 1 \simeq 10^{-22}$ e per $t = t_P \simeq 10^{-44}s$ si ha addirittura

$$\Omega(t_P) \simeq 1 + 10^{-66} !$$

Da quanto precede appare chiaro che per giustificare il valore attuale del parametro di densità nel Modello Standard è necessario scegliere con estrema precisione il valore di tale parametro per tempi prossimi al Big Bang. In altre parole, avremo un problema di *sintonia fine* sulle condizioni iniziali piuttosto spiacevole. Questo problema viene indicato col nome di problema della piattezza perchè nel Modello Standard $\Omega = 1$ implicherebbe $k = 0$, cioè una geometria piatta (euclidea).

8.4 Il problema della coincidenza

Un altro problema, riguarda l'importanza del termine di vuoto, Ω_Λ . Infatti, se consideriamo il contributo dei vari termini che compaiono nell'equazione di Friedmann (2) e calcoliamo il rapporto tra il termine che contiene la costante cosmologica e la somma di tutti gli altri,

cioè

$$\frac{\Omega_{\Lambda}(a/a_0)^2}{\Omega_{r0}(a_0/a)^2 + \Omega_{m0}(a_0/a) + \Omega_{\Lambda}(a/a_0)^2},$$

otteniamo il grafico riportato in Fig. 8.4.

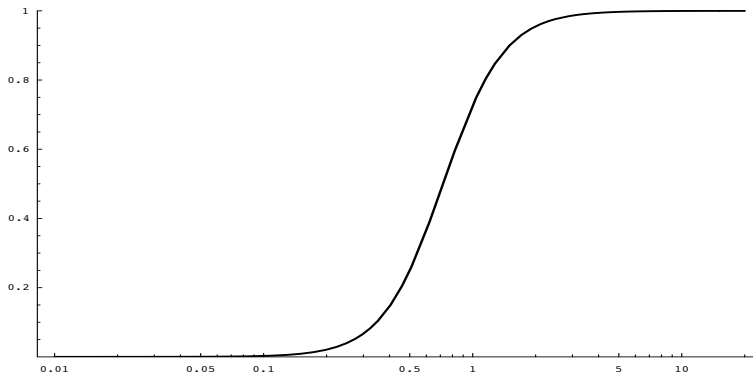


Figure 2: Ω_{Λ}/Ω in funzione di $\log(a/a_0)$.

Come si vede, il termine cosmologico ha una rapida transizione da una situazione in cui è trascurabile ad una in cui è dominante, centrata intorno al valore $a = a_0$. Il periodo in cui si è sviluppata la storia della Terra è dunque un periodo particolare, quello in cui i contributi dovuti alla materia e alla costante cosmologica si equivalgono. E' una *coincidenza* o ha un significato più profondo? Questa ed altre considerazioni hanno portato alcuni a formulare il cosiddetto *Principio Antropico* che consiste essenzialmente nel dire: *Per poter essere in grado di osservare l'Universo, l'uomo deve quanto meno esistere. Le condizioni per lo sviluppo della vita sulla Terra, quindi per l'esistenza dell'uomo, si sono presentate in una particolare era dell'evoluzione cosmica e questo spiega la coincidenza* .

Questa affermazione può essere considerata lapalissiana (è evidente che se l'uomo non ci fosse non potrebbe osservare l'Universo) o l'indicazione di un Grande Disegno (l'evoluzione dell'Universo è finalizzata all'esistenza dell'uomo destinato ad osservarla). Va detto che la grande maggioranza dei cosmologi ritiene inaccettabile l'idea del Grande Disegno.

8.5 Il problema del valore di Λ .

Questo viene considerato dai teorici uno dei problemi principali. Se ricordiamo la definizione di Ω_Λ , possiamo ricavare il valore della densità di energia di vuoto, $\rho_\Lambda c^2 = (\rho_{c0} c^2) \Omega_\Lambda$, in termini delle costanti fondamentali e dei valori misurati di H_0 e Ω_Λ . Si ottiene così il valore "sperimentale" di Ω_Λ :

$$\rho_\Lambda c^2 \simeq 8.76 \times 10^{-8} \text{ erg cm}^{-3}$$

Un valore "teorico" della stessa quantità può essere stimato a partire da una delle varie versioni di teoria quantistica dei campi in grado di generare un'equazione di stato $P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$, analoga cioè a quella che definisce la costante cosmologica. A seconda delle teorie adottate si ottengono valori diversi, che tuttavia scalano come la *densità di energia di Planck*, definita come $\rho_P c^2 = M_P c^2 / L_p^3 = c^7 / \hbar G^2$. Tenendo presente che questa particolare combinazione delle costanti fondamentali è la sola con le dimensioni di una densità di energia, è abbastanza naturale che essa costituisca la scala naturale per tale quantità in un regime in cui bisogna tener conto sia della gravitazione che della meccanica quantistica. Da un punto di vista teorico, si potrà quindi scrivere $\rho_\Lambda c^2 = \alpha (\rho_P c^2)$, con α fattore numerico che dipende dalla teoria. Numericamente

$$\rho_\Lambda c^2 \simeq 4.6 \times 10^{114} \text{ erg cm}^{-3},$$

una differenza di oltre 120 ordini di grandezza rispetto al valore "sperimentale"!

E' chiaro che una tale discrepanza non può essere rimediata da un'opportuna scelta del fattore α , che implicherebbe ancora una volta un problema di sintonia estremamente fine. E' chiaro d'altra parte, che se la costante cosmologica avesse il valore richiesto alle teorie quantistiche di campo, l'evoluzione dell'Universo sarebbe stata drasticamente diversa. Infatti, il termine cosmologico sarebbe diventato dominante immediatamente dopo il Big Bang ($a/a_0 \simeq 1/z \simeq 10^{-32}$), l'espansione dell'Universo sarebbe stata accelerata fin dall'inizio, non sarebbe stata possibile l'evoluzione dell'Universo che conosciamo e, in particolare, la vita non potrebbe essersi sviluppata.

Il problema, che può essere espresso come: *perchè Ω_Λ è così piccola?* non ha ancora trovato una soluzione attendibile e condivisa.

8.6 I modelli inflattivi

In quest'ultimo paragrafo descriveremo brevemente le basi di una proposta (o meglio di una serie di proposte) che risolvono o alleviano alcuni degli aspetti critici che abbiamo appena descritto, in particolare quelli dell'orizzonte e della piattezza. Il problema dell'orizzonte è generato dal fatto che l'orizzonte al tempo del disaccoppiamento era più piccolo della regione in cui la radiazione di fondo appare omogenea. E' chiaro quindi che qualunque meccanismo

che tenda a produrre un orizzonte di dimensioni maggiori rappresenta un buon candidato alla soluzione del problema. I modelli inflattivi sono un possibile meccanismo di questo tipo ed hanno anche il vantaggio di alleviare notevolmente il problema della piattezza.

L'idea fondamentale è legata alla possibilità che l'Universo abbia attraversato una fase di rapidissima espansione in cui la dimensione dell'orizzonte, cioè della regione in cui sono possibili comunicazioni tra i vari componenti e quindi in linea di principio è possibile che si stabilisca una temperatura uniforme, sia molto maggiore di quella prevista dal Modello Standard. Questa fase, detta appunto *inflazione*, ha una durata limitata e al suo termine l'espansione riprende con il ritmo previsto dal Modello Standard. E' chiaro che scegliendo opportunamente il momento d'inizio e la durata dell'inflazione si può ottenere un orizzonte sufficientemente grande da risolvere il problema dell'omogeneità della radiazione di fondo nelle epoche successive. Per comprendere tecnicamente come sia possibile avere una fase di inflazione, ricordiamo che le equazioni di Friedmann prevedono che la derivata seconda del fattore di scala $a(t)$ sia negativa in assenza della costante cosmologica. Se tuttavia questa è presente ed è il termine dominante nella dinamica dell'espansione, $\ddot{a}(t) > 0$ e l'espansione accelera. Infatti:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P - \frac{\Lambda c^4}{4\pi G})a \quad (8.10)$$

Nella fase iniziale dell'espansione, la radiazione domina sulla materia, per cui possiamo scrivere $\rho c^2 + 3P = 4\rho c^2$ e di conseguenza

$$\ddot{a} = -\frac{16\pi G\rho}{3}a + \frac{\Lambda c^2}{3}a.$$

E' chiaro quindi che se Λ ha un valore sufficientemente elevato, l'espansione passa dall'essere decelerata ad essere accelerata. Nel caso in cui il primo termine sia del tutto trascurabile ci ritroviamo nelle condizioni del modello di Eddington (vedi Cap. 5) e quindi

$$a = K e^{t/\tau} \quad , \quad \tau = \left(\frac{3}{\Lambda c^2}\right)^{1/2}.$$

Supponiamo che l'Universo si espanda come previsto dal modello EdS da $t = 0$ fino a $t = t_i$, per entrare poi in una fase di inflazione. Per $t > t_i$ avremo

$$D_h(t > t_i) = 3ct_i + ca(t - t_i) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (8.11)$$

e quindi

$$D_h(t > t_i) = 3ct_i + e^{(t-t_i)/\tau} \int_{t_i}^t \frac{dt'}{e^{t'/\tau}} = 3ct_i + c\tau e^{-t_i/\tau} (e^{(t-t_i)/\tau} - 1).$$

Se $t \gg t_i$ si ottiene

$$D_h(t > t_i) = c\tau e^{t/\tau}.$$

Quindi, se sono soddisfatte le condizioni:

$$t_i \ll \tau, \quad t_f \gg t_i,$$

il valore dell'orizzonte può aumentare a piacimento. Per esempio con $t_i \simeq 10^{-34} s$, $t_f \simeq 10^{-31} s = 1000 t_i$ e $\tau = 10^{-33}$ il rapporto $D_h(t_f)/D_h(t_i) = 10 \times e^{100} \simeq 10^{44}$!

Anche se i modelli inflattivi sembrano efficaci per risolvere il problema dell'orizzonte, molte sono le domande che necessitano di una risposta. Tra queste : perchè la costante cosmologica domina solo per una frazione di tempo e poi tutto rientra nella normalità fino all'epoca attuale in cui essa diviene nuovamente dominante? E' chiaro che nonostante in entrambi i casi si parli di *costante cosmologica* la fisica soggiacente deve essere diversa. Esistono teorie di campo che permettono di descrivere le varie fasi in cui si passa da un Universo descritto dal Modello Standard ad una espansione accelerata ed infine ad una nuova espansione decelerata. L'effettiva esistenza di campi scalari che si comportino come la teoria prescrive è tuttavia tutta da verificare e costituisce una delle sfide per la futura cosmologia.

Va notato che l'inflazione ha un effetto positivo anche sul problema della piattezza, come si evince dalla (8.8). Infatti, nel periodo d'inflazione si avrà

$$\frac{d}{dt}|\Omega - 1| < 0,$$

e quindi il valore di Ω tenderà ad avvicinarsi all'unità. In un modello dominato dalla costante cosmologica avremo

$$\frac{d}{dt}|\Omega - 1| = -2 \frac{c^2 \ddot{a}}{\dot{a}^3} = -2 c^2 \tau e^{-2t/\tau},$$

e quindi il valore di Ω alla fine dell'inflazione può avvicinarsi moltissimo all'unità (come richiesto dalle condizioni attuali dell'Universo) anche senza scegliere con enorme precisione il suo valore iniziale. In altre parole, l'inflazione porta *naturalmente* a valori di Ω assai prossimi a uno, *indipendentemente* dalle condizioni iniziali.