GEOMETRIA Corso di Laurea in Fisica - A.A 2005/2006 - Appello 18.9.2006

PARTE A

Dare solo la risposta finale alle seguenti domande (senza il procedimento seguito). Ogni risposta esatta vale 2 punti

1A) Siano A, B matrici quadrate reali di ordine 6 di rango rispettivamente 2 e 3. Dire quali valori può assumere la dimensione del sottospazio $V = \{x \in \mathbf{R}^6 \mid Ax = Bx = 0\}$.

2A) Sia A una matrice quadrata di ordine 3 con autovalori $1, 2, 3$. Calcolare la dimensione di $Ker(A^2 - I_3)$.

3A) Determinare per quali valori del parametro reale λ è compatibile il seguente sistema: $\begin{cases} 3x + 2y + z = -(2 + 3\lambda) \\ 6x + y = \lambda - 1 \\ 2y - z = -2 \\ 3x + z = -\lambda \end{cases}$

4A) Se esiste, determinare il piano contenente le due rette $\mathbf{r}$: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ e $\mathbf{s}$: $\begin{cases} y = x \\ y = 3x + z - 1 \end{cases}$.

PARTE B

Rispondere (con precisione) alle seguenti domande ciascuna delle quali vale 6 punti

1B) a) Definire nucleo e immagine di un'applicazione lineare.
b) Enunciare e dimostrare il teorema della dimensione.

2B) a) Dare la definizione di matrice ortogonale.
b) Trovare, motivando, l'espressione generica di una matrice ortogonale di ordine 2 in termini di funzioni trigonometriche.

PARTE C

Risolvere per esteso (GIUSTIFICANDO LE RISPOSTE) i seguenti esercizi che valgono 7 punti ciascuno.

1C) Sia Π il piano tangente alla sfera $S =: x^2 + y^2 + z^2 = 3$ nel punto $P = (1, 0, \sqrt{2})$ e siano Q_1, Q_2 i due punti intersezione della sfera con la retta $\mathbf{r} = \{x = z = 1\}$. Determinare su Π le proiezioni ortogonali R_1, R_2 di Q_1, Q_2 e verificare se R_1 e R_2 sono allineati con P. Nel caso non lo fossero, calcolare l'area del triangolo di vertici R_1, R_2, P.

2C) Siano $V = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ e $W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_3 = x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\right\}$ e sia $\mathcal{A}$ il sottoinsieme dello spazio $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ degli endomorfismi di $\mathbf{R}^3$ definito nel modo seguente:

$$T \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}, \mathcal{T}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ è multiplo di } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$.
(b) Dimostrare che ogni $T \in \mathcal{A}$ è diagonalizzabile .
(c) Trovare la matrice associata a una arbitraria $T \in \mathcal{A}$ rispetto alla base canonica e calcolare $dim(\mathcal{A})$.
(d) Determinare quali $T \in \mathcal{A}$ sono endomorfismi autoaggiunti rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$.

GEOMETRIA Corso di Laurea in Fisica - A.A 2005/2006 - Appello 1.9.2006

PARTE A

Dare solo la risposta finale alle seguenti domande (senza il procedimento seguito). Ogni risposta esatta vale 2 punti

1A) Sia A una matrice reale con 4 righe e 6 colonne di rango ~~6~~ 3. Dire quali valori può assumere $dim(ImA + KerA^T)$.

2A) Dire per quali $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ la matrice $\begin{pmatrix} 2 & s \\ t & -1 \end{pmatrix}$ è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3A) Nello spazio, se $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è una base ortonermale, determinare le coordinate di $\mathbf{i}$ rispetto alla base $\{v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}), w = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}), v \wedge w\}$.

4A) Determinare equazioni cartesiane della retta paasante per i punti $P = (3, -1, 1)$ e $Q = (4, 2, -3)$.

PARTE B

Rispondere (con precisione) alle seguenti domande ciascuna delle quali vale 6 punti

1B) a) Definire la somma di due sottospazi vettoriali.
b) Enunciare e dimostrare la formula di Grassmann.

2B) a) Definire autovalori e autovettori per una matrice.
b) Dimostrare che se $A \in M_n(\mathbf{K})$ ha n autovallori distinti in $\mathbf{K}$, allora è diagonalizzabile.

PARTE C

Risolvere per esteso (GIUSTIFICANDO LE RISPOSTE) i seguenti esercizi che valgono 7 punti ciascuno.

1C) Nello spazio si considerino la retta $\mathbf{r} : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = t + 3 \end{cases}$ e il piano $\alpha : x + y = 3$.

a) Scrivere equazioni cartesiane e parametriche dei piani contenti $\mathbf{r}$ che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il piano α.

b) Scrivere equazioni delle sfere aventi centro su $\mathbf{r}$, raggio $\sqrt{2}$ e tangenti al piano α.

GEOMETRIA Corso di Laurea in Fisica - A.A 2005/2006 - Appello 5.1.2006

PARTE A

Dare solo la risposta finale alle seguenti domande (senza il procedimento seguito). Ogni risposta esatta vale 2 punti

1A) Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale reale V. Determinare per quali valori $m \in \mathbf{R}$ i vettori

$$w_1 = 2v_1 - 3mv_3, \qquad w_2 = 4v_2 - v_1, \qquad w_3 = mv_1 + (m+2)v_2$$

formano una base di V.

2A) Determinare l'equazione cartesiana del piano su cui giacciono le due rette complanari:

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

3A) Siano $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ e $S: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ applicazioni lineari. Dire quali valori può assumere il rango dell'aggiunta della composizione $(S \circ T)^*$ (si intende che si considerano i prodotti scalari canonici).

4A) Determinare per quali $h \in \mathbf{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTE B

Rispondere (con precisione) alle seguenti domande ciascuna delle quali vale 6 punti

1B) a) Dare la definizione di duale di uno spazio vettoriale.
b) Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e siano $v_1^*, \ldots, v_n^*$ gli elementi del duale di V tali che $v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Dimostrare che $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sono linearmente indipendenti.

2B) Sia $T: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato.
a) Definire il polinomio caratteristico di T.
b) Dimostrare che uno scalare λ_0 è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.

PARTE C

Risolvere per esteso (GIUSTIFICANDO LE RISPOSTE) i seguenti esercizi che valgono 7 punti ciascuno.

1C) Sia r la retta di equazioni $\begin{cases} x = -z \\ y = 1 - x \end{cases}$ e s la retta passante per i punti $A = (2, 0, 1)$ e $B = (0, -1, 0)$.
a) Si determinino equazioni cartesiane per la retta t passante per l'origine che è perpendicolare sia a r sia a s.
b) Se α è il piano contenente t e parallelo a r e β è il piano contenente t e parallelo a s, determinare equazioni di α e β e l'angolo formato dai piani α e β.

2C) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3, \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 | x_1 - x_3 = x_2 - x_4 = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3, \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

Trovare una base ortonormale per $U \cap W$ e completarla a una base ortonormale per W e poi a una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$.

GEOMETRIA Corso di Laurea in Fisica - I Test A.A 2005/2006 - 10.11.2005 - VERSIONE c

PARTE A

Dare solo la risposta finale alle seguenti domande (senza il procedimento seguito). Ogni risposta esatta vale 2 punti

1Ac) Sia $Ax = 0$ un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 8 incognite. Se la dimensione dello spazio delle sue soluzioni è 3, trovare il rango di A.

2Ac) Un vettore perpendicolare alla retta di equazione $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 2$ è:

3Ac) Dati i vettori $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, determinare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$.

4Ac) Determinare una base per il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$.

PARTE B

Rispondere (con precisione) alle seguenti domande ciascuna delle quali vale 6 punti

1B) a) Dare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare $T: V \to W$ fra due spazi vettoriali.

b) Se $T: V \to W$ è un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali, dimostrare che T è iniettiva se e solo se $Ker(T) = \{O_V\}$.

2B) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ dove A è una matrice con colonne $A^1, \ldots, A^n$.

a) Definire $Span(A^1, \ldots, A^n)$.

b) Dimostrare che il sistema ha soluzione se e solo se $b \in Span(A^1, \ldots, A^n)$.

PARTE C

Risolvere per esteso (GIUSTIFICANDO LE RISPOSTE) i seguenti esercizi che valgono 7 punti ciascuno.

1C) Si consideri al variare di $k \in \mathbf{R}$ il seguente sistema:

$$S_k : \quad \begin{cases} (k+4)x + 3y = 3k \\ 4x + ky = 4 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

a) Stabilire per quali $k \in \mathbf{R}$ il sistema S_k è compatibile e, quando esistono, trovare le soluzioni.

b) Quando il sistema S_k ammette soluzione, indicato con $V \subset \mathbf{R}^2$ l'insieme delle sue soluzioni, verificare che V è una sottovarietà affine. Se si pensa V come retta del piano, individuare un versore (direzione) di V.

c) Per $k = -4$ le tre equazioni del sistema individuano tre rette nel piano coordinato $\mathbf{R}^2$ che formano un triangolo T. Trovare le lunghezze dei lati e le misure (attraverso funzioni trigonometriche) degli angoli di T.

2C Sia $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare la matrice A tale che $T(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbf{R}^3$.

b) Determinare la dimensione di $Ker(T)$ trovare una sua base.

c) Completare la base trovata al punto b) a una base di $\mathbf{R}^3$.

GEOMETRIA Corso di Laurea in Fisica - A.A 2005/2006 - Appello 3.4.2006

PARTE A

Dare solo la risposta finale alle seguenti domande (senza il procedimento seguito). Ogni risposta esatta vale 2 punti

1A) Determinare per quali valori $k \in \mathbf{R}$ i tre vettori $\begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2-k \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-k \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbf{R}^3$.

2A) Siano $A \in M_{n,m}$ e $B \in M_{m,p}$ due matrici. Quale di queste relazioni è vera?

$$rg(AB) \geq \min\{rg(A), rg(B)\} \qquad rg(AB) \leq \min\{rg(A), rg(B)\} \qquad rg(AB) = \min\{rg(A), rg(B)\}$$

3A) Calcolare l'area del parallelogramma individuato dai vettori $v = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $w = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

4A) Determinare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito da $U = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

PARTE B

Rispondere (con precisione) alle seguenti domande ciascuna delle quali vale 6 punti

1B) Sia $T: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita.
a) Definire la nozione di autovalore di T.
b) Dimostrare che 0 è autovalore di T se e solo T non è biettivo.

2B) a) Dare la definizione di endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale metrico.
b) Dimostrare che autovettori relativi a autovalori distinti di un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale met sono ortogonali.

PARTE C

Risolvere per esteso (GIUSTIFICANDO LE RISPOSTE) i seguenti esercizi che valgono 7 punti ciascuno.

1C) Al variare di $t \in \mathbf{R}$ si consideri la coppia di piani:

$$p_t : tx + y + 2z = t^2 \qquad \text{e} \qquad q_t : x + ty + z = 8$$

e $r_t = p_t \cap q_t$.
a) Dimostrare che r_t è una retta per ogni $t \in \mathbf{R}$.
b) Determinare t_0 in modo che la retta r_{t_0} passi per il punto $P = (1, 4, -1)$.
c) Provare che r_0 e r_1 sono sghembe.
d) Determinare la retta r passante per il punto $P = (1, 4, -1)$ incidente r_0 e r_1.
e) Determinare le sfere di raggio 3 tangenti nel punto P al piano di equazione $x + 2y + z = 8$.

2C) Sia $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1.) Trovare la matrice A associata a T relativa alla base canonica.
(2.) Determinare gli autovalori di T e trovare basi per gli autospazi corrispondenti.
(3.) Stabilire motivando se A è diagonalizzabile e in quel caso scrivere una matrice diagonalizzante.

GEOMETRIA Corso di Laurea in Fisica - A.A 2005/2006 - Appello 19.12.2005

PARTE A

Dare solo la risposta finale alle seguenti domande (senza il procedimento seguito). Ogni risposta esatta vale 2 punti

1A) Siano $A^1, A^2, A^3 \in \mathbf{R}^5$. Se $A \in M_{5,6}$ è la matrice definita da $A = (A^1, A^2, A^3, A^1 - A^2, A^3 - A^1, A^2 + A^3)$, dire quali valori può assumere $dim(Ker A)$.

2A) Scrivere equazioni parametriche della retta dello spazio passante per il punto di coordinate (1,1,1) e parallela alla retta passante per i punti di coordinate (1,2,1) e (2,1,1).

3A) Sia A una matrice quadrata di ordine 2 con autovalori 3 e 7. Determinare $det(A)$.

4A) Scrivere tutte le matrici ortogonali simmetriche di ordine 2 di determinante 1.

PARTE B

Rispondere (con precisione) alle seguenti domande ciascuna delle quali vale 6 punti

1B) a) Dare la definizione di isomorfismo fra spazi vettoriali.

b) Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \ldots, w_n \in V$. Dimostrare che un endomorfismo $T: V \to V$ tale che $T(v_i) = w_i$ per ogni $i = 1 \ldots, n$ è un isomorfismo se solo se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ è una base di V.

2B) Sia V uno spazio vettoriale metrico reale di dimensione n e sia U un suo sottospazio.

a) Dire cosa si intende per complemento ortogonale di U.

b) Se $\{u_1, \ldots, u_k\}$ è una base di U, dimostrare che $v \perp u$ per ogni $u \in U$ se e solo se $u \perp u_j$ per ogni $j = 1, \ldots, k$.

PARTE C

Risolvere per esteso (GIUSTIFICANDO LE RISPOSTE) i seguenti esercizi che valgono 7 punti ciascuno.

1C) Sia Π il piano passante per l'origine e per i punti $A(1,2,0)$ e $B(0,3,1)$ e sia r_a, con $a \in \mathbf{R}$, la famiglia di rette di equazioni

$$r_a : \begin{cases} x = -3 + (a-5)t \\ y = (a-7) - 5t \\ z = (a-1) + t. \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

a) Determinare i valori di a per i quali r_a giace su Π.

b) Determinare il luogo descritto su Π dalle intersezioni, al variare di $a \in \mathbf{R}$, delle rette r_a con il piano Π stesso.

c) Dire se per qualche coppia di valori $a, b \in \mathbf{R}$ le rette r_a, r_b sono perpendicolari e, se esistono, produrre esplicitamente una tale coppia di rette.

2C Sia $L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare basi per $Ker L$ e $Im L$ e stabilire se $\mathbf{R}^3 = Ker L \oplus Im L$.

b) Determinare gli autovalori di L e i corrispondenti autospazi. Stabilire se L è diagonalizzabile.