Geometria – A.A. 2008/09

Domande 8.12.2008

Dopo aver studiato, scrivere le risposte alle seguenti domande senza guardare libri o appunti di nessun genere. Controllare le risposte solo dopo averle scritte:

1. Definire la nozione di applicazione lineare.

2. Definire definire nucleo, immagine e rango di un'applicazione lineare.

3. Enunciare il teorema della dimensione.

4. Dire cosa vuol dire che due spazi vettoriali sono isomorfi.

5. Data una coppia di piani definiti nello spazio da equazioni cartesiane, come si determina se sono paralleli? Data una coppia di rette definite nello spazio da equazioni cartesiane, come si determina se sono paralle?

Esercizi 8.12.2008

17. Sia $L_t\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita per ogni $t \in \mathbf{R}$ da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + x_3 + tx_4).$$

(a) Dimostrare che L_t è una applicazione lineare per ogni $t \in \mathbf{R}$.

(b) Per ogni $t \in \mathbf{R}$ calcolare $rg(L_t)$, $\dim(KerL_t)$ e trovare basi per $KerL_t$ e ImL_t

18. Sia $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ arbitrario.

19. Si considerino le applicazioni lineari $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ e $S\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definite rispettivamente da

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4.$$

(a) Trovare basi per ImT, $KerS$, $ImT \cap KerS$.

(b) Trovare supplementari per ImT, $KerS$, $ImT \cap KerS$.

20. Siano $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbf{R}^2$ tali che per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq tx + (1-t)y$. Se $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è un'applicazione lineare tale che $T(x) = x$ e $T(y) = y$ dimostrare che $T = Id$ ossia che $T(z) = z$

per ogni $z \in \mathbf{R}^2$. *Consiglio: dimostrare che x, y sono linearmente indipendenti e che quindi $\{x, y\}$ è una base (perché?), dunque......*

21. Sia $\mathbf{R}[x]$ lo spazio dei polinomi reali (di grado arbitrario) e siano $D: \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$ e $T: \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$ le applicazioni definite rispettivamente da

$$D\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} \qquad \text{e} \qquad T\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}.$$

(a) Dimostrare che D e T sono lineari.

(b) Dimostrare che D è suriettiva ma non iniettiva.

(c) Dimostrare che T è iniettiva ma non suriettiva.

(d) Dimostrare che $D \circ T = Id_{\mathbf{R}[x]}$ mentre $T \circ D \neq Id_{\mathbf{R}[x]}$.