Geometria – A.A. 2008/09

Domande 28.11.2008

Dopo aver studiato, scrivere le risposte alle seguenti domande senza guardare libri o appunti di nessun genere. Controllare le risposte solo dopo averle scritte:

1. Enunciare il teorema del completamento di un sistema libero a una base.

2. Definire la somma di due sottospazi vettoriali.

3. Enunciare la formula di Grassman.

4. Dire come si costruisce un supplementare di un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato.

Esercizi 28.11.2008

8. Stabilire se il sistema (sui complessi) è compatibile e, nel caso, trovare le soluzioni:

$$\begin{cases} z + iw = 1 + i \\ iz + w = 1 - i. \end{cases}$$

9. Stabilire per quali $k \in \mathbf{C}$ il sistema (sui complessi) è compatibile e, nel caso, trovare le soluzioni:

$$\begin{cases} kz_1 + iz_3 = i \\ iz_1 - z_2 = i \\ z_2 + kz_3 = 0 \end{cases}$$

10. Per $k \in \mathbf{R}$, si considerino i polinomi $p(t) = t^2 + 1$, $q_k(t) = t^2 + kt - 1$ e $r_k(t) = t^2 + kt + k$.

(a) Determinare per quali $k \in \mathbf{R}$ l'insieme $\mathcal{C}_k = \{p(t), q_k(t), r_k(t)\}$ è una base di $\mathbf{R}_2[t]$.

(b) Quando $\mathcal{C}_k$ è una base, esprimere il polinomio $t^2 + t - 2$ come combinazione lineare dei polinomi della base $\mathcal{C}_k$.

11. Al variare di $t \in \mathbf{R}$ si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$u_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, v_t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$ i vettori u_t, v_t sono linearmente indipendenti.

(b) Quando u_t, v_t sono linearmente indipendenti, trovare condizioni su x, y, z affiché $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Span\,(u_t, v_t)$.

12. Si considerino tre vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

con la proprietà che

$$u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3 = w_1 + w_2 + w_3 = 0.$$

Dimostrare che $\{u, v, w\}$ **non** è una base di $\mathbf{R}^3$

13. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3, \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 | x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3, \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 | x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

(a) Trovare una base per $U \cap W$ e completarla a basi per U e W.

(b) Trovare sottospazi di $\mathbf{R}^4$ supplementari per ciascuno dei sottospazi $U \cap W$, U e W.

14. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ il seguente sistema è compatibile e, quando esistono, trovare le soluzioni:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \lambda x + y - z = 0 \\ x - y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$$

15. Si considerino i polinomi $p_k(t) = (t-k)^3$, $q_k(t) = (t+k)^3$ e $r_k(t) = 2t^3 + 6kt$ al variare di $k \in \mathbf{R}$ e sia $U_k = Span(p_k(t), q_k(t), r_k(t))$.

(a) Trovare una base $\mathcal{B}_k$ per U_k e determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo da avere $\dim(U_k) = 2$.

(b) Al variare di $k \in \mathbf{R}$ completare $\mathcal{B}_k$ a una base di $\mathbf{R}_3[t]$.

16. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$U = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_t = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 | tx_1 + (t^2-1)x_2 + x_3 = O \right\}.$$

Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$ si ha $\mathbf{R}^3 = U \bigoplus V_t$.