Geometria – A.A. 2008/09

Domande 22.12.2008

Dopo aver studiato, scrivere le risposte alle seguenti domande senza guardare libri o appunti di nessun genere. Controllare le risposte solo dopo averle scritte:

1. Definire la nozione di duale di uno spazio vettoriale e di base duale.

2. Se V è uno spazio vettoriale, $W \subset V$ un suo sottospazio, definire l'annullatore W e dire quale relazione c'è fra le dimensioni di V, W e W.

3. Date due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di uno spazio vettoriale finitamente generato, dire come è definita la matrice B del cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e dire come sono correlate le coordinate x e x' di un vettore $v \in V$ rispettivamente relative alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

4. Dati due spazi vettoriali V e W finitamente generati sullo stesso campo, un'applicazione lineare $T: V \to W$ e due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di V e W, dire come è definita la matrice di T relativa a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e dire come sono correlate le coordinate x di un vettore $v \in V$ relative alla base $\mathcal{B}$ e le coordinate y di $T(v)$ relative a $\mathcal{C}$.

5. Data una coppia di rette definite nello spazio da equazioni cartesiane, come si determina se sono sghembe?

Esercizi 22.12.2008

22. Sia $V = \mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado al più 2. Si consideri inoltre la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{1}, x, x^2\}$ e di Ve la base $\mathcal{B}^* = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ del duale V^* duale della base $\mathcal{B}$.

(a) Se $\delta_0, \delta_1, \delta_2: V \in \mathbf{R}$ sono i funzionali lineari rispettivamente definiti, per $p(x) \in V$ da

$$\delta_0(p(x)) = p(0) \qquad \delta_1(p(x)) = p(1) \qquad \delta_2(p(x)) = p(2),$$

esprimere $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ come combinazione linerari dei vettori della base $\mathcal{B}^*$ e dimostrare che $\mathcal{C}^* = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ è una base di V^*.

(b) Trovare la base $\mathcal{C}$ di V di cui $\mathcal{C}^*$ è la base duale.

23. Nel piano, fissato un riferimento cartesiano ortogonale $RC(0, x, y)$, trovare le coordinate del punto di intersezione delle altezze del triangolo che ha vertici $P = (0, 1), Q = (2, 2), R = (4, 1)$.

24. Nel piano, fissato un riferimento cartesiano ortogonale $RC(0, x, y)$, trovare l'equazione delle rette parallele e che distano 3 dalla retta passante per i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (4, 2)$.

25. Sia $V = M_2(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 3. Si definisca $T: V \to V$ mediante $T(A) = A + A^T$

(a) Dimostrare che T è un'applicazione lineare.

(b) Determinare il rango di T e trovare una base per $Im(T)$.

(c) Determinare la dimensione di $Ker(T)$ e trovare una sua base.

(d) Dimostrare che $V = Im(T) \oplus Ker(V)$.

26. Si consideri l'applicazione $L: \mathbf{R}_3[x] \to M_2(\mathbf{R})$ definita da $L(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(2) \end{pmatrix}$

(a) Dimostrare che L è un'applicazione lineare.

(b) Dimostrare che L è un isomorfismo.

27. Sia $L\colon \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}$ l'unica applicazione lineare definita da

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2, \quad L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2, \quad L\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1, \quad L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

(a) Determinare $L\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)$.

(b) Determinare il rango di L e trovare una base per $Im(L)$.

(c) Determinare la dimensione di $Ker(L)$ e trovare una sua base.

28. Si considerino le seguenti rette del piano

$$\mathbf{r} : 7x - 3y + 5 = 0 \qquad \mathbf{s} : x + y - 2 = 0 \qquad \mathbf{t} : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}.$$

Trovare le equazioni parametriche della retta parallela e della retta perpendicolare a $\mathbf{r}$ passanti per il punto di intersezione di $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$.

29. Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si consideri l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $F(x) = x \wedge v$.

(a) Dimostrare che F è un'applicazione lineare.

(b) Determinare il rango di F e trovare una base per $Im(F)$.

(c) Determinare la dimensione di $Ker(F)$ e trovare una sua base.

(d) Dimostrare che $\mathbf{R}^3 = Im(L) \oplus Ker(L)$.

30. Per $\lambda \in \mathbf{R}$, sia $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$. Al variare di λ trovare tutte le matrici $X \in M_{2,2}(\mathbf{R})$ tali che $A_\lambda X A_\lambda = A_\lambda$.

31. Calcolare le inverse delle seguenti matrici: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e sia $T\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T(e_1) = T(e_4) = \frac{1}{2} v_1 \quad \text{e} \quad T(e_2) = T(e_3) = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^4$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$ e trovare la matrice del cambio di base dalla base canonica $\mathbf{R}^4$ alla base $\mathcal{B}$.

(b) Trovare le matrice associata a T relativa alla base canonica di $\mathbf{R}^4$ e la matrice associata a T realtiva alla base $\mathcal{B}$.

33. Si consideri l'applicazione $L\colon \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_3[x]$ definita da $L(p(x)) = p(x+1) - p(x)$.

(a) Dimostrare che L è lineare e trovare la matrica associata a T relativa alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

(b) Trovare basi per $KerL$ e per ImL.

(c) Se $D\colon \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_3[x]$ è l'endomorfismo definito da $D(p(x) = p'(x)$, trovare il sottospazio di $\mathbf{R}_3[x]$ dove $D = L$ e trovare uan base per $Im(D) \cap Im(L)$.

34. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione $T\colon M_{3,3}(\mathbf{R}) \to M_{3,3}(\mathbf{R})$ definita da $T(X) = A^{-1}XA - X$. Si dimostri che T è lineare e trovare una base per $KerT$.

35. Si considerino $U = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$, $W = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia

$$\mathcal{D} = \{T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3) \mid T(U) \subset W \text{ e } T(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{D}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$.

(b) Determinare la dimensione di $\mathcal{D}$.

(c) Se $T \in \mathcal{D}$, determinare la matrice di T relativa alla base canonica di $\mathbf{R}^3$).

36. Calcolare le radici cubiche di $z = \frac{1-i}{1+i}$

37. Al variare di $\lambda \in \mathbf{C}$, trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + iy = 1 \\ ix - y + z = 1 \\ 2x + 2iy = \lambda \end{cases}$$

38. Rispetto a un riferimento affine fissato dello spazio, si considerino le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{u} : \begin{cases} 4x + 5y - 5z = 0 \\ y - z = 4 \end{cases}.$$

(a) Dimostrare che **r** e **s** sono sghembe.

(b) Determinare la retta parallela alla retta **u** e incidente le rette **r** e **s**.

39. Rispetto a un riferimento affine fissato dello spazio, si considerino le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} x + y = z \\ y = 2z \end{cases}$$

Trovare equazioni parametriche e equazioni cartesiane del piano contenente **r** e parallelo a **s**.

40. Fissato un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ del piano, si considerino le rette

$$\mathbf{r} : x - 2y + 2 = 0 \qquad \mathbf{s} : 3x - y + 1 = 0$$

e il punto P di coordinate $(2, 0)$.

(a) Scrivere le equazioni per il cambiamento di coordinate fra il riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ e il riferimento $\mathcal{R}(O', x', y')$ determinato in modo che l'asse delle x' sia la retta **r**, l'asse delle y' sia la retta **s** e il punto P abbia coordinate $(-1, 4)$ in $\mathcal{R}(O', x', y')$.

(b) Determinare l'equazione nel sistema di riferimento $\mathcal{R}(O', x', y')$ della retta che nel riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ ha equazione $x - y = 1$.