Geometria – A.A. 2008/09

Domande 17.11.2008

Dopo aver studiato, scrivere le risposte alle seguenti domande senza guardare libri o appunti di nessun genere. Controllare le risposte solo dopo averle scritte:

1. Dare la definizione di sottospazio vettoriale e di sottospazio affine di uno spazio vettoriale.

2. Enunciare il teorema di struttura per i sistemi lineari.

3. Se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori in uno spazio vettoriale, dire cos'è una loro combinazione lineare.

4. Se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori in uno spazio vettoriale, dire cosa vuol dire che sono linearmente indipendenti.

Esercizi 17.11.2008

1. Siano $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OR}$ vettori non complanari di $\mathcal{V}_0^3$ e siano $\overrightarrow{\mathbf{i}} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}} = 2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{\mathbf{k}} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.

(a) Dimostrare che i vettori $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ non sono complanari.

(b) Trovare numeri a, b, c tali che $2\overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = a\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + b\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

2. Siano $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ due vettori non allineati di $\mathcal{V}_0^3$ e. per $t \in \mathbf{R}$, sia $\overrightarrow{\mathbf{k}}_t = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$.

(a) Dimostrare che i vettori $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{t_1}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{t_2}$ non sono allineati se e solo se $t_1 \neq t_2$.

(b) Dimostrare che per ogni terna di scalari t_1, t_2, t_3 i vettori $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{t_1}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{t_2}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{t_3}$ sono complanari.

3. Dire quale dei seguenti insiemi è un sottospazio vettoriale o affine di $\mathbf{R}^2$:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 + 1 = 0 \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 0 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 - y^2 = 0 \right\},$$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 = 0 \right\}, \qquad V_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 - y^2 = 1 \right\},$$

$$V_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 = 1 \right\}, \qquad V_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + 1 = 0 \right\}.$$

4. Si consideri al variare di $k \in \mathbf{R}$ il seguente sistema:

$$S_k : \quad \begin{cases} (k+4)x + 3y = 3k \\ 4x + ky = 4 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

Stabilire per quali $k \in \mathbf{R}$ il sistema S_k è compatibile e, quando esistono, trovare le soluzioni.

5. Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e siano $V = Span(v_1, v_2)$, $U = Span(u_1, u_2)$.

(a) Dimostrare che $V = U$ *(Consiglio: se $u_1, u_2 \in V$ allora $U \subset V$...).*

(b) Stabilire per quali $x, y, z \in \mathbf{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è nel sottospazio V.

6. Per $t \in \mathbf{R}$, si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

(b) Quando $\mathcal{B}$ è una base, trovare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ relative a $\mathcal{B}$.

7. Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$.

(b) Trovare le coordinate relative alla base $\mathcal{B}$ del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.