Geometria – A.A. 2008/09

Domande 24.1.2009

Dopo aver studiato, scrivere le risposte alle seguenti domande senza guardare libri o appunti di nessun genere. Controllare le risposte solo dopo averle scritte:

1. Dare la definizione di autovalore e autovettore per un endomorfismo di uno spazio vettoriale.

2. Dire cos'è il polinomio caratteristico di un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato.

3. Definire molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore.

4. Enunciare condizioni necessarie e sufficienti affinché un endomorfismo sia diagonalizzabile.

5. Perché un endomorfimo di uno spazio vettorilae di dimensione n che n autovalori distinti è sempre diagonalizzabile.

6. Sia A una matrice quadrata di ordine n simile a una matrice diagonale ossia tale che esiste B invertibile tale che $B^{-1}AB$. Come si calcolano le colonne di B?

Esercizi 24.1.2009

41. Si consideri l'endomorfismo $T\colon \mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$ definito da $T(p(t) = tp'(t) + p(t+1)$. (a) Trovare la matrice di T relativa alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$, calcolare il polinomio caratteristico di T e calcolare i suoi autovalori.
(b) Stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso positivo, trovare una base diagonalizzante per T.

42. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e calcolare i suoi autovalori.
(b) Trovare una base per gli autospazi relativi agli autovalori di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

43. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e calcolare i suoi autovalori.
(b) Trovare una base per gli autospazi relativi agli autovalori di A e stabilire se A è diagonalizzabile e, nel caso trovare una matrice diagonalizzante per A.

44. Si consideri su $\mathbf{R}^4$ il prodotto scalare canonico. Trovare una base ortonormale per il sottospazio

$$V = \{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

e completarla a una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$.

45. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2i & -i \end{pmatrix}$$

Trovare autovalori e basi per i corrispondenti autospazi di L_A, L_B, L_C.

46. Sia $D\colon \mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$ l'applicazione che associa a un polinomio la sua derivata seconda. Trovare autovalori e autospazi di D e dimostrare che D non è diagonalizzabile.