Geometria – A.A. 2008/09

Domande 2.2.2009

Dopo aver studiato, scrivere le risposte alle seguenti domande senza guardare libri o appunti di nessun genere. Controllare le risposte solo dopo averle scritte:

1. Data un'applicazione lineare fra spazi vettoriali metrici sullo stesso campo, definire la sua aggiunta.

2. Dire cos'è un endomorfismo autoaggiunto.

3. Definire un'isometria di uno spazio vettoriale metrico.

4. Definire cos'e' una matrice ortogonale, cos'e' una matrice unitaria e dire che condizione devono soddisfare le loro colonne.

5. Spiegare la procedura per diagonalizzare un endomorfiamo autoaggiunto.

6. Sia A una matrice simmetrica di ordine n. Spiegare come si trova un amatrice otogonale B tale che $B^T AB$ è diagonale.

Esercizi 2.2.2009

47. Siano $V = M_2(\mathbf{R})$ lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine 2 e sia $T: V \to \mathbf{R}$ l'applicazione lineare, chiamata *traccia* definita da $T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$.

(a) Dimostrare che la funzione $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbf{R}$ definita da $< A, B >= T(B^T A)$ è un prodotto scalare definito positivo su V

(b) Trovare una base ortonormale di V rispetto a questo prodotto scalare.

(c) Trovare il complemento ortogonale del sottospazio di V generato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

48. Si definisca $< \cdot, \cdot >: \mathbf{R}_2[t] \times \mathbf{R}_2[t] \to \mathbf{R}$ mediante $< p(t), q(t) >= \int_0^1 p(t)q(t)dt$.

(a) Dimostrare che la funzione $< \cdot, \cdot >$ è un prodotto scalare definito positivo su $\mathbf{R}_2[t]$

(b) Trovare una base ortonormale per $\mathbf{R}_2[t]$ relativo a questo prodotto scalare.

49. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare autovalori e autospazi di A e una matrice ortogonale B tale che $B^T AB$ sia diagonale.

50. Per $z \in \mathbf{C}$, se $A_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}$, si trovi una matrice unitaria U tale che $U^H A_z U$ sia diagonale.

51. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Trovare autovalori e autospazi di A e una matrice ortogonale B tale che $B^T AB$ sia diagonale. Se ϕ è la forma quadratica su $\mathbf{R}^3$ definita da $\phi(x) = x^T Ax$, stabilire se ϕ è definita positiva.