Autovalori, Autovettori, Diagonalizzazione.

1. Autovalori e Autovettori

Definizione 1.1 Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R}\,\mathrm{o}\,\mathbb{C})$ e sia $T\colon V\to V$ un endomorfismo. Un vettore non nullo $v\in V\setminus\{O\}$ si dice *autovettore* di T relativo all'autovalore $\lambda\in\mathbb{K}$ se si ha

$$T(v)=\lambda v \tag{1.1}$$

Proposizione 1.1: *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R}\,\mathrm{o}\,\mathbb{C})$ e sia $T\colon V\to V$ un endomorfismo. Allora $\lambda\in\mathbb{K}$ è autovalore di $T\iff Ker(T-\lambda Id_V)\neq\{O\}$. Inoltre $v\in V$ è una autovettore di T relativo all'autovalore $\lambda\in\mathbb{K}\iff v\in Ker(T-\lambda Id_V)\setminus\{O\}$.*

Dimostrazione: Basta osservare che (1.1) equivale a $(T-\lambda Id_V)(v)=O$. □

Definizione 1.2 Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T\colon V\to V$ un endomorfismo. Se $\lambda\in\mathbb{K}$ è un autovalore di T, il sottospazio $V_\lambda=Ker(T-\lambda Id_V)$ si dice *autospazio* di T relativo all'autovalore λ e la sua dimensione $dim(V_\lambda)$ si dice *molteplicità geometrica* di λ.

Proposizione 1.2: *Sia $T\colon V\to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V e sia $\mathcal{B}$ una base di V. Allora la matrice di T relativa a $\mathcal{B}$ è diagonale $\iff\mathcal{B}$ è composta di autovettori di T.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{B}=\{v_1,\ldots,v_n\}$. Se i v_i sono tutti autovettori relativi a autovalori λ_i, allora $T(v_i)=\lambda_i v_i$ per ogni i e quindi la matrice di T relativa a $\mathcal{B}$ è diagonale con i $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sulla diagonale. Viceversa se la matrice di T relativa a $\mathcal{B}$ è diagonale con i $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sulla diagonale, allora $T(v_i)=\lambda_i v_i$ per ogni i e quindi $\mathcal{B}$ è composta di autovettori di T. □

Corollario 1.3: *Una matrice quadrata A è simile a una matrice diagonale $\iff$ l'applicazione $L_A\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori.*

Definizione 1.3 Un endomorfismo $T\colon V\to V$ di uno spazio vettoriale V si dice *diagonalizzabile* se esiste una base di V rispetto alla quale T ha matrice diagonale. Questo equivale a richiedere che esiste una base di autovettori di V. Una matrice A quadrata di ordine n si dice *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale, ossia se esiste una matrice non singolare B tale che $B^{-1}AB$ è diagonale.

Teorema 1.4: *Sia $T\colon V\to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Siano $\mathcal{B}$ una base di V e sia A la matrice di T relativa a $\mathcal{B}$. Allora*

(i) La funzione $p_T\colon\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ definita da

$$p_T(\lambda)=det(A-\lambda I_n)$$

è un polinomio di grado n che non dipende dalla scelta della base $\mathcal{B}$.

(ii) Uno scalare $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è un autovalore di $T \iff p_T(\lambda_0) = 0$.

Dimostrazione: (i) Dimostriamo che $p_T(\lambda)$ non dipende dalla scelta della base. Sia A' la matrice di T relativa a un'altra scelta di base $\mathcal{B}'$ di V. Se B è la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ allora $A' = B^{-1}AB$. Occorre provare che $det(A' - \lambda I_n) = det(A - \lambda I_n)$. Questo segue utilizzando il Teorema di Binet:

$$\begin{aligned} det(A' - \lambda I_n) &= det(B^{-1}AB - \lambda I_n) = det(B^{-1}AB - B^{-1}\lambda I_n B) \\ &= det\left(B^{-1}(A - \lambda I_n)B\right) = detB^{-1}det(A - \lambda I_n)detB \\ &= (detB)^{-1}det(A - \lambda I_n)detB = det(A - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Dimostriamo che $p_T(\lambda)$ è un polinomio di grado n per induzione sulla dimensione n di V. Se $n = 1$ il fatto è ovvio. Supponiamo che sia vero per $n - 1$. Allora

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) = det(A - \lambda I_n) &= det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n1} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda) det \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{n1} - \lambda \end{pmatrix} + \text{ monomi di grado } \le n - 1 \text{ in } \lambda \end{aligned}$$

e quindi per l'ipotesi induttiva, $p_T(\lambda)$ è un polinomio di grado n.

(ii) Lo scalare $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è autovalore di $T \iff Ker(T - \lambda_0 Id_V) \neq \{O\} \iff (A - \lambda_0 I_n)$ non è invertibile $\iff det(A - \lambda_0 I_n) = 0$. □

Definizione 1.4 Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Il polinomio $p_T(\lambda)$ si dice *polinomio caratteristico* di T.

Definizione 1.5 Sia λ_0 un autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale V la *molteplicità algebrica* di T è la molteplicità di λ_0 come radice del polinomio $p_T(\lambda)$

Come conseguenza immediata del Teorema 1.4 e del Teorema Fondamentale dell'Algebra si ha il seguente

Corollario 1.5: *Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n ha esattamente n autovalori (contati con la molteplicità).*

Spesso invece che con endomorfismi, si ha a che fare solo con matrici. Ricapitoliamo brevemente le ovvie nozioni di autovalore, di autovettore, autospazio e molteplicità nel caso di matrici:

Definizione 1.6 Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice quadrata di ordine n. Un vettore non nullo $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{O\}$ si dice *autovettore* di A relativo all'*autovalore* $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ se si ha $Ax = \lambda_0 x$. Inoltre $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ (che secondo la Definizione (1.4) è il polinomio caratteristico dell'applicazione L_A) si dice *polinomio caratteristico* di A e le sue radici sono gli autovalori di A. Si dice *autospazio* relativo a un autovalore λ_0 di A il sottospazio $V_{\lambda_0} = Ker(A - \lambda_0 I_n) = Ker(L_A - \lambda_0 Id_{\mathbb{K}^n})$. La *molteplicità geometrica* di un autovalore λ_0 di A è la dimensione dell'autospazio V_{λ_0}. La *molteplicità algebrica* di un autovalore è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristica.

2. Diagonalizzabilità

Nel paragrafo precedente abbiamo dato due nozioni di molteplicità per un autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. È possibile dare un criterio di diagonalizzabilità in termini di molteplicità. Si dimostra infatti che affinchè un endomorfismo di uno spazio di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$ sia diagonalizzabile occorre e basta che, contati con la loro molteplicità algebrica, ci siano n autovalori nel campo $\mathbb{K}$ e che per tutti gli autovalori le molteplicità algebriche e geometriche coincidano. L'idea è che affinchè un endomorfismo sia diagonalizzabile debbano esserci "abbastanza" autovalori e che per ogni autovalore ci siano "abbastanza" autovettori linearmente indipendenti. Per capire cosa succede cominciamo con due esempi tipici di endomorfimi (e matrici) non diagonalizzabili. Il primo illustra la situazione in cui non ci sono "abbastanza" autovalori, il secondo il caso in cui non ci sono "abbastanza" autovettori linearmente indipendenti.

Esempio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e si consideri $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come al solito da $L_A(x) = Ax$. Il polinomio caratteristico di A è $\lambda^2 + 1$ e quindi non vi sono autovalori in $\mathbb{R}$ di A. Si conclude allora che $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non è diagonalizzabile e che A non è simile a una matrice diagonale reale ossia non esiste una matrice invertibile B reale tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale.

Esempio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e si consideri $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come al solito da $L_A(x) = Ax$. Dato che il polinomio caratteristico di di L_A (e di A) è $(\lambda - 1)^2$ Si vede subito che l'unico autovalore di L_A (e di A) è 1. D'altra parte l'autospazio corrispondente è $\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0\}$ che ha dimensione 1. Dunque non può esistere una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di L_A (o di A) e quindi L_A (e A) non sono diagonalizzabili.

Cominciamo con la seguente

Proposizione 2.1: *Sia $T \colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$. Se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori di T corrispondenti a autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione: Procediamo per induzione su k. Se $k = 1$, il risultato è banale. Supponiamo il risultato vero per $k - 1$. Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ scalari tali che

$$O = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} \alpha_k v_k. \tag{2.1}$$

Allora

$$\begin{aligned} O &= T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_k T(v_k) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

Moltiplicando la (2.1) per λ_k e sottraendo alla (2.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_k) v_k \\ &= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} \end{aligned}.$$

Per l'ipotesi induttiva $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \ldots = \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$ e quindi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$, dato che $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Ma allora da (2.1) segue anche $\alpha_k = 0$. $\square$

Proposizione 2.2: *Sia V spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$. Se un endomorfismo $T: V \to V$ ha n autovalori distinti in $\mathbb{K}$, T è diagonalizzabile.*

Dimostrazione: Il risultato è immediata conseguenza della Proposizione 2.1: se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sono autovalori a due a due distinti di T e $v_1, \dots, v_n$ sono autovettori corrispondenti, allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti e quindi, dato che $dim(V) = n$, formano una base per V. $\square$

Proposizione 2.3: *Siano V spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$ e $T: V \to V$ un endomorfismo. Per ogni autovalore $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ di T la molteplicità geometrica è minore o uguale della molteplicità algebrica.*

Dimostrazione: Siano r la molteplicità geometrica e s la molteplicità algebrica di λ_0. Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base dell'autospazio V_{λ_0} e sia $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ un suo completamento a una base di V. La matrice A di T relativa a questa base ha questa forma:

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_0 & 0 & \dots & 0 & | & & & & \\
0 & \lambda_0 & \dots & 0 & | & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & & C & & \\
0 & 0 & \dots & \lambda_0 & | & & & & \\
-- & -- & -- & -- & | & -- & -- & -- & -- \\
0 & 0 & \dots & 0 & | & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & | & & B & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & | & & & &
\end{array}\right)$$

dopo C è una matrice r righe e $n-r$ colonne e B è una matrice $n-r$ righe e $n-r$ colonne. Allora se P_T, P_A e P_B sono rispettivamente il polinomio caratteristico di T, della matrice A e della matrice B, si ha

$$P_T(\lambda) = P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r P_B(\lambda)$$

e quindi la moteplicità algebrica di λ_0 è $s \geq r$. $\square$

Siamo pronti per enunciare il criterio di diagonalizzabilità annunciato:

Teorema 2.4: *Sia $T: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione n. Allora T è diagonalizzabile se e solo se T ha n autovalori (contati con la molteplicità algebrica) in $\mathbb{K}$ e per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.*

Dimostrazione: Se T è diagonalizzabile allora esiste una base di autovalori, la matrice di T relativa è diagonale con sulla diagonale gli autovalori di T. Quindi è immediato osservare che T ha n autovalori (contati con la molteplicità algebrica) in $\mathbb{K}$ e per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.

Viceversa siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ gli autovalori distinti di T, $m_1, \dots, m_r$ le rispettive molteplicità algebriche e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$. Supponiamo che $m_1 + \ldots + m_r = n$ e che $dim(V_{\lambda_j}) = m_j$ per ogni $j = 1, \dots, r$. Poniamo inoltre $\mu_j = \sum_{k=1}^{j} m_k$ per ogni $j \geq 1$ in modo che in particolare risulti $\mu_r = n$. Siano rispettivamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \{v_1, \dots, v_{\mu_1}\} \quad \text{una base di} \quad V_{\lambda_1}, \\
\mathcal{B}_2 &= \{v_{\mu_1+1}, \dots, v_{\mu_2}\} \quad \text{una base di} \quad V_{\lambda_2}, \\
&\vdots \\
\mathcal{B}_r &= \{v_{\mu_{r-1}+1}, \dots, v_n\} \quad \text{una base di} \quad V_{\lambda_r}.
\end{aligned}$$

Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ è costituita da n autovettori di T. Per concludere la dimostrazione, basta provare che $\mathcal{B}$ è una base di V e a tal fine basta far vedere che è un sistema libero. Supponiamo che per $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_{r-1}+1}, \ldots, \alpha_{\mu_n} \in \mathbb{K}$ si abbia

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{\mu_1} v_{\mu_1} + \ldots + \alpha_{\mu_{r-1}+1} v_{\mu_{r-1}+1} + \ldots + \alpha_{\mu_n} v_{\mu_r} = O_V$$

e per ogni $j = 1, \ldots, r$ si ponga $w_j = \alpha_{\mu_{j-1}+1} v_{\mu_{j-1}+1} + \ldots + \alpha_{\mu_j} v_{\mu_j} \in V_{\lambda_j}$. Dunque si ha

$$w_1 + \ldots + w_r = O_V$$

e questo, dato che i w_j appartengono a autospazi corrispondenti a autovalori distinti, per la Proposizione 2.1 può succedere solo se $w_1 = \ldots = w_r = O_V$. Allora per ogni $j = 1, \ldots, r$ si ha $O_V = w_j = \alpha_{\mu_{j-1}+1} v_{\mu_{j-1}+1} + \ldots + \alpha_{\mu_j} v_{\mu_j}$ e quindi, dato che $\mathcal{B}_j$ è una base, allora $\alpha_{\mu_{j-1}+1} = \ldots = \alpha_{\mu_j} = 0$. Dunque $\mathcal{B}$ è libero.

$\square$

Il Teorema 2.4 si può riformulare come criterio di diagonalizzabilità per matrici nel modo seguente:

Corollario 2.5: *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è simile a una matrice diagonale se e solo se A ha n autovalori (contati con la molteplicità algebrica) in $\mathbb{K}$ e per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.*

Concludiamo illustrando la procedura che si deve seguire per verificare se un endomorfismo è diagonalizzabile e nel caso per trovare una base composta di autovettori.

Algoritmo di diagonalizzazione per endomorfismi: Sia $T \colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ con $dim(V) = n$

I passo: Si fissi una base $\mathcal{B}$ di V e si trovi la matrice A associata a T relativa alla base $\mathcal{B}$.

II passo: Trovare il polinomio caratteristico $P_T(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ e determinarne le radici. Se, contate con la loro molteplicità, ha n radici in $\mathbb{K}$ si può proseguire, altrimenti si conclude che T non è diagonalizzabile (perchè non ha abbastanza autovalori in $\mathbb{K}$!).

III passo: Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di T, per ogni $j = 1, \ldots, r$ si determnini una base $\mathcal{C}_j$ per l'autospazio V_{λ_j} relativo all'autovalore λ_j.

IV passo: Si consideri $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_r$. Allora $\mathcal{C}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti di V. L'endomorfismo T è diagonalizzabile se e solo se $\mathcal{C}$ contiene n vettori perchè in questo caso $\mathcal{C}$ è una base di V (contiene il numero giusto di vettori linearmente indipendenti) costituita da autovettori di T. Se $\mathcal{C}$ è una base, la matrice di T relativa a $\mathcal{C}$ è la matrice diagonale Δ con sulla diagonale gli autovalori di T. La matrice B del cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ (quella che ha per colonne le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ dei vettori di $\mathcal{C}$, è la matrice tale che $\Delta = B^{-1}AB$.

Naturalmente l'algoritmo si può adattare per diagonalizzare matrici.

Algoritmo di diagonalizzazione matrici: Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata di ordine n.

I passo: Trovare il polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ e determinarne le radici. Se, contate con la loro molteplicità, ha n radici in $\mathbb{K}$ si può proseguire, altrimenti si conclude che A non è diagonalizzabile (perché non ha abbastanza autovalori in $\mathbb{K}$!).

II passo: Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di A, per ogni $j = 1, \ldots, r$ si determnini una base $\mathcal{C}_j$ per l'autospazio $V_{\lambda_j} = Ker(A - \lambda_j I_n)$ relativo all'autovalore λ_j (che non è altro che l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $(A - \lambda_j I_n)x = 0$).

III passo: Si consideri $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_r$. Allora $\mathcal{C}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti di R^n. La matrice A è diagonalizzabile se e solo se $\mathcal{C}$ contiene n vettori perchè in questo caso $\mathcal{C}$ è una base di R^n (contiene il numero giusto di vettori linearmente indipendenti) costituita da autovettori di A. Se $\mathcal{C}$ è una base, la matrice di L_A relativa a $\mathcal{C}$ è la matrice diagonale Δ con sulla diagonale gli autovalori di A. Dunque se B è la matrice del cambio di base dalla base canonica alla base $\mathcal{C}$ (quella che ha per colonne i vettori di $\mathcal{C}$, è la matrice tale che $\Delta = B^{-1}AB$.

Esempio. Se $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, consideriamo l'endomorfismo $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definito da $T(X) = XM - NX$. Dimostreremo ora che T è diagonalizzabile e troveremo una base diagonalizzante. Se $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, allora si vede subito che

$$T(X) = \begin{pmatrix} 2x_{11} + x_{12} & x_{11} + 2x_{12} \\ x_{21} + x_{22} & x_{21} + x_{22} \end{pmatrix}.$$

Allora rispetto alla base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

di $M_2(\mathbb{R})$, la matrice di T è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di T è dunque

$$p_T(\lambda) = det(A - \lambda I_4) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

che ha 4 radici distinte $0, 1, 2, 3$ che sono gli autovalori di T (e di A). Cercare una base per gli autospazi corrispondenti a ciascun autovalore corrisponde a trovare basi rispettivamente per

$$KerT, Ker(T - Id), Ker(T - 2Id), Ker(T - 2Id).$$

Dato che

$$KerA = Span \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Ker(A - I_4) = Span \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Ker(A - 2I_4) = Span \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ker(A - 3I_4) = Span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$KerT = Span\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Ker(T-Id) = Span\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Ker(T-2Id) = Span\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Ker(T-2Id) = Span\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi una base di $M_2(\mathbb{R})$ rispetto alla quale T ha matrice diagonale è data da

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice di T rispetto a questa base è

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha per colonne i vettori che formano basi rispettivamente di $KerA$, $Ker(A-I_4)$, $Ker(A-2I_4)$, $Ker(A-3I_4)$ ha inversa

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e con un semplice calcolo si verifica che $D = B^{-1}AB$.

Concludiamo queste note esaminando il seguente problema. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $T_i \colon V \to V$, $i = 1, 2$ due endomorfismi diagonalizzabili. Sotto quale condizione esiste una base di V rispetto alla quale sia T_1 sia T_2 ha matrice diagonale? In altre parole sotto quale ipotesi T_1 e T_2 sono "simultaneamente diagonalizzabili'?'

È abbastanza facile trovare una condizione necessaria:

Proposizione 2.6: *Per $i = 1, 2$ siano $T_i \colon V \to V$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione n simultaneamente diagonalizzabili. Allora T_1 e T_2 commutano ossia tali che $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_1\}$ una base rispetto alla quale sia T_1 sia T_2 hanno matrice diagonale. Allora per ogni $i = 1, \ldots, n$ esistono scalari λ_i e μ_i tali che $T_1(v_i) = \lambda_i v_i$ e $T_2(v_i) = \mu_i v_i$. Ma allora per ogni $i = 1, \ldots, n$

$$T_1(T_2((v_i)) = T_1(\mu_i v_i) = \mu_i T_1(v_i) = \mu_i \lambda_i v_i = \lambda_i \mu_i v_i = \lambda_i T_2(v_i) = T_2(\lambda_i v_i) = T_2(T_1(v_i))$$

e quindi $T_1 \circ T_2((v_i) = T_2 \circ T_1((v_i)$. Dato che assumono gli stessi valori sugli elementi di una base, segue che $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ $\square$

In effetti dimostreremo ora che la condizione è anche sufficiente. Cominciamo con una ossevazione che vale anche per spazi non finitamente generati.

Lemma 2.7: *Per $i = 1, 2$, siano $T_i \colon V \to V$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ che commutano ossia tali che $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. Se U è un autospazio di T_1 allora $T_2(U) \subset U$ e se W è un autospazio di T_W allora $T_1(W) \subset W$.*

Dimostrazione: Naturalmente basta dimostrare una delle due conclusioni, l'altra si ottiene scambiando i ruoli di T_1 e T_2. Sia dunque U un autospazio di T_1 relativo all'autovalore λ. Allora $U = Ker(T_1 - \lambda Id)$. Se $u \in U$, allora $T_1(T_2((u)) = T_2(T_1(u)) = T_2(\lambda u) = \lambda T_2(u)$ e quindi $T_2(u) \in U$. $\square$

Il risultato conclusivo è il seguente:

Teorema 2.8: *Per $i = 1, 2$, siano $T_i \colon V \to V$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione n. Allora T_1 e T_2 sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se commutano.*

Dimostrazione: Grazie alla Proposizione 2.6 ci basta dimostrare che se T_1 e T_2 commutano allora sono simultaneamente diagonalizzabili. Supponiamo prima di tutto che per uno fra T_1 e T_2, per esempio T_1, tutto V sia un autospazio. Allora $T_1 = \lambda Id$ per qualchescalare λ e quindi T_1 ha matrice diagonale rispetto qualunque base di V e quindi T_1 e T_2 sono simultaneamente diagonalizzabili. Se invece gli autospazi di T_1 e T_2 sono tutti propri (ossia diversi da V), procediamo per induzione per ottenere la conclusione. La conclusione del Teorema vale banalmente per spazi vettoriai di dimensione 1. Supponiamo che il Teorema valga per ogni spazio vettoriale di dimensione $\leq n - 1$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di T_1 e $V_1, \ldots, V_k$ i corrispondenti autospazi. Se $U = V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ allora, sia V_1 sia U sono sottospazi propri di V e quindi $dim(V_1) \leq n - 1$ e $dim(U) \leq n - 1$. Inoltre dal Lemma 2.7 segue che $T_2(V_1) \subset V_1$ e $T_2(U) \subset U$. Dunque le restrizioni di T_1 e T_2 sia a V_1 sia a U commutano e quindi, per l'ipotesi induttiva, sono simultaneamente diagonalizzabili. Dato che $V = V_1 \oplus U$, segue che T_1 e T_2 sono simultaneamente diagonalizzabili su tutto V. $\square$