Soluzione esercizio

Le risposte ai quesiti sono poste nella tabella qui a fianco, e le soluzioni sono date di seguito.

	A	B	C	D	E	F	G	H
V/F	F	F	V	V	V	F	V	V

Le due molle del sistema hanno una lunghezza pari a *L/2*, e di conseguenza non sono a riposo, ma sono estese ciascuna di una quantità *L/4*. Quindi, ognuna di esse eserciterà una forza sulla massa *M*. In particolare:

Per la molla k_1 vale: $\Delta\vec{x} = \frac{L}{4}\hat{x}$

$$\vec{F}_1 = -k_1 \cdot \Delta\vec{x} = -k_1 \cdot \frac{L}{4}\hat{x}$$ *forza esercitata dalla molla 1*

Per la molla k_2 vale: $\Delta\vec{x} = -\frac{L}{4}\hat{x}$ *estensione della molla*

$$\vec{F}_2 = -k_2 \cdot \Delta\vec{x} = k_2 \cdot \frac{L}{4}\hat{x}$$ *forza esercitata dalla molla*

La forza risultante agente sulla massa e dovuta alle due molle è quindi: $\vec{F}_{molle} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (k_2 - k_1)\cdot\frac{L}{4}\hat{x}$ *(eq.3)*

Sulla massa agiscono anche le seguenti forze:

-Forza peso: $\vec{F}_g = -M \cdot g\hat{y}$

-Reazione vincolare del piano di appoggio (stessa direzione e verso opposto alla forza peso):

-Forza di attrito statico che contrasta la forza delle molle:

Tutte le forze agenti sulla massa M sono dirette lungo gli assi *x* e *y*, e quindi sono parallele od ortogonali al piano di appoggio. Dall'espressione di $\vec{F}_{molle}$ (*eq.3*) si può notare che il verso dipende da *(k_1-k_2)* (dal momento che l'estensione delle due molle rispetto al punto di equilibrio è la stessa, la molla più "rigida" tende a trascinare la massa verso il proprio punto di equilibrio). Di conseguenza la forza d'attrito, che vi si oppone, avrà pure verso dipendente dai valori di k_1 e k_2.

Per vincere l'attrito statico e spostare la massa M dall'origine, il modulo della forza delle molle deve essere maggiore della forza d'attrito statico: $\left|\vec{F}_a\right| = \mu\left|\vec{F}_g\right| = \mu Mg$
Quindi la massa non si muove se:

$$\frac{\left|\vec{F}_{molle}\right|}{\left|\vec{F}_a\right|} < 1 \Rightarrow \frac{\left|(k_2 - k_1)\right|\frac{L}{4}}{\mu\left|\vec{F}_g\right|} = \left|\frac{k_2 - k_1}{\mu Mg}\right|\frac{L}{4} < 1$$

(Quale sarebbe il verso del moto per $\frac{\left|\vec{F}_{molle}\right|}{\left|\vec{F}_a\right|} > 1$ *?) Attenzione ai segni…..*

Nella seconda parte si suppone che la forza di attrito sia nulla. La massa M quindi NON è in generale in equilibrio nell'origine. Il punto di equilibrio può essere determinato imponendo che la risultante delle forze esterne sia uguale a 0. Dal momento che le forze agenti in direzione y (forza peso e reazione vincolare) si bilanciano sarà sufficiente trovare il punto x_0 in cui le forze dovute alle due molle avranno stesso modulo (dalla precedente discussione è facile capire che le due molle hanno verso opposto). Gli spostamenti dalle posizioni di equilibrio per la molla di costante elastica k_1 e quella di costante elastica k_2 nella posizione x_0 sono rispettivamente:

$\Delta\vec{x}_1 = \left(x_0 + \frac{L}{4}\right)\hat{x}, \qquad \Delta\vec{x}_2 = \left(x_0 - \frac{L}{4}\right)\hat{x}$ (*fare attenzione ai segni!*) per cui la forza risultante sulla massa sarà:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1\cdot\Delta\vec{x}_1 - k_2\cdot\Delta\vec{x}_2 = -k_1\cdot\left(x_0 + \frac{L}{4}\right)\hat{x} - k_2\cdot\left(x_0 - \frac{L}{4}\right)\hat{x} = -(k_1 + k_2)x_0\hat{x} + (k_2 - k_1)\frac{L}{4}\hat{x}$$

per cui la condizione di equilibrio è data da: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow -(k_1 + k_2)x_0\hat{x} + (k_2 - k_1)\frac{L}{4}\hat{x} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{(k_2 - k_1)}{(k_1 + k_2)}\frac{L}{4}$

(*cosa succede se $k_1 = k_2$? Questo è un buon criterio per verificare la risposta…Nota pure che i segni di forze e posizioni, se ben scelti all'inizio, risultano automaticamente corretti, e possono essere verificati sul grafico*)

Per rispondere alle ultime due questioni si deve notare che la forza agente sulla molla è ancora di tipo armonico (si può verificare che esiste un sistema di coordinate dato da $X = x + x_0$ in cui la forza risultante diventa $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -(k_1 + k_2)X\hat{x}$, ovvero tutto va come se la forza fosse dovuta ad una nuova molla di costante elastica (k_1+k_2)). L'origine O è il punto di massima estensione in questo moto armonico, e quindi la velocità è sempre nulla, mentre l'accelerazione nel punto O è data semplicemente da $\frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{M} = \frac{(k_2 - k_1)L}{4M}\hat{x}$ (la forza nell'origine dovuta alle molle è stata calcolata in più punti in precedenza).