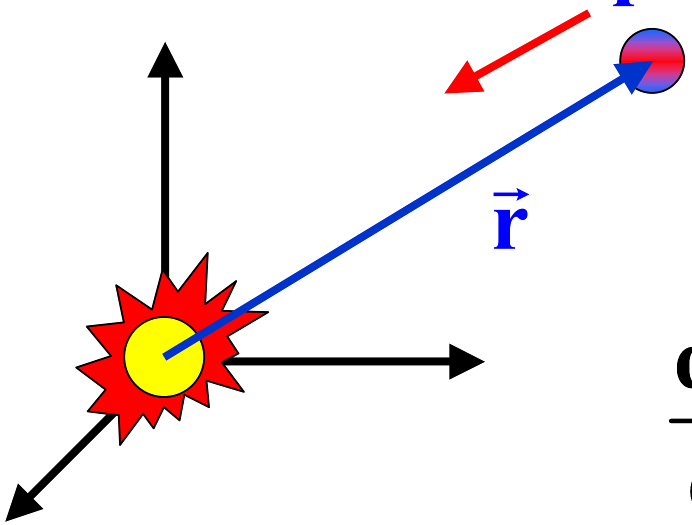
Un esempio notevolissimo: le orbite dei pianeti

$$\vec{F} = -G\frac{mM_\odot}{r^3}\vec{r}$$

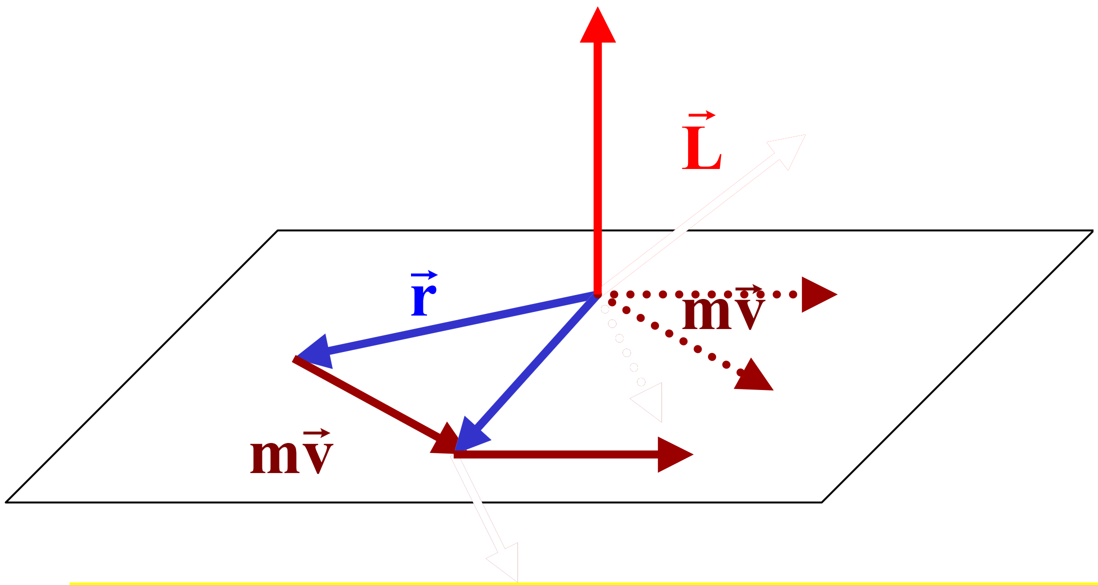


1) Conservazione del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = -\frac{GM_\odot m}{r^3}\vec{r}\times\vec{r} = 0$$

$$\vec{L} = \text{cost}$$

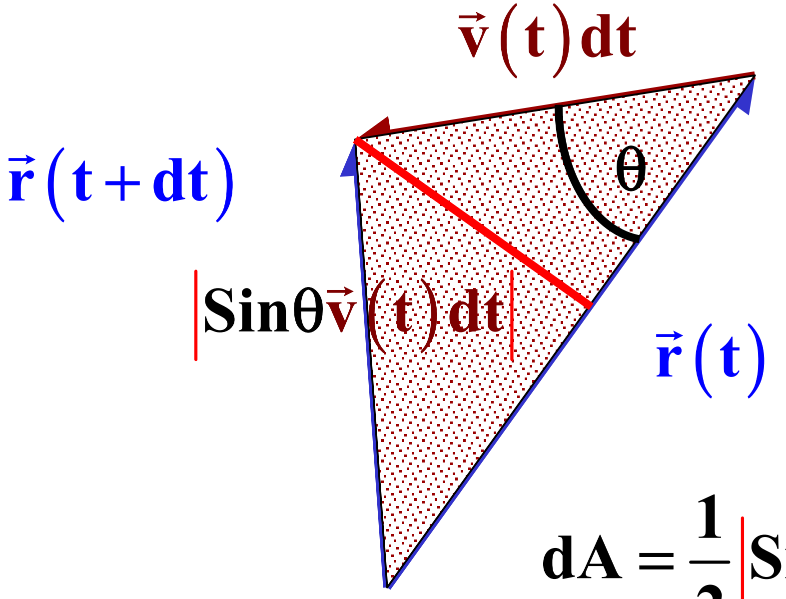
Conseguenze della conservazione del momento angolare



Si!

Il moto avviene in un piano!

Nel piano del moto:



a) l'area del triangolo disegnato dal raggio vettore che si muove

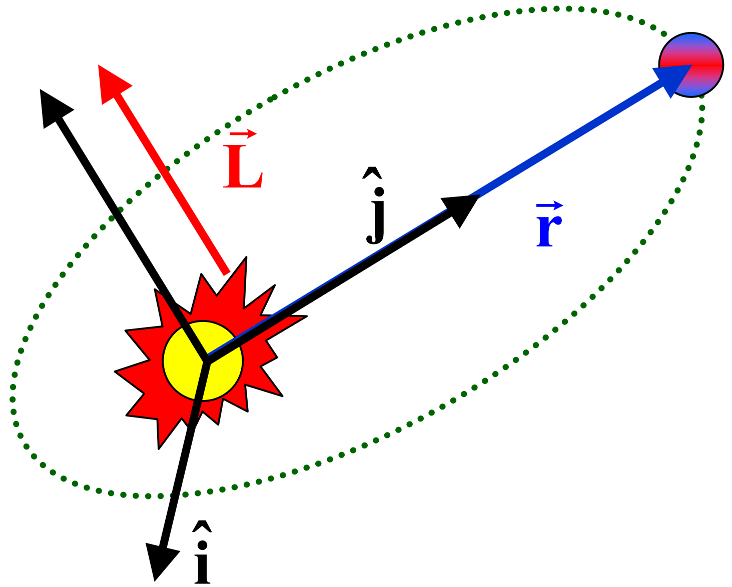
$$dA = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Sin}\theta\,\vec{v}(t)dt\right| \cdot |\vec{r}| \longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Sin}\theta\,\vec{v}(t)\right| \cdot |\vec{r}|$$

b) Il modulo del momento angolare $\quad |\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}||\mathrm{Sin}\theta|$

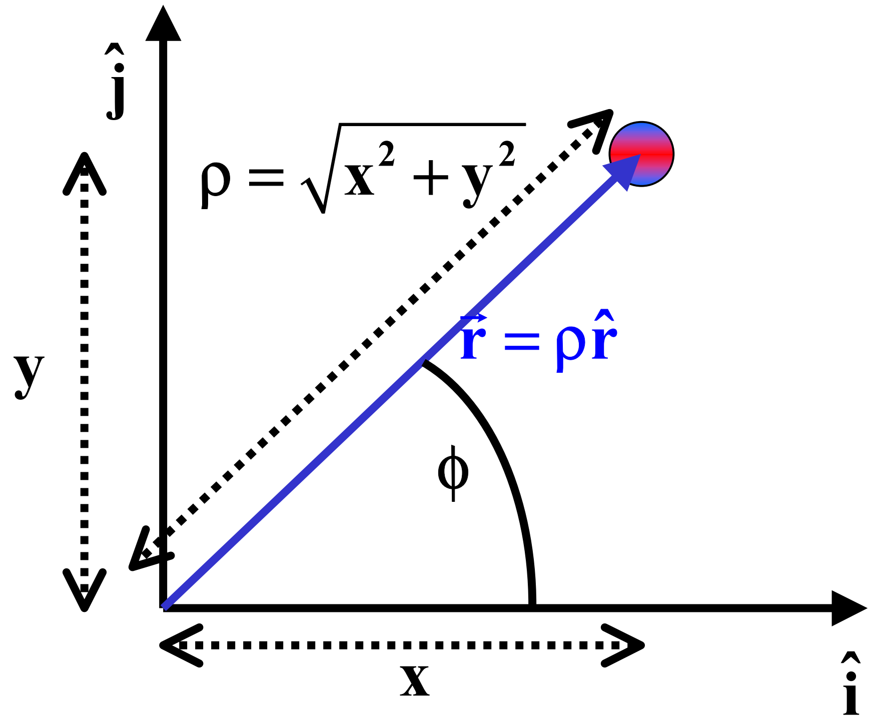
a) + b) → $\quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m} = \mathrm{cost}$

La "velocità areolare è costante (Keplero)

Giriamo gli assi e mettiamo l'orbita nel piano x-y



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\hat{r}) \quad = \frac{d\rho}{dt}\hat{r} + \rho\frac{d\hat{r}}{dt}$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \;= m\vec{r} \times \left(\frac{d\rho}{dt}\hat{r} + \rho\frac{d\hat{r}}{dt}\right) = m\rho\left(\vec{r} \times \frac{d\hat{r}}{dt}\right) \qquad (\vec{r} \times \hat{r} = 0)$$

Università degli Studi di Trento

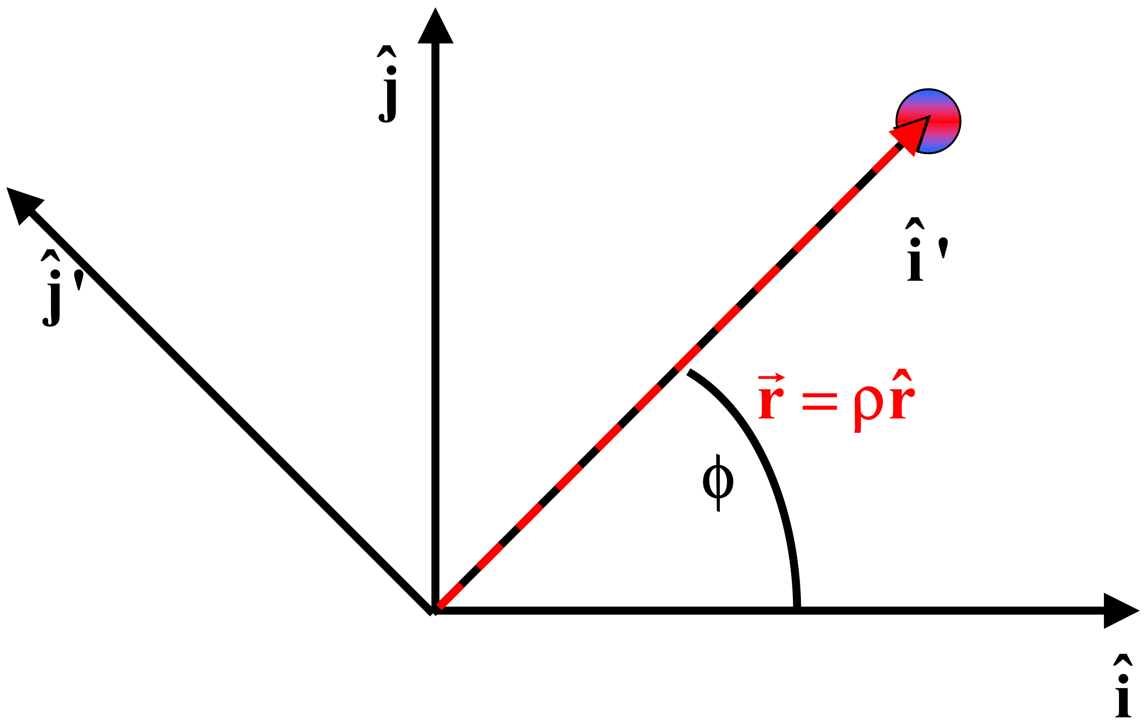
$$\vec{L} = m\rho\left(\vec{r}\times\frac{d\hat{r}}{dt}\right) \xrightarrow[\frac{d\vec{r}}{dt}\perp\hat{r}\quad |\vec{r}|=\rho]{} |\vec{L}| = m\rho^2\left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right|$$

$$\left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right| \to |\hat{r}|\left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right|$$ **(derivata di un vettore di modulo costante)**

$$|\vec{L}| = m\rho^2\left|\frac{d\phi}{dt}\right| \quad \to \quad \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \frac{|\vec{L}|}{m\rho^2}$$

Con i giusti segni $\longrightarrow \dfrac{d\phi}{dt} \equiv \omega = \dfrac{L_z}{m\rho^2}$

Torniamo all'energia potenziale e scegliamo un nuovo sistema di coordinate:



La particella giace sempre sull'asse x che "la insegue"

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{r} \equiv x(t)\hat{i}\,'$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i}\,'$$

E’ un sistema accelerato: forze apparenti

Coriolis: $$2m\vec{v}\times\vec{\Omega}=2m\left(\frac{dx}{dt}\hat{i}'\right)\times\omega\hat{k}'=-2m\omega\frac{dx}{dt}\hat{j}'$$

Tangenziale: $$m\vec{r}\times\frac{d\vec{\Omega}}{dt}=mx(t)\hat{i}'\times\frac{d\omega}{dt}\hat{k}'=-mx(t)\frac{d\omega}{dt}\hat{j}'$$

Non hanno componente lungo x!

Le forze che contano

Centrifuga:

$$m\omega^2(t)x(t)\hat{i}' \longrightarrow = m\frac{L_z^2}{m^2x^4(t)}x(t)\hat{i}' = \frac{L_z^2}{mx^3(t)}\hat{i}'$$

$$\omega(t) = \frac{L_z}{m\rho^2(t)} = \frac{L_z}{mx^2(t)}$$

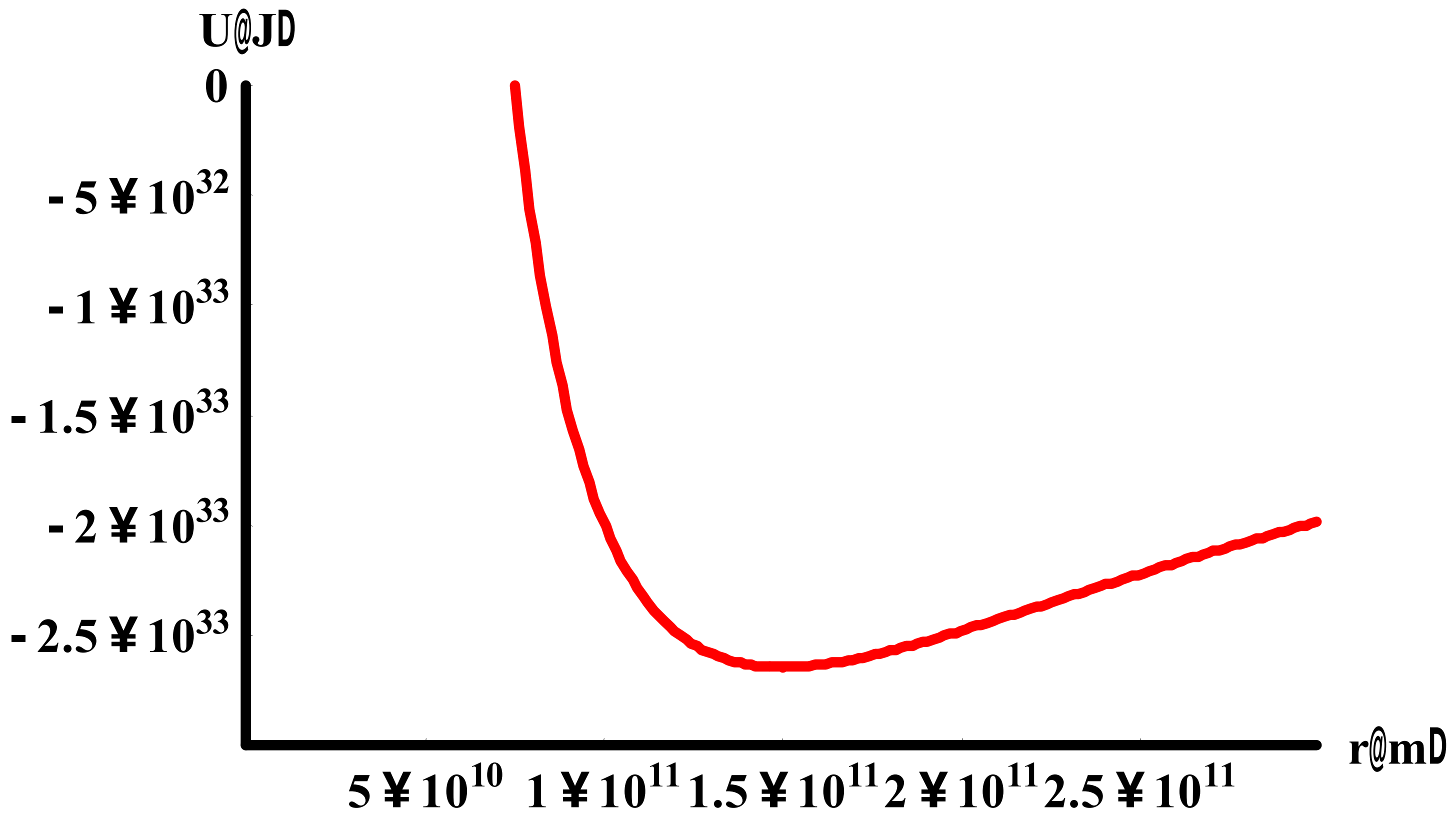
Gravità (forza reale): $$-\frac{GM_\odot m}{\rho^2(t)}\hat{r} = \mp\frac{GM_\odot m}{x^2(t)}\hat{i}'$$

Sono entrambe conservative

$$U(x) = \int_x^\infty \left(\frac{L_z^2}{mx'^3} - \frac{GM_\odot m}{x'^2}\right)dx' = \left(-\frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mx'^2} + \frac{GM_\odot m}{x'}\right)\Bigg|_x^\infty$$

x>0

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mx^2} - \frac{GM_\odot m}{x}\right)$$



Il caso della Terra

$$U = \frac{5.9 \cdot 10^{55}\,\mathrm{Jm}^2}{r^2} - \frac{7.9 \cdot 10^{44}\,\mathrm{Jm}}{r}$$

$$\frac{dU}{dr} = -2\,\frac{5.9 \cdot 10^{55}\,\mathrm{Jm}^2}{r^3} + \frac{7.9 \cdot 10^{44}\,\mathrm{Jm}}{r^2} = 0 \rightarrow r = 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = 2.4\;10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

In generale

$$U = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mx^2} - \frac{GM_\odot m}{x} \qquad \frac{dU}{dx} = -\frac{L_z^2}{mx^3} + \frac{GM_\odot m}{x^2} \qquad \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{3L_z^2}{mx^4} - \frac{2GM_\odot m}{x^3}$$

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_o} = 0 \qquad \rightarrow \frac{L_z^2}{mx_o^3} = \frac{GM_\odot m}{x_o^2} \qquad \rightarrow x_o = \frac{L_z^2}{GM_\odot m^2}$$

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_o} = \frac{1}{x_o}\left[\frac{3L_z^2}{mx_o^3} - \frac{2GM_\odot m}{x_o^2}\right] = \frac{L_z^2}{mx_o^4} > 0 \quad (x_o > 0)$$

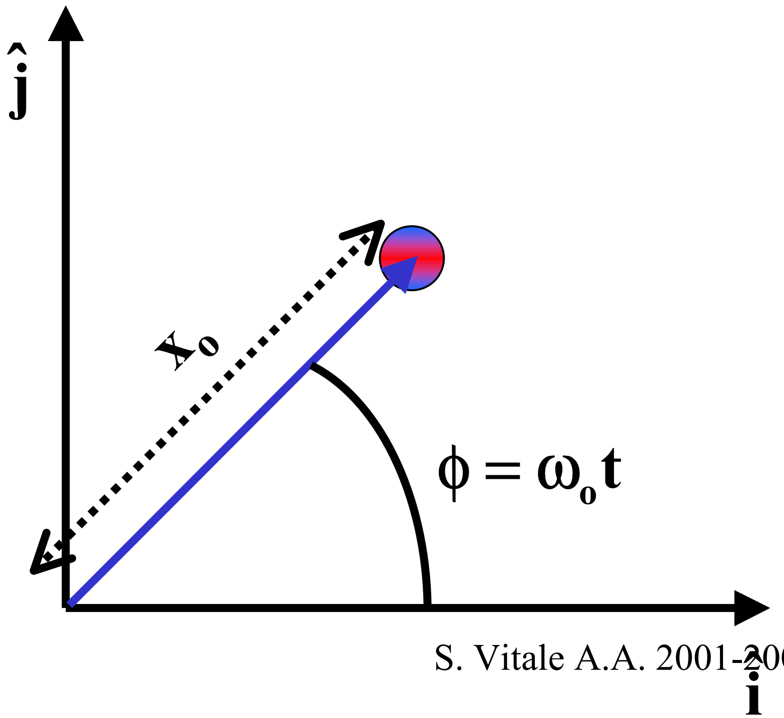
Minimo: equilibrio stabile

Il moto $x(t)=x_o$ è un moto possibile

Che moto è il moto $x = x_o$= costante?

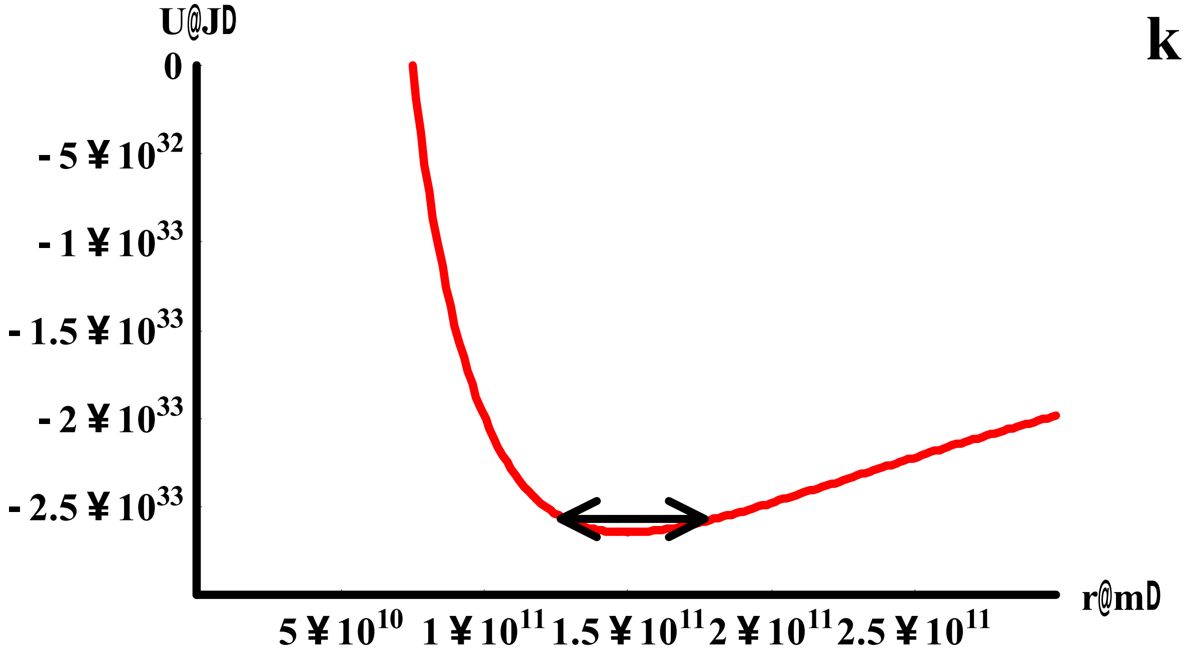
$$\omega(t) = \frac{L_z}{mx^2(t)} \qquad x(t) = x_o \rightarrow \omega(t) = \frac{L_z}{mx_o^2} \qquad \rightarrow \omega(t) = \omega_o = \text{costante}$$

Moto a distanza costante dal centro e a velocità angolare costante: moto circolare uniforme



E se non sono proprio nel minimo?

Ogni minimo è una “molla”



$$k = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_o} = \frac{L_z^2}{m x_o^4}$$

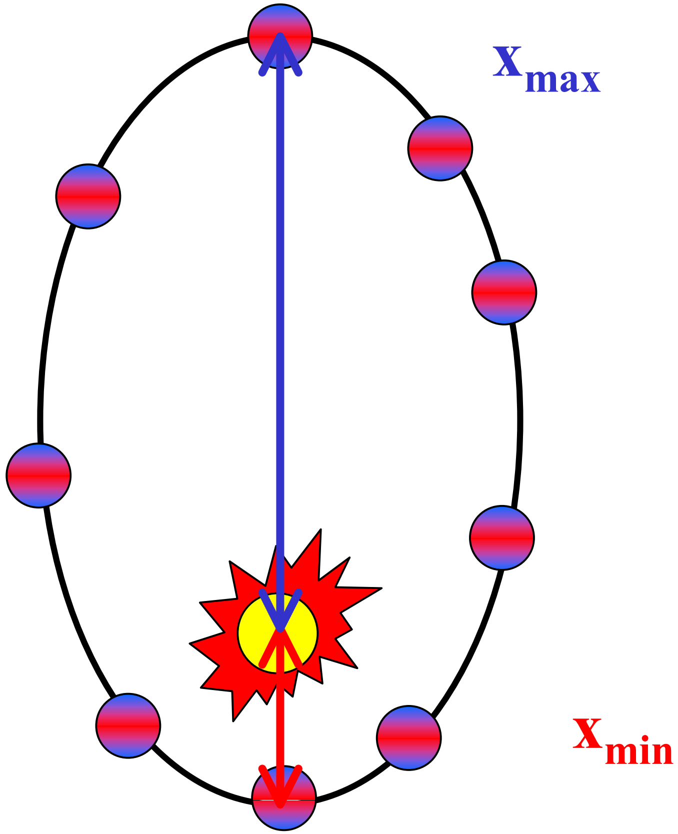
$$L_z = m\omega_o x_o^2$$

$$k = \frac{\cancel{m^2}\omega_o^2 \cancel{x_o^4}}{\cancel{m}\cancel{x_o^4}} = m\omega_o^2$$

Il pianeta “oscilla” con frequenza $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_o$

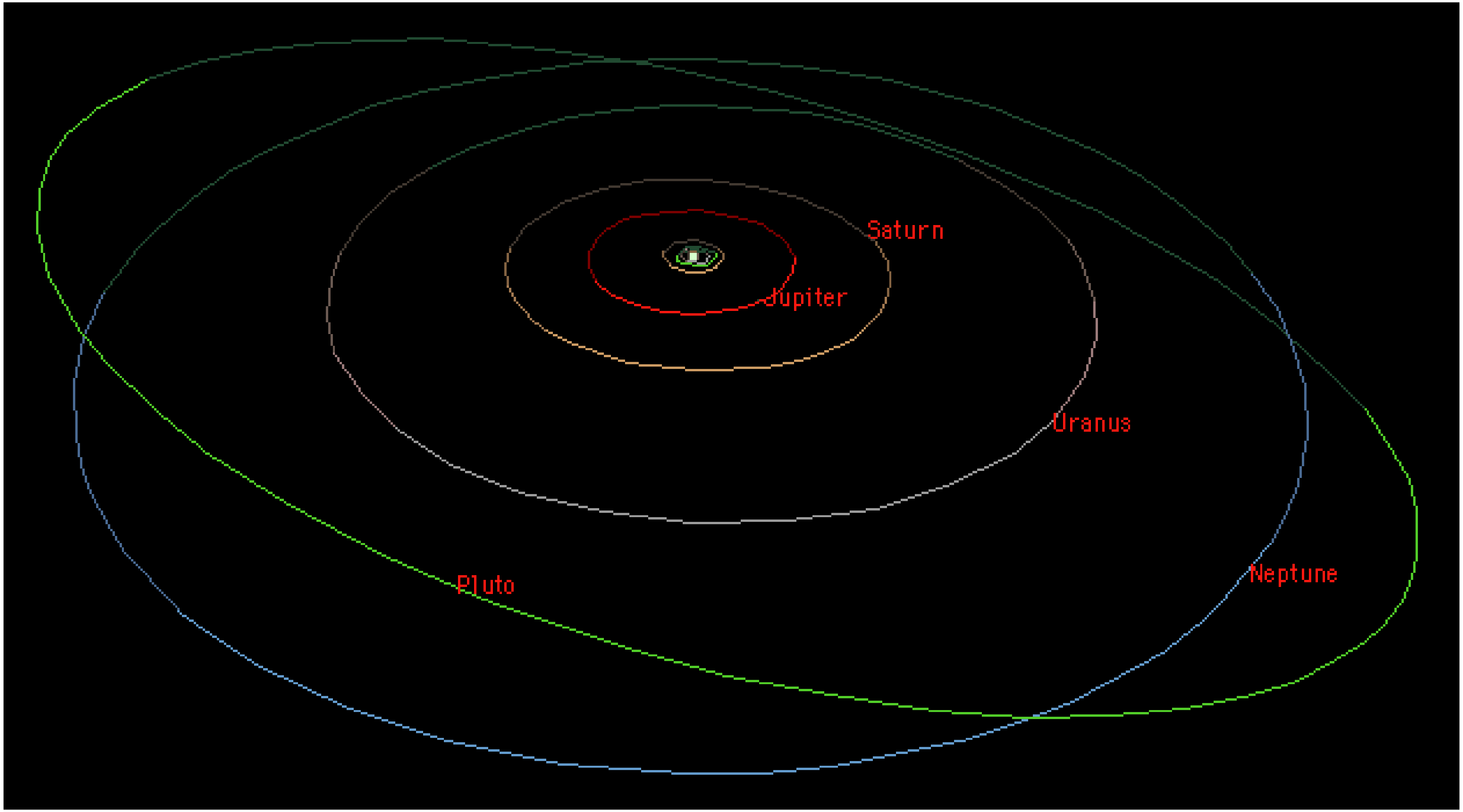
La distanza oscilla con periodo $$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

Il pianeta ruota con periodo $$T_{rot} = \frac{2\pi}{\omega_o} = T_{osc}$$

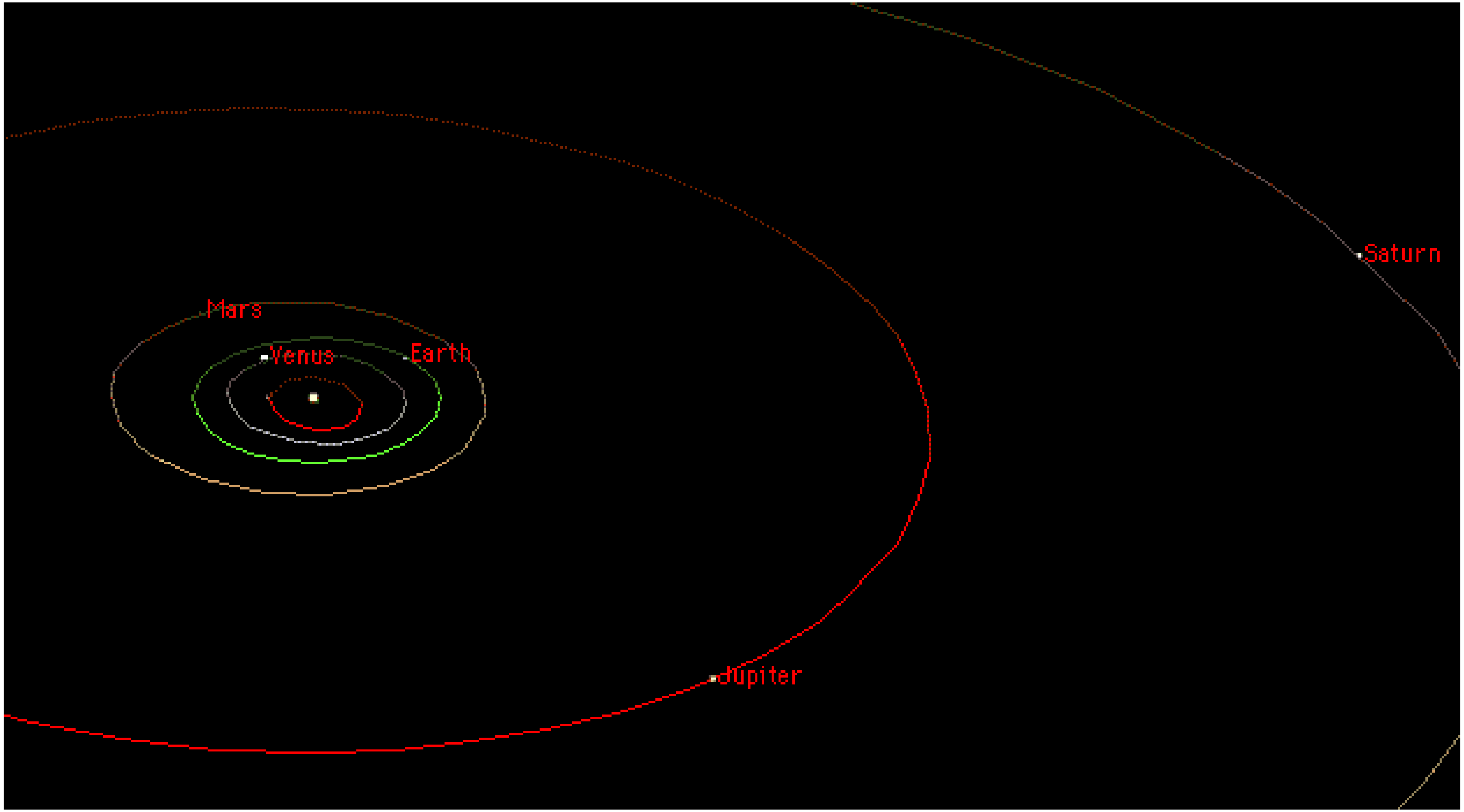


Un'ellisse

(Keplero, Newton)

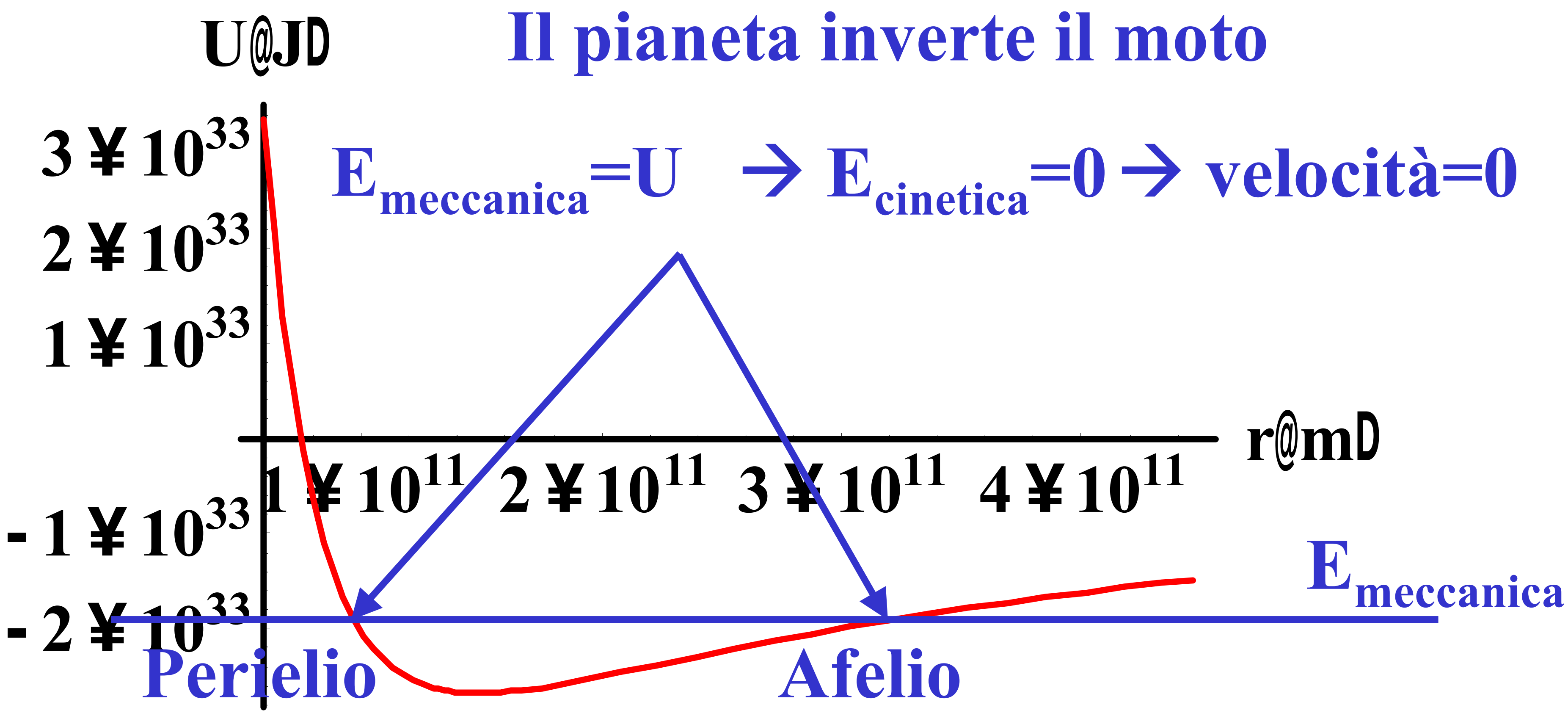


Orbite quasi circolari e tutte nello stesso piano (eccetto Plutone)

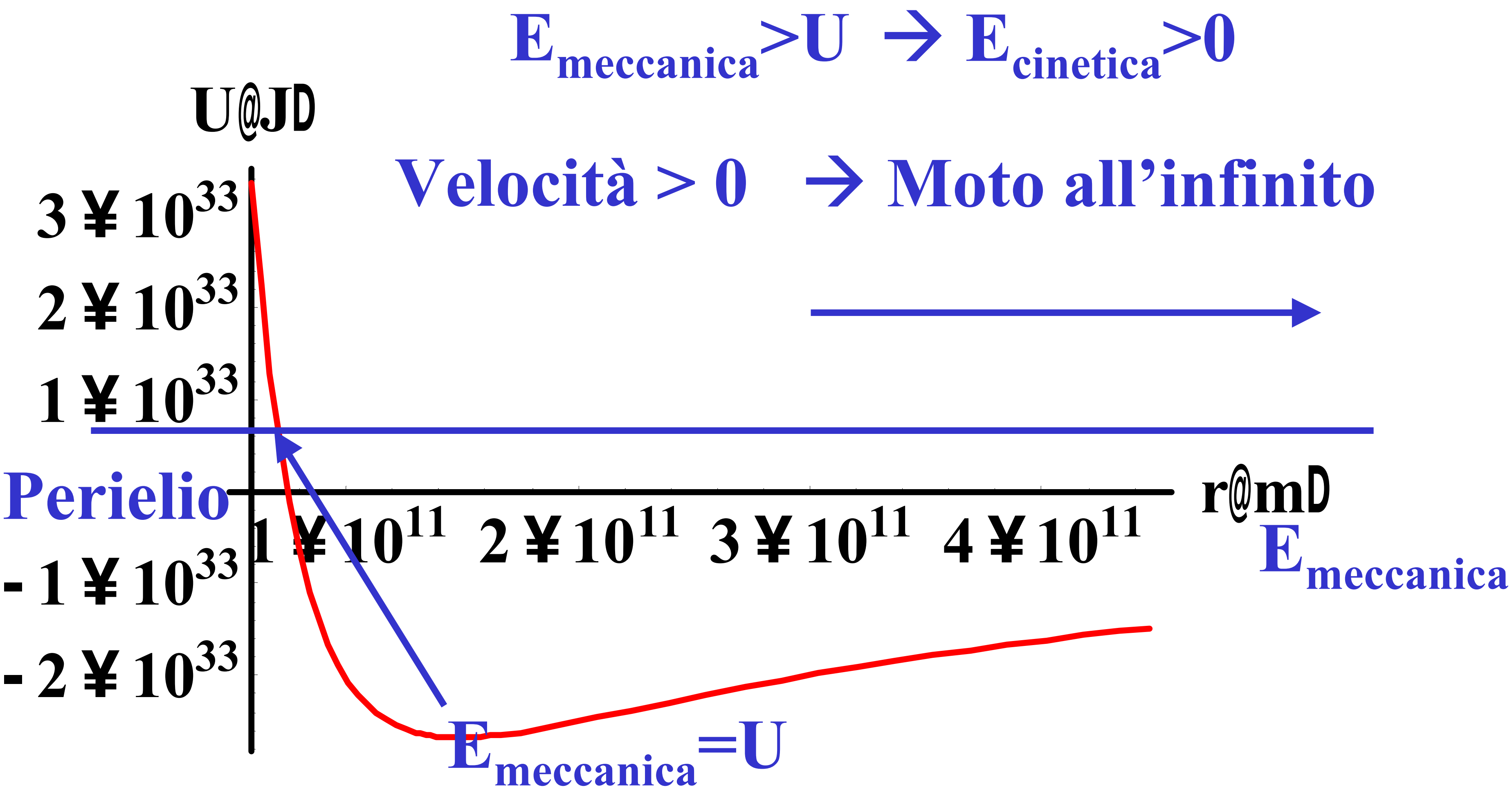


E Mercurio che è molto eccentrico: afelio 70 10^6 km, perielio 46 10^6km

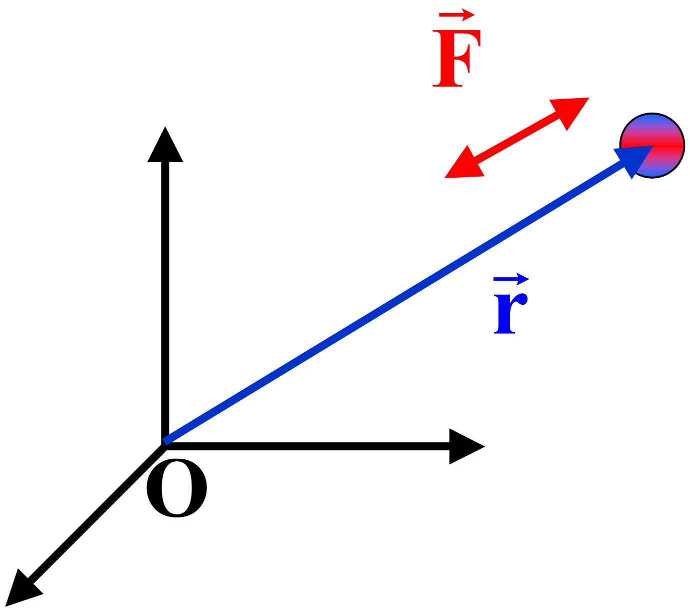
$E_{meccanica}$<0 → Orbita chiusa (ellissi)



$E_{meccanica}>0 \rightarrow$ Orbita aperta (iperbole)



Le forze centrali



$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

1 il momento angolare si conserva

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o = \text{cost}$$

2) L'energia si conserva

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

$$\frac{dL}{dt} = f(r)\hat{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= f(r)\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(dx^2/dt\right) + \left(dy^2/dt\right) + \left(dz^2/dt\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{dr^2}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{r}}\cancel{2r}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = f(r)\frac{dr}{dt}$$

$$L_{A\to B} = \int_{t_a}^{t_b} f\left[r(t)\right]\frac{dr}{dt}dt = \int_{r_a}^{r_b} f(r)dr$$

$$= g(r_b) - g(r_a)$$

$$f(r) = \frac{dg}{dr}$$

Il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale: la forza è conservativa