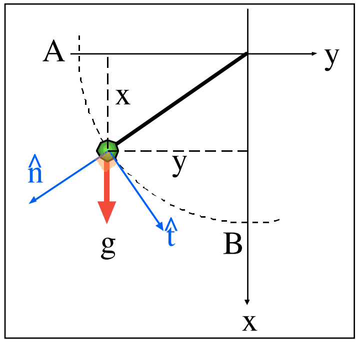
Soluzione:

Le risposte ai quesiti sono poste nella tabella qui a fianco, e le soluzioni sono date di seguito.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
V/F	F	F	V	V	F	F	F	V	F	F

[A]

La pallina si muove da A a B su una traiettoria circolare di raggio R centrata in O. Sebbene lungo la direzione di y la coordinata sia negativa, è comunque sempre vero che il quadrato del modulo del vettore è uguale alla SOMMA dei quadrati delle sue componenti: $R^2=x^2+y^2$.



[B]

$$\hat{n} = -\cos(\theta)\cdot\hat{y} + \sin(\theta)\cdot\hat{x}$$
$$\hat{t} = \sin(\theta)\cdot\hat{y} + \cos(\theta)\cdot\hat{x}$$

Per cui calcolando la derivata del versore tangente (devo tenere presente che l'angolo è funzione del tempo mentre i versori degli assi x,y non lo sono):

$$\frac{d\hat{n}}{dt} = \sin(\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{y} + \cos(\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{x} = \left(\sin(\theta)\cdot\hat{y} + \cos(\theta)\cdot\hat{x}\right)\cdot\dot{\theta} = \hat{t}\cdot\dot{\theta} \quad \textit{dove:} \quad \dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$$

[C]

E'il vettore $\vec{r}$ espresso in coordinate polari

[D]

Rappresenta la definizione della velocità del punto: $\hat{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r})$

Per rispondere alle altre domande si scrivono le equazioni del moto in forma vettoriale. Le forze che agiscono sul punto P sono:

- La forza peso: $m \cdot g \cdot \hat{x}$
- La tensione della fune: $\vec{T} = -T \cdot \hat{n}$ *con T≥ 0*

L'equazione del moto sarà: $m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \vec{T}$

Tenendo presente che:

$$\hat{x} = \sin(\theta) \cdot \hat{n} + \cos(\theta) \cdot \hat{t}$$

$$\hat{y} = -\cos(\theta) \cdot \hat{n} + \sin(\theta) \cdot \hat{t}$$

$$\vec{a} = a_n \cdot \hat{n} + a_t \cdot \hat{t}$$

L'accelerazione vale:

$$\vec{r} = R \cdot \hat{n}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = R \cdot \frac{d\hat{n}}{dt} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{t}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \hat{t} + R \cdot \dot{\theta} \cdot \frac{d\hat{t}}{dt} = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \hat{t} - R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \hat{n}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Sostituendo si ottiene: $m \cdot a_n \cdot \hat{n} + m \cdot a_t \cdot \hat{t} = m \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot \hat{n} + m \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{t} - T \cdot \hat{n}$

E le due equazioni scalari del moto sono:

(a) - Lungo direzione tangente: $m \cdot a_t = m \cdot R \cdot \ddot{\theta} = m \cdot g \cdot \cos(\theta)$

(b) - Lungo la direzione normale: $m \cdot a_n = -m \cdot R \cdot \dot{\theta}^2 = m \cdot g \cdot \sin(\theta) - T$

<u>Osservazione:</u> la stessa coppia di equazioni si trova anche se l'equazione del moto è scomposta lungo gli assi x,y, ma il procedimento è più lungo

Per rispondere ai quesiti mancanti si potrebbe ricavare subito dalla **(a)** la velocità angolare $\dot{\theta}$ in funzione di θ e ricavare poi T(θ) e il modulo a(θ). E' però possibile farlo considerando solo **(a)** e **(b)**:

[E]

Affinché, per ogni valore di θ il modulo dell'accelerazione sia: **(c)** $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = g$
θ(t) dovrebbe essere tale da soddisfare la (a), la (b) e la (c), che non ha invece soluzioni.

Infatti dalla **(a)** e dalla **(c)** segue che: $a_n = R\cdot\dot{\theta}^2 = \pm g\cdot\sin(\theta)$

Se derivo questa espressione rispetto al tempo trovo che : $2R\cdot\ddot{\theta} = \pm g\cdot\cos(\theta)$

Che non ha soluzioni in comune con la **(a)**.

[F]

Per esempio non è vero a *t=0*, dove : $\dot{\theta}(0)=0, \theta(0)=0$ e dalla **(b)** risulta: *T=0*

[G]

C'è anche una componente tangenziale diversa da zero (vedi **(a)**).

[H]

E' stata ricavata in precedenza.

[I]

Vedi **(b)**.

[L]

La velocità angolare $\dot{\theta}$ si può ricavare integrando la (a) dopo averla riscritta nel seguente modo:

$$m\cdot R\frac{d}{dt}(\dot{\theta})\frac{d\theta}{d\theta} = m\cdot g\cdot\cos(\theta)$$

$$m\cdot R\cdot\dot{\theta}\cdot d\dot{\theta} = m\cdot g\cdot\cos(\theta)\cdot d\theta$$

Le condizioni iniziali sono $\dot{\theta}(0)=0, \theta(0)=0$, quindi: $\int_0^{\dot{\theta}} m\cdot R\cdot\dot{\theta}\cdot d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} m\cdot g\cdot\cos(\theta)\cdot d\theta$

da cui si ricava: $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}\sin(\theta)}$.

A questo punto, sostituendo nella **(b)** la $\dot{\theta}$, si trova che: $T = 3m\cdot g\cdot\sin(\theta)$ quindi **[L]** è falsa.

e utilizzando la **(a)** e **(b),** note la *T(θ)* e la $\dot{\theta}$, si trova: $a = g\sqrt{1+3\sin^2(\theta)}$, quindi la **[E]** è falsa.