Dinamica dei sistemi di punti

Un solo punto materiale:

una sola equazione di Newton

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}\left(\vec{r},\ \vec{v},\ t,\ .....\right)$$

Esempio: gravità più attrito più…..

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-mg\hat{k}-\beta\frac{d\vec{r}}{dt}+.....$$

N punti materiali → N equazioni di Newton

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1\left(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_2, \vec{r}_3, \vec{v}_3, t, \ldots\right)$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2\left(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_2, \vec{r}_3, \vec{v}_3, t, \ldots\right)$$

$$m_3 \frac{d^2\vec{r}_3}{dt^2} = \vec{F}_3\left(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_2, \vec{r}_3, \vec{v}_3, t, \ldots\right)$$

La Forza sulla particella m può dipendere da posizione e velocità della particella k

Esempio: attrazione gravitazionale

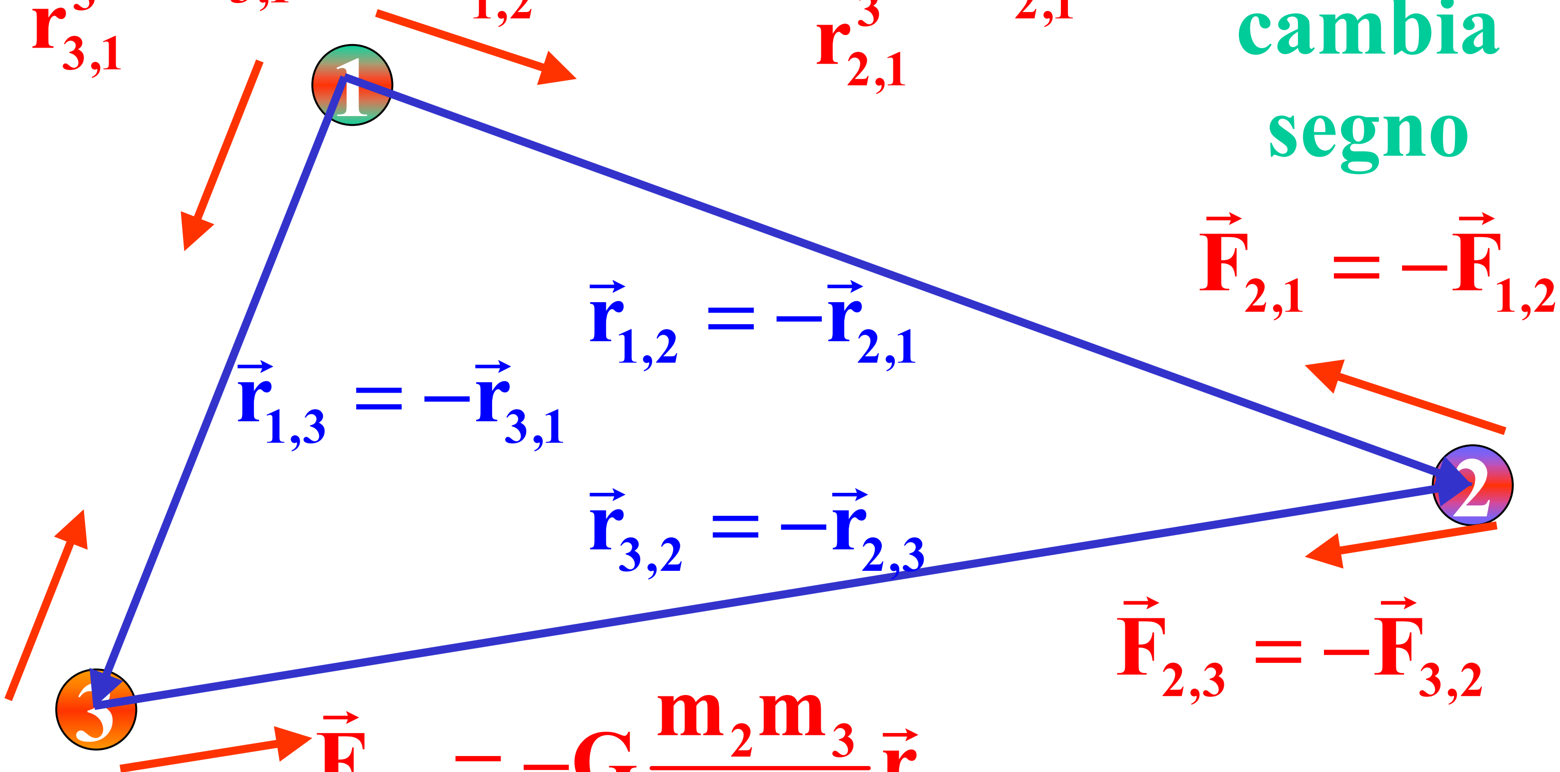
Scambiando

$1 \leftrightarrow 2$

la forza cambia segno

$$\vec{F}_{1,3} = -G\frac{m_1 m_3}{r_{3,1}^3}\vec{r}_{3,1}$$

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{2,1}^3}\vec{r}_{2,1}$$



$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

$$\vec{r}_{1,2} = -\vec{r}_{2,1}$$

$$\vec{r}_{1,3} = -\vec{r}_{3,1}$$

$$\vec{r}_{3,2} = -\vec{r}_{2,3}$$

$$\vec{F}_{3,1} = -\vec{F}_{1,3}$$

$$\vec{F}_{2,3} = -\vec{F}_{3,2}$$

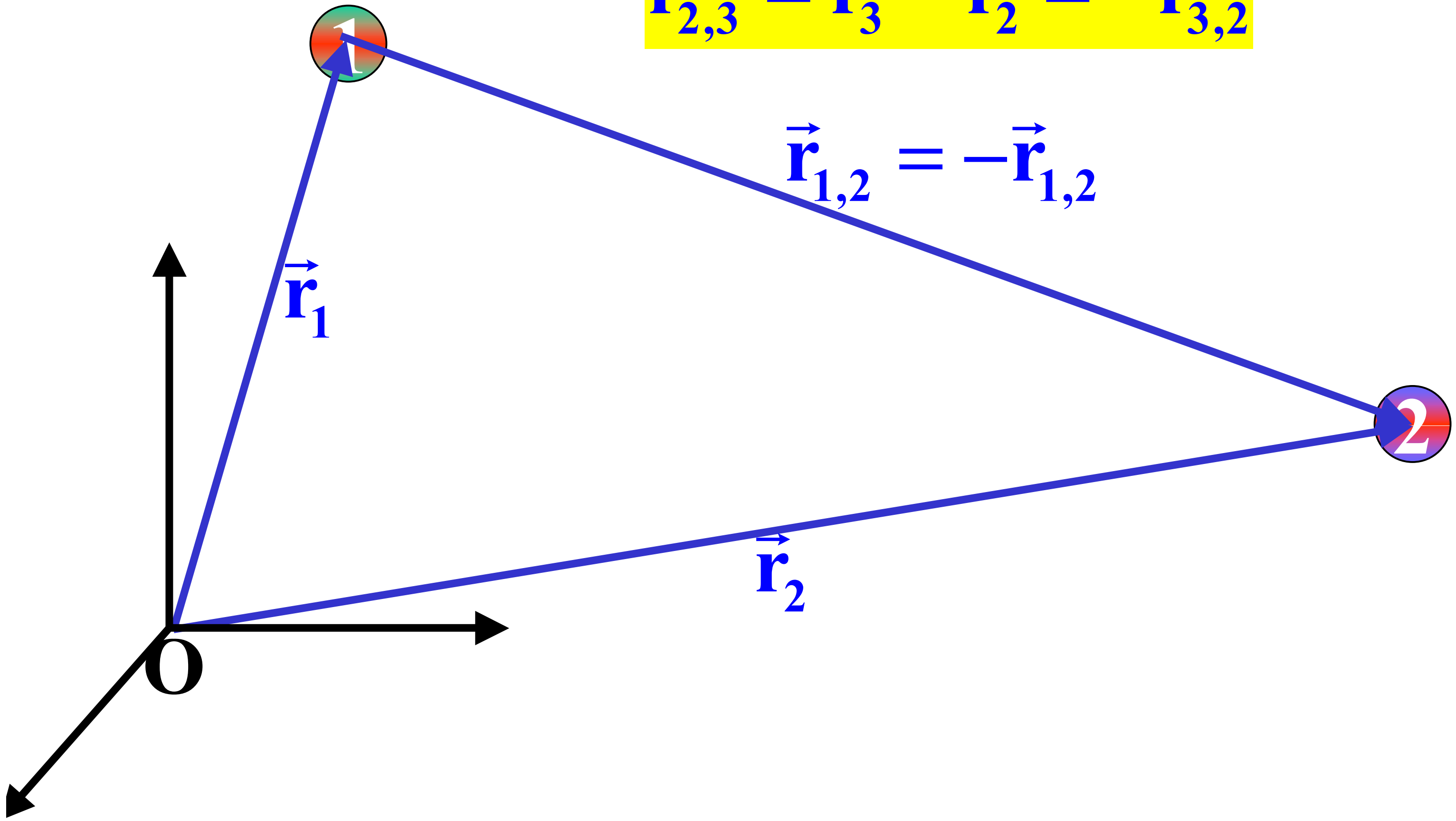
$$\vec{F}_{3,2} = -G\frac{m_2 m_3}{r_{2,3}^3}\vec{r}_{2,3}$$

Nota bene:

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -\vec{r}_{2,1}$$

$$\vec{r}_{1,3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = -\vec{r}_{3,1}$$

$$\vec{r}_{2,3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = -\vec{r}_{3,2}$$



Le N equazioni di Newton formano un sistema:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right) - G\frac{m_1 m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_1-\vec{r}_3\right)$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right) - G\frac{m_2 m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)$$

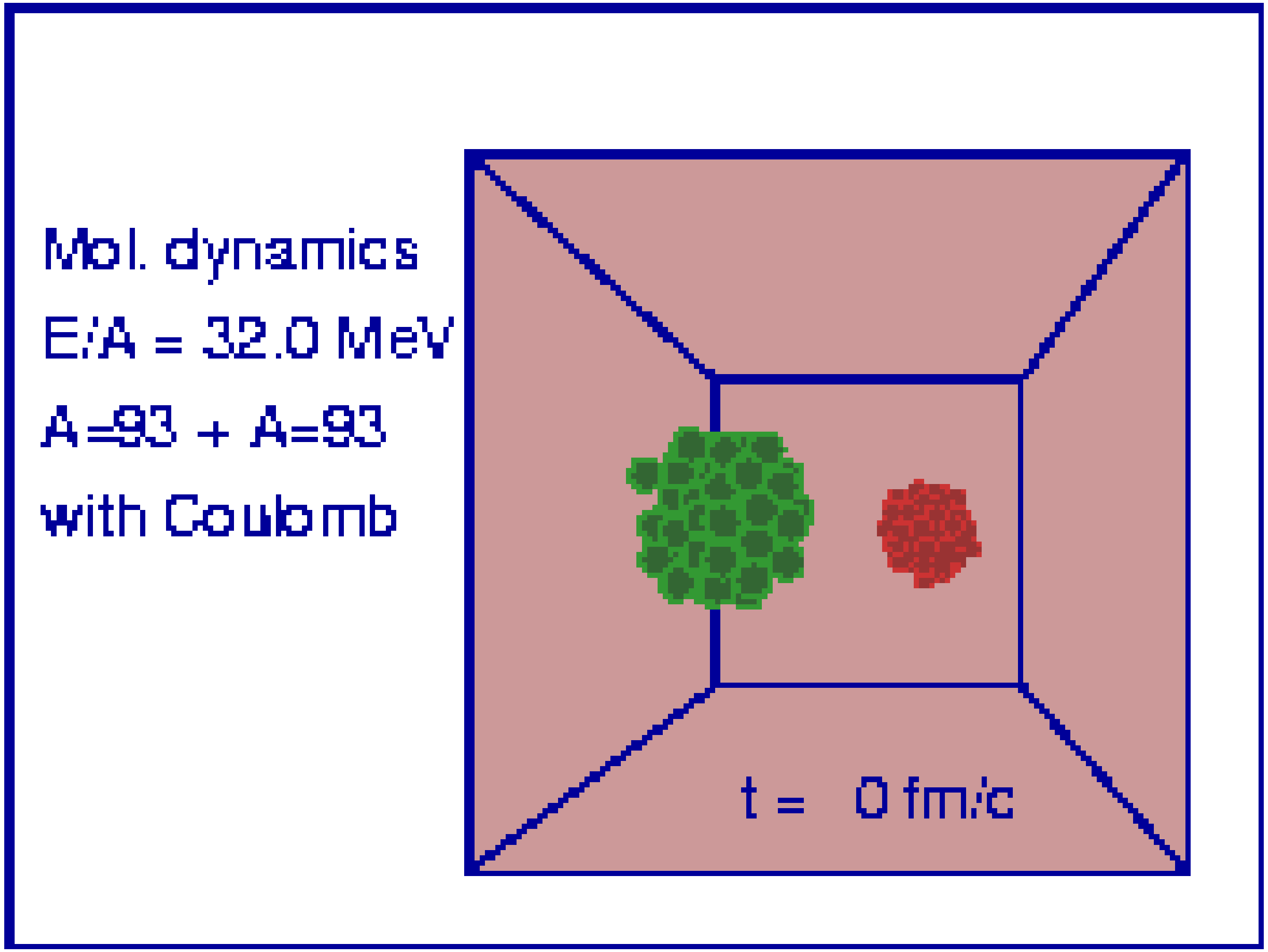
$$m_3 \frac{d^2\vec{r}_3}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_3-\vec{r}_1\right) - G\frac{m_2 m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_3-\vec{r}_2\right)$$

Le tre soluzioni $\vec{r}_1(t),\ \vec{r}_2(t)\ \text{e}\ \vec{r}_3(t)$

vanno trovate simultaneamente

Caso generale con N>2

→soluzioni con il computer (N ª 10000 ok)



Ci sono 2 nuove leggi sperimentali nella dinamica di N particelle

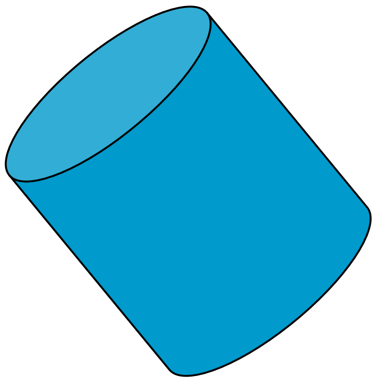
Sono nuove perché

non si ricavano come teoremi dalla legge di Newton

ma si osservano sperimentalmente

Le due nuove leggi (vettoriali) sono sufficienti a risolvere due problemi importanti

Il problema dei due corpi



Il corpo solido

(o “rigido”)

Le nuove leggi riguardano due grandezze "collettive"

La prima:

la quantità di moto totale

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots\dots + m_N\vec{v}_N$$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k \equiv \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k$$

Dalla legge di Newton

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{a}_k$$

Ma: $$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k$$

La derivata della quantità di moto è uguale alla risultante di tutte le forze che agiscono sul sistema di punti

Separiamo:

forze generate dalle particelle del sistema

da

forze generate da corpi che non ne fanno parte

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{ext} + \vec{F}_{k,1} + \vec{F}_{k,2} + \vec{F}_{k,m\neq k} + \ldots$$

(Le particelle non esercitano forze su sè stesse)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{ext} + \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{m\neq k} \vec{F}_{k,m} \right) \equiv \vec{F}_{tot}^{ext} + \vec{F}_{tot}^{int}$$

La prima legge cardinale della dinamica:

se $\vec{F}_{tot}^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

Ma poiché $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{tot}^{ext} + \vec{F}_{tot}^{int}$

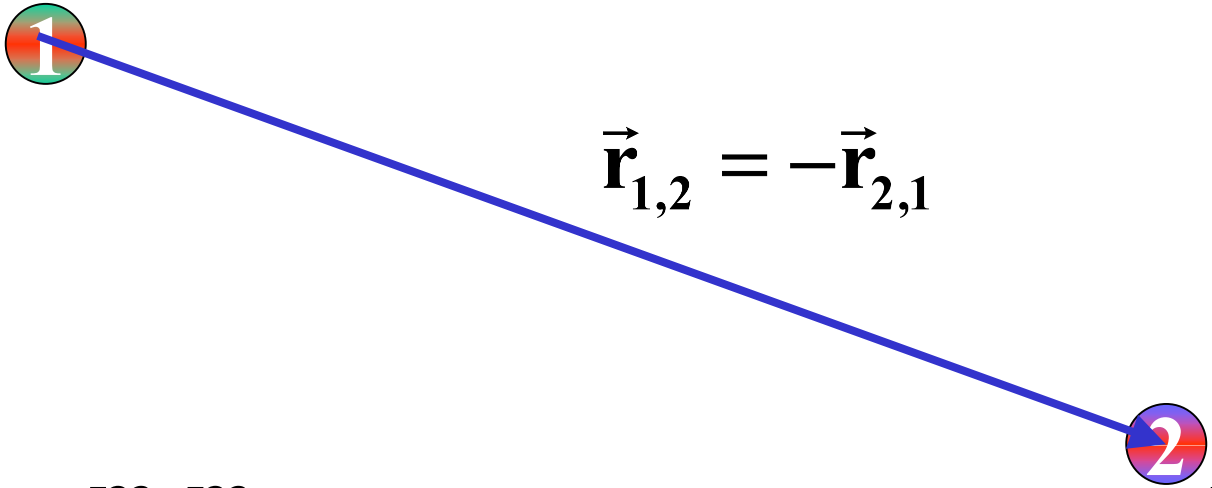
$$\boxed{\vec{F}_{tot}^{int} = 0}$$

ossia

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{tot}^{ext}}$$

Esempi:

Gravità come forza interna:



$$\vec{r}_{1,2} = -\vec{r}_{2,1}$$

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{2,1}^3}\vec{r}_{2,1} \qquad 1 \leftarrow\rightarrow 2 \qquad \vec{F}_{2,1} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^3}\vec{r}_{1,2}$$

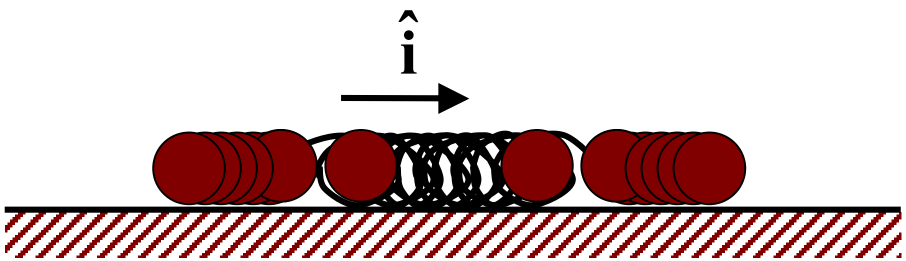
$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \qquad \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = \vec{F}_{tot}^{int} = 0$$

La conservazione della quantità di moto totale

$$\vec{F}^{ext}_{tot} = 0 \quad \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \vec{P} = \text{cos tan te}$$

Un esempio

L' "esplosione" di un sistema di (due) particelle



$$\vec{F}^{int}_{tot} = \vec{F}_{molla}$$

$$\vec{F}^{ext}_{tot} = 0$$

$$\vec{F}^{ext}_{tot} = 0 \quad \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \vec{P} = \text{costante}$$

Nel sistema del laboratorio

1) Prima dello sgancio

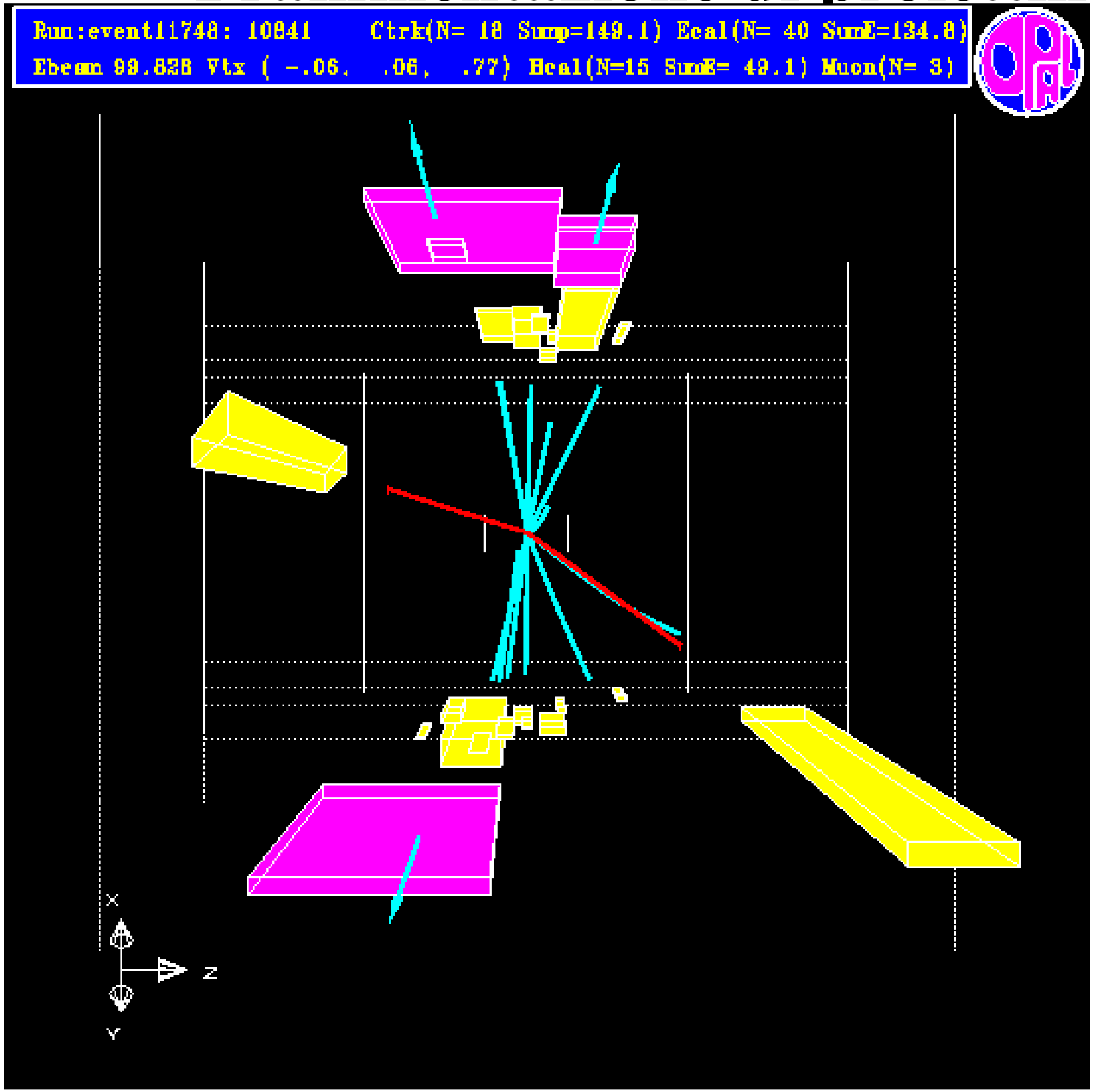
$$m_1\vec{v}_1 = 0 \quad m_2\vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{P} \quad = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad = 0$$

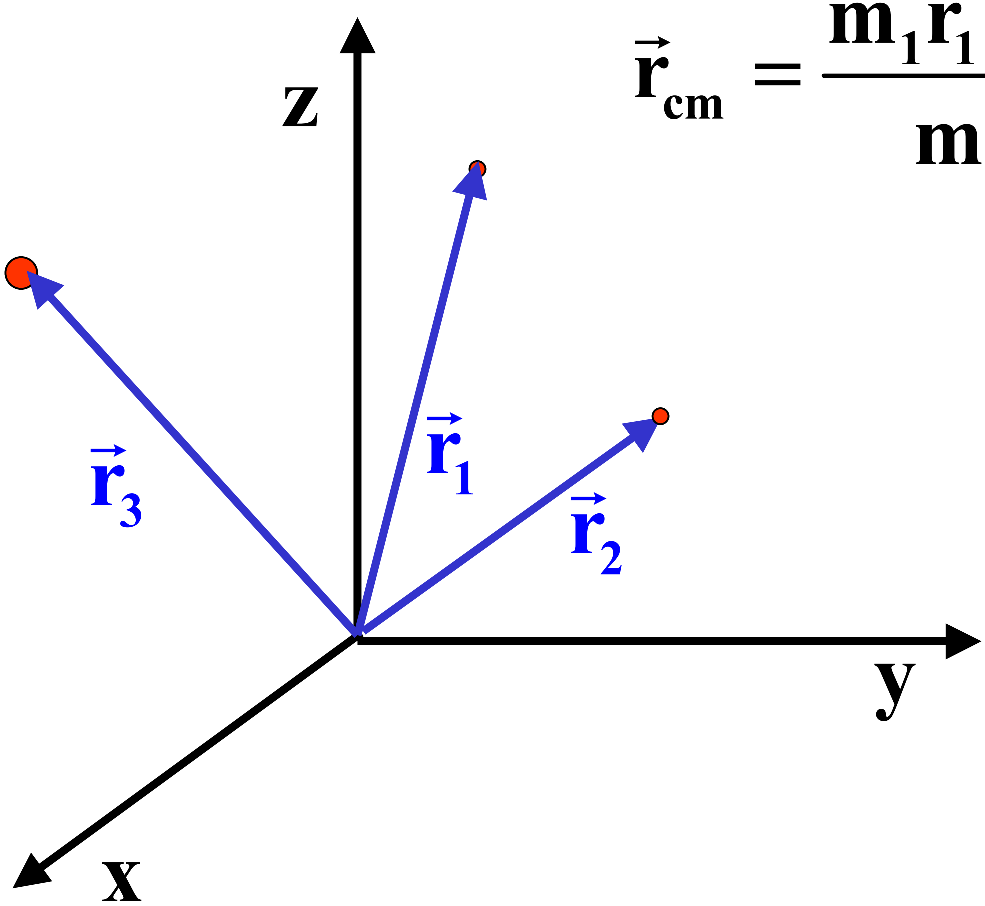
2)Dopo lo sgancio:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \quad \rightarrow m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2$$

Frammentazione di proiettili subatomici

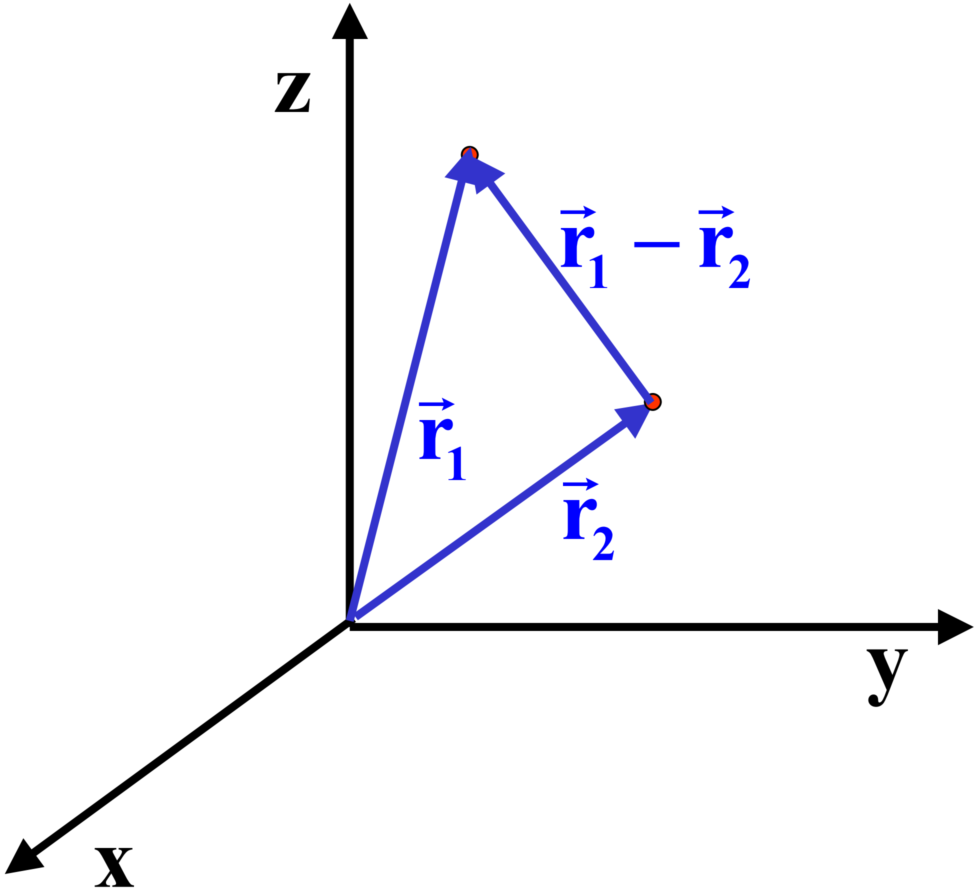


Un nuovo concetto:
il centro di massa di un sistema di punti



$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

Dove si trova il centro di massa?



Il caso di due particelle:

$$\vec{r}_{cm,1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_{cm}$$

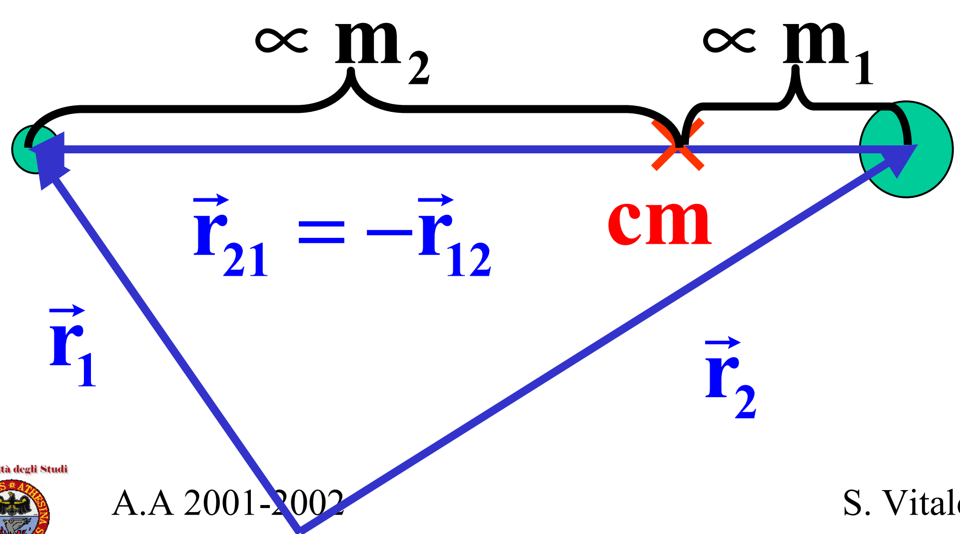
$$= \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{\vec{r}_1(\cancel{m_1} + m_2) - (\cancel{m_1\vec{r}_1} + m_2\vec{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Ovviamente se: $1 \leftrightarrow 2$

$$\vec{r}_{cm,1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \longrightarrow \vec{r}_{cm,2} = \frac{m_1}{m_2 + m_1}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$$

$$= -\frac{m_1}{m_2 + m_1}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \rightarrow \vec{r}_{cm,1} \parallel \vec{r}_{cm,2} \parallel \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \equiv \vec{r}_{21}$$



$$\frac{\left|\vec{r}_{cm,1}\right|}{\left|\vec{r}_{cm,2}\right|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Il centro di massa di due particelle giace lungo la congiungente fra le due particelle a distanza da ciascuna particella proporzionale alla massa dell'altra

Caso generale a N particelle

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \sum_{k=2}^{N} m_k \vec{r}_k}{m_1 + \sum_{k=2}^{N} m_k}$$

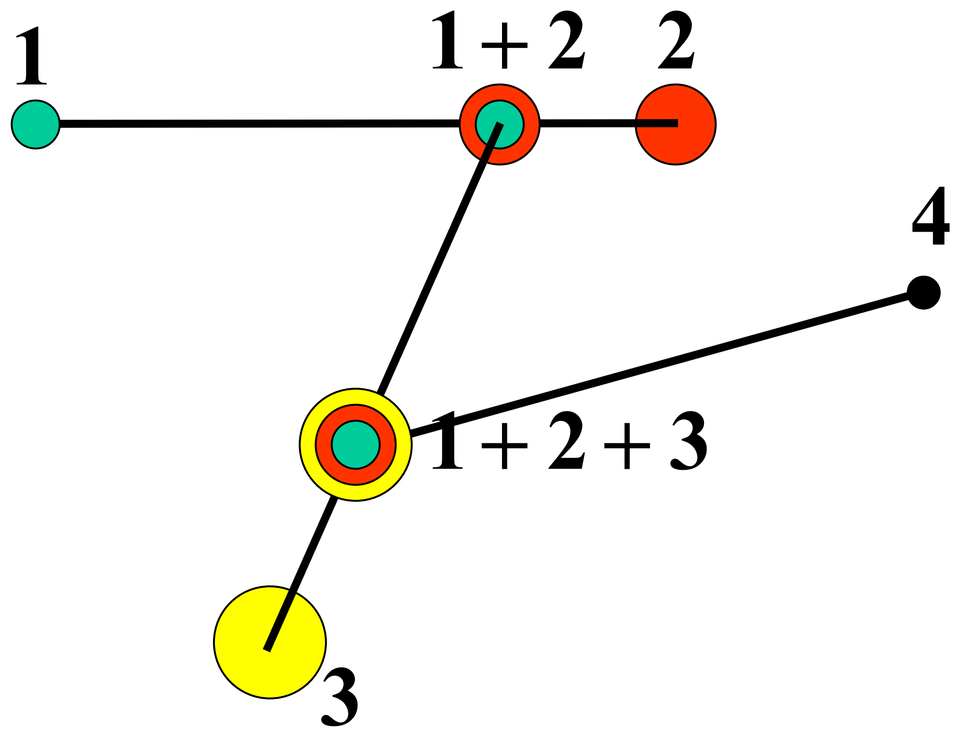
Posizione cm sistema particelle 2,N

$$= \frac{m_1 \vec{r}_1 + \sum_{k=2}^{N} m_k \left(\sum_{k=2}^{N} m_k \vec{r}_k \Big/ \sum_{k=2}^{N} m_k \right)}{m_1 + \sum_{k=2}^{N} m_k}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm,N} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + M_{(2,N)} \vec{r}_{cm,(2,N)}}{m_1 + M_{(2,N)}}}$$

Massa sistema particelle 2,N

Il centro di massa di N particelle si può calcolare così:



Etc., etc.,….

La quantità di moto totale e la velocità del centro di massa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} \longrightarrow \vec{v}_{cm} \equiv \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k\right)}{\sum_{k=1}^{N} m_k}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}}{\sum_{k=1}^{N} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} = \frac{\vec{P}}{M}$$

$$M \equiv \sum_{k=1}^{N} m_k$$

Massa totale

O anche

$$M\vec{v}_{cm} = \vec{P}$$

Da cui la prima legge cardinale diventa

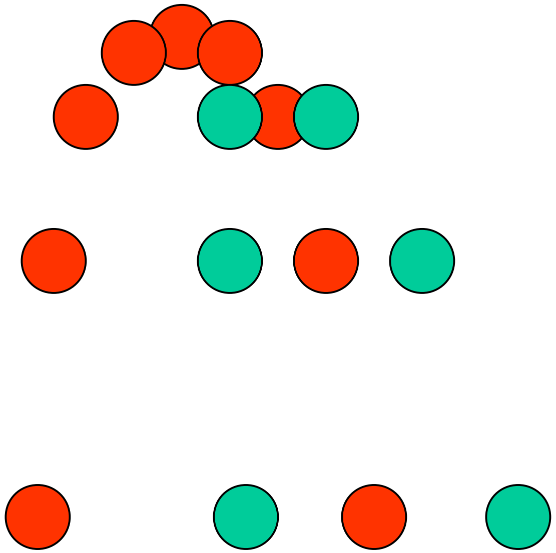
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F}^{ext}_{tot}$$

Il cm si muove come un punto di massa M soggetto ad una forza $\vec{F}^{ext}_{tot}$

Un esempio: frammentazione di un proiettile

Prima della frammentazione: $\cancel{M}\vec{a}_{\text{proiettile}} = -\cancel{M}g\hat{k}$

Dopo la frammentazione in N frammenti



$$\vec{F}^{ext}_{tot} = -m_1 g\hat{k} - m_2 g\hat{k} - m_3 g\hat{k} \ldots$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} m_j g\hat{k} = -g\hat{k}\sum_{j=1}^{N} m_j = -Mg\hat{k}$$

$$\cancel{M}\vec{a}_{cm} = -\cancel{M}g\hat{k}$$

Il centro di massa continua il moto originario del proiettile