Soluzione esercizio carrello

Dati del problema:
coefficienti di attrito statico e dinamico

$\mu_s = 0.3 \qquad \mu_{din} = 0.15$

$g = 9.81 \dfrac{m}{s^2}$

distanza che deve percorere la massa: $L = 1m$
altezza carrello: $h = 2m$

Figura:1

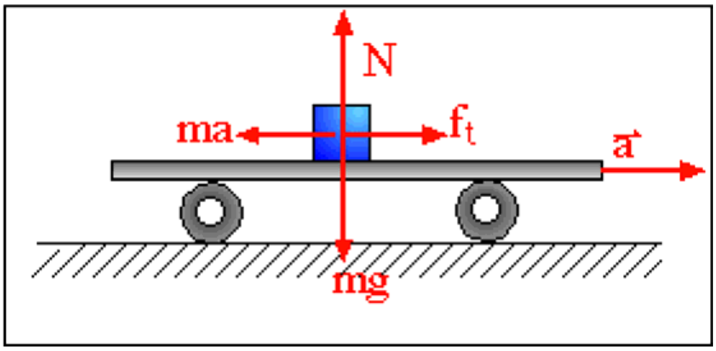
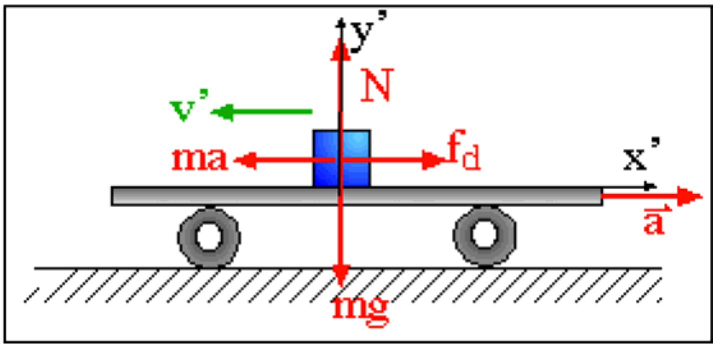


Figura:2



Risposta a)

Inizialmente il carrello accelera in modo costante con valore pari a a_0:
Come primo quesito si desidera sapere qual é il valore massimo dell'accelerazione a_0 per cui rimane fermo il blocco.
Nel sistema di riferimento non inerziale, le forze agenti sono (vedi Fig.1):

$-m\,a_0$ *forze fittizie*

forze reali:

f_t *forza d'attrito*

N *reazione normale del vagone sul blocco*

$-m\,g$ *forza peso*

La risultante dovrà essere uguale a:

$-m\,\bar{a}'$ *dove* $\bar{a}'$ *é l'accelerazione rispetto al vagone:*

quindi, nel caso in cui non ci sia moto relativo (a'=0), le equazioni del moto lungo x' e y' sono:

$f_t - m\,a_0 = 0$

$N - m\,g = 0 \qquad N = g\,m$

visto che $f_t \le \mu_s N = \mu_s N$, si ottiene che l'accelerazione massima per cui non si muove il blocco posto sopra il carrello é data da:

$a_0 = \mu_s g$ *da cui :* $a_0 = 2.9\frac{m}{(s)^2}$

Si può arrivare allo stesso risultato anche ragionando nel sistema di riferimento inerziale (rispetto al terreno), le forze agenti sul blocco sono
(si consideri che il blocco si muove solidale al carrello):

forze reali:

f_t *forza d'attrito*

N *reazione normale del vagone sul blocco*

$-m\,g$ *forza peso*

La risultante dovrà essere uguale a:

$m\,a_0$ *dove* a_0 *é 'accelerazione assoluta del blocco (uguale a quella del vagone):*

Le equazioni diventano:

$f_t = m\,a_0$ *in altre parole ora* $m\,a_0$ *non é una forza apparente*

$N - m\,g = 0$ $N = g\,m$

e chiedendo che $f_t \le \mu_s N$ si ottiene lo stesso risultato.

Risposta b)

Nel caso in cui $a_0 = 5\frac{m}{(s)^2}$, c'é moto relativo tra massa e carrello (vedi risposta precedente). Ci si chiede quanto tempo impiega il blocco per cadere dal carrello. Si scrivono le equazioni del moto nel sistema di riferimento non inerziale (coordinate x' y', vedi fig.2). Il blocco si muoverà con velocità v' rispetto al carrello :

$N - m\,g = 0$ *lungo y'*

$m\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x'\right) = \mu_{din} N - a_0 m$ *lungo x'*

sostituendo: $N = g\,m$

si ricava l'accelerazione relativa del blocco rispetto al carrello:

$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x' = -a_0 + g\,\mu_{din}$ in numeri: $\frac{d^2}{dt^2}x' = -3.5\frac{m}{(s)^2}$

Integrando l'equazione precedente nel tempo con le seguenti condizioni:

$\frac{\partial}{\partial t}x'(t = 0) = 0, \quad x'(t = 0) = 0$

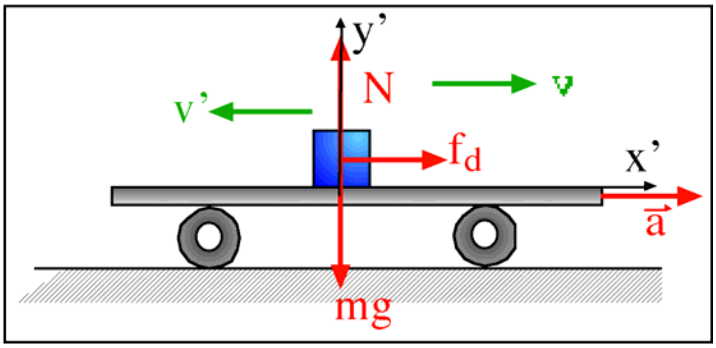
Si ricava la legge oraria rispetto al vagone:

$$x' = \tfrac{1}{2}\left(-a_0 + \mu_{din}\,g\right)t^2$$

imponendo : $x'(t = T_f) = \frac{L}{2}$, si ricava il tempo impiegato per arrivare alla fine del carrello:

$T_f = 2.4s$

Proviamo a ragionare nel sistema di riferimento inerziale.
Nella figura seguente sono indicate le forze sul blocco viste ne sistema di riferimento inerziale.v' é la velocità del blocco nel sistema di riferimento del carrello, v é la velocità nel sistema di riferimento inerziale.



Nel sistema di riferimento inerziale le equazioni diventano:

$$\mu_{din} N = m\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x\right)$$

$$N = m\,g$$

Integrando due volte, e imponendo le condizioni iniziali (Oxy coincide con O'x'y' e t =0):

$x(t = 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}x(t = 0) = 0$, si ottiene

$$x = \frac{1}{2}\mu_{din}\, g\, t^2$$ *(eq.1) legge del oraria del blocco*

Per la coordinata del punto A del carrello si ottiene invece:

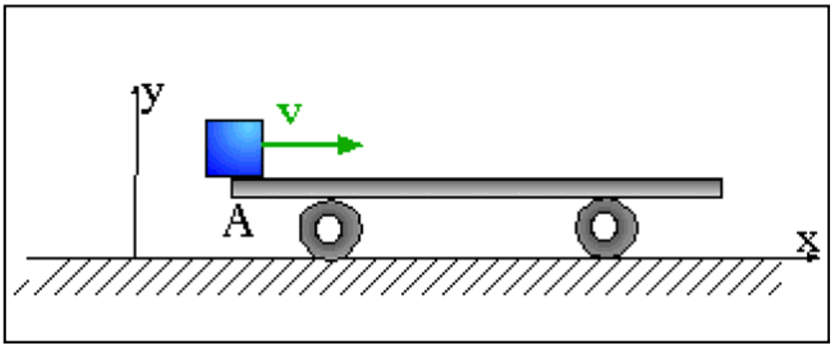
$$x_A = \frac{1}{2}a_0 t^2 - \frac{L}{2}$$

Quando $x = x_A$ il blocco cade:

$$T_f = \left([-1]\frac{L}{-a_0 + \mu_{din}\, g}\right)^{\frac{1}{2}}$$ da cui in numeri $T_f = 2.4s$

Risposta c)

Infine, per calcolare a quale distanza cade il blocco rispetto alla posizione che assume per t = 0, nel sistema inerziale si calcolano le condizioni iniziali in cui comincia a cadere dal carrello:



$$x_{cade} = \frac{1}{2}\mu_{din}\, T_f^{\,2}\, g$$ *spazio percorso fino all'istante in cui comincia a cadere*
$T_f = 2.4s$

da cui: $x_{cade} = 4.2m$

$$v_{cade} = \mu_{din}\, T_f\, g$$ *velocità all'istante in cui comincia a cadere*

da cui: $v_{cade} = 3.5\frac{m}{s}$

Date le condizioni iniziali sopra calcolate il corpo segue un moto parabolico :

$x_{tot} = x_{cade} + s$

e prima di toccare il terreno percorrerà lungo x un tratto s pari a:

$$s = v_{cade}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Infine si ricava: $x_{tot} = 6.4m$