

Alcune Osservazioni sulla Legge di Newton

1) Dimensioni fisiche:

Massa: grandezza fondamentale

Unità SI kilogrammo (kg)

$$[F] = [m][a] = [m][l][t]^{-2}$$

$$\text{SI} \rightarrow F: \text{kg} \times \text{m} \times \text{s}^{-2} \rightarrow \text{N (Newton)}$$

2) Legge di Newton e Relatività: Trasformazione di Galileo:

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_P(t) - \vec{v}_0$$

$$\vec{a}_P(t) = \frac{d\vec{v}_P(t)}{dt} = \frac{d(\vec{v}_P(t) + \vec{v}_0)}{dt} = \frac{d\vec{v}_P(t)}{dt} = \vec{a}_P(t)$$

L'accelerazione è la stessa in tutti i sistemi inerziali

Legge di Newton vale in tutti i sistemi inerziali

→ Forza uguale in tutti i sistemi inerziali

(invariante per trasformazioni di Galileo)

$$\vec{F} = m\vec{a}_P(t) = m\vec{a}_P(t) = \vec{F}$$

3) Il Catalogo: le forze fondamentali

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{21}|^2} \vec{r}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \text{Forza gravitazionale}$$


$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Forza elettromagnetica (di Lorentz)

\vec{E} = Campo elettrico; \vec{B} = Campo magnetico

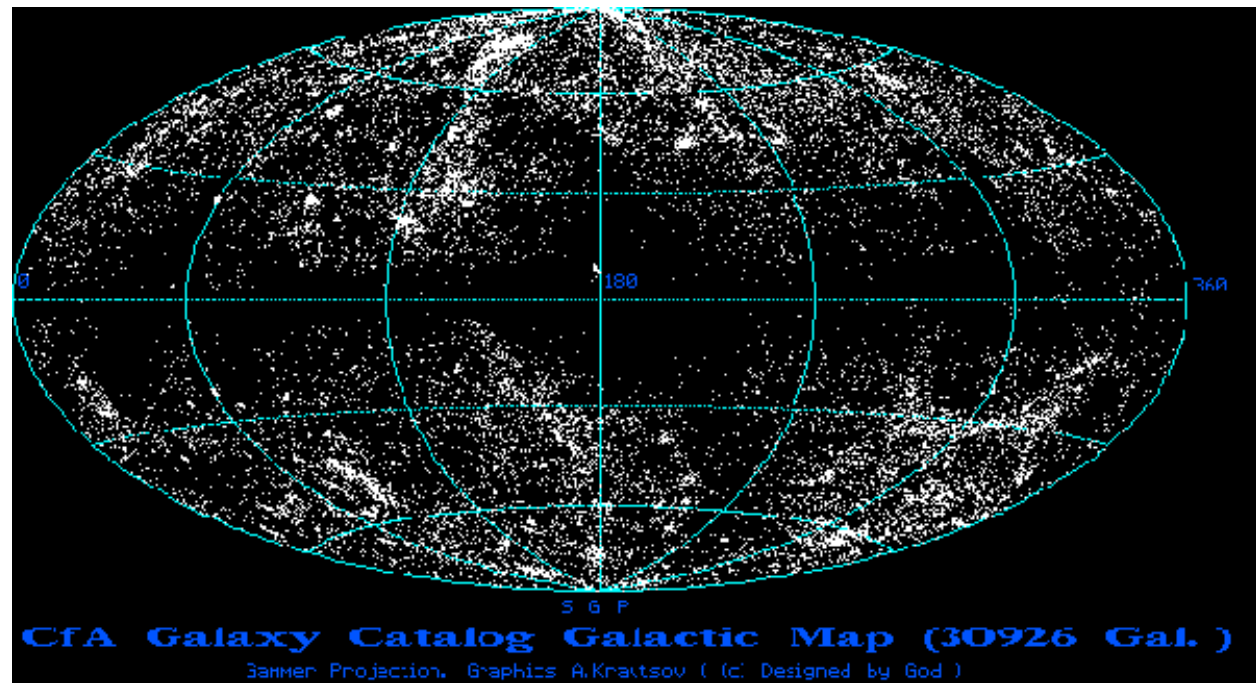
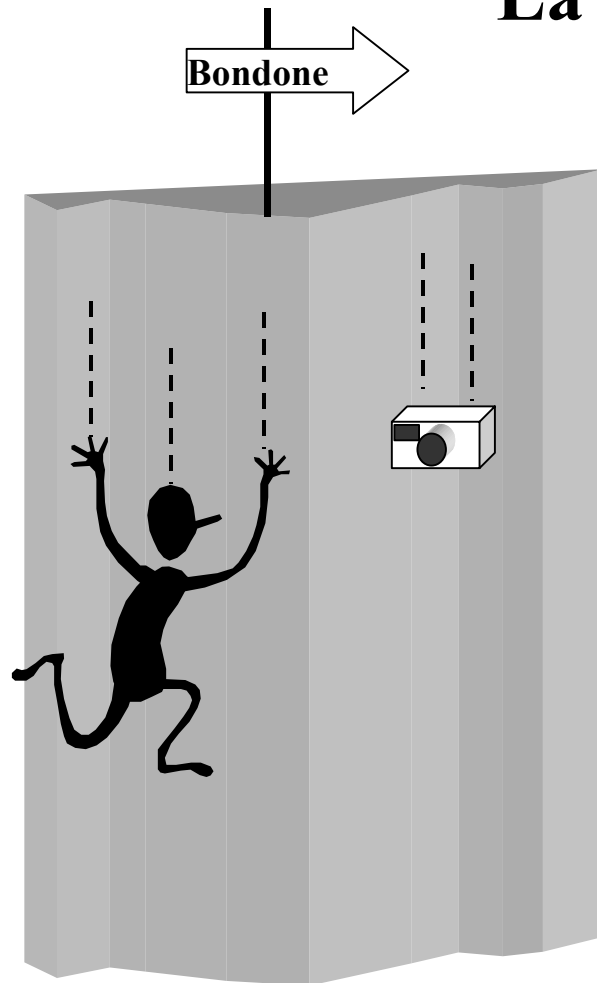
+ Interazione Nucleare Debole
= Interazione Elettro-debole

Interazione Nucleare Forte

Forza di Gravità: l'Universo

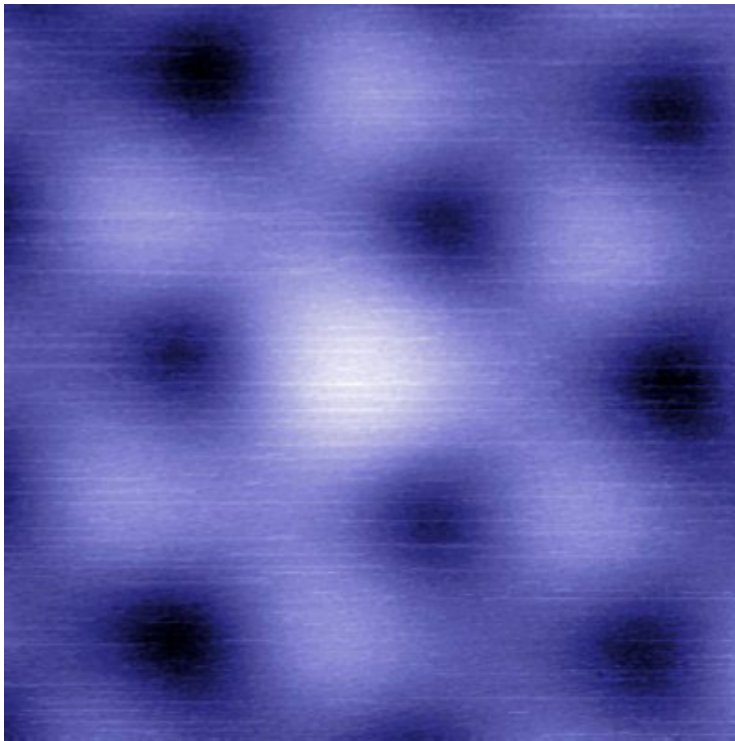
(neutralità elettrica della materia)

La forza peso

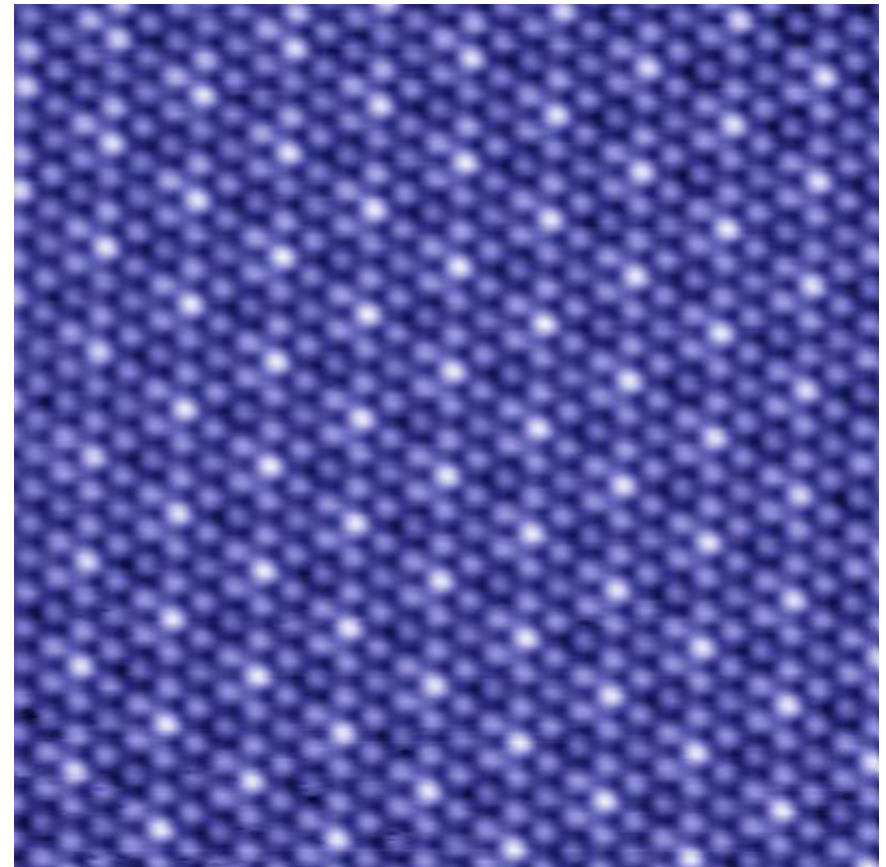


Forza Elettromagnetica

Tiene insieme elettroni e nuclei: proprietà chimiche ed elettriche della materia.



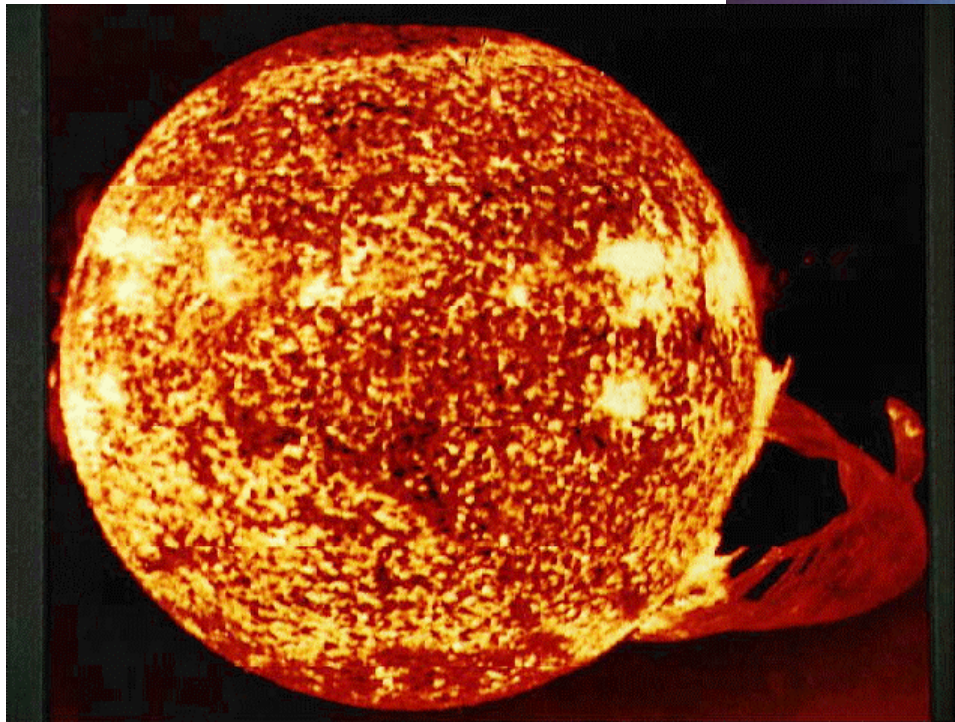
Gli atomi in un metallo (NbSe₂)



Interazione Nucleare Forte

Tiene insieme i nuclei

**Fusione nucleare : stelle,
Bomba all'idrogeno**



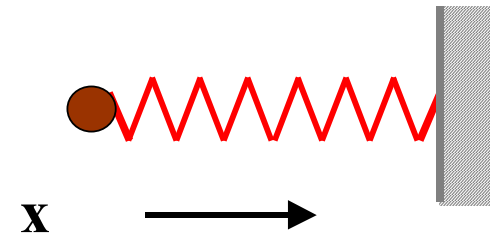
Le Forze Efficaci:

$$F_x = -k(x - x_0)$$

$$F_y, F_z$$

(vedi vincolo unidimensionale)

Molla in una
dimensione



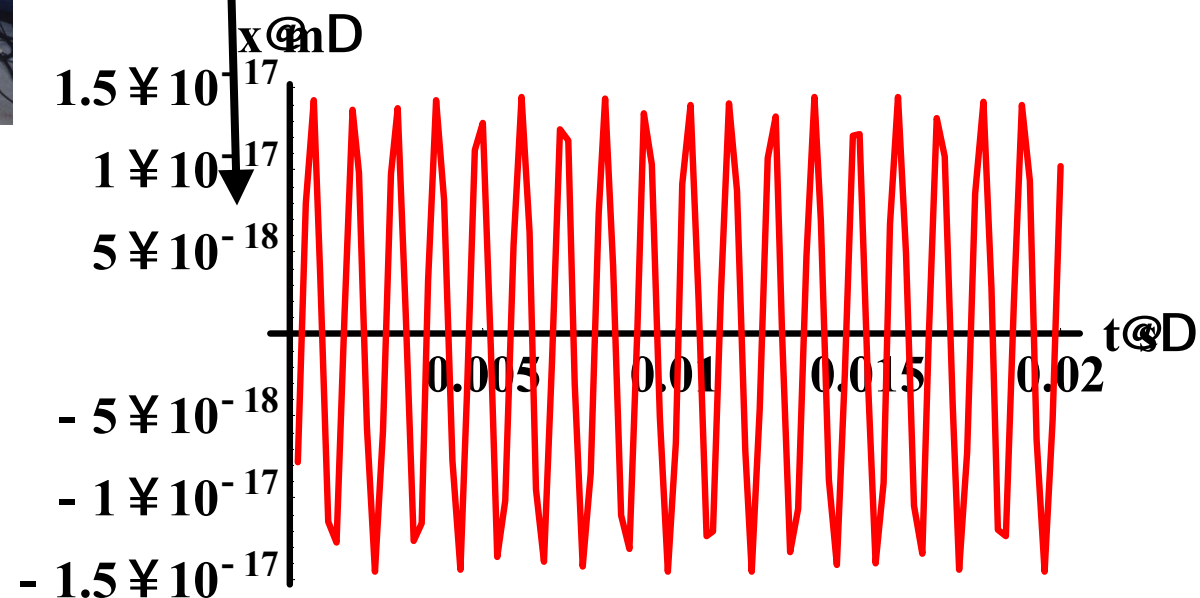
**Forze elettromagnetiche fra gli atomi che
compongono la molla**



Cilindro in Alluminio di 2.3 Ton

a $-273.05\text{ }^{\circ}\text{C}$

**Oscillazioni della lunghezza
dovute all'agitazione atomica**

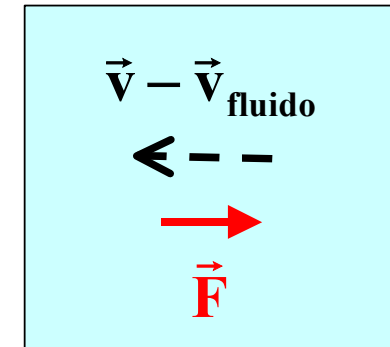


Attriti

(Forze elettromagnetiche fra particella e atomi di fluidi e solidi)

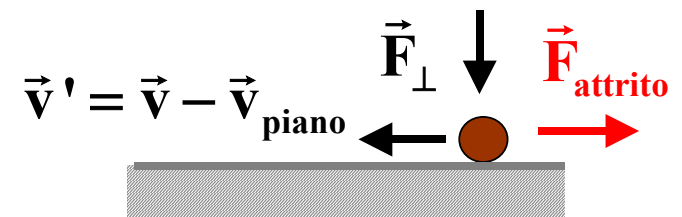
$$\vec{F} = -\beta (\vec{v} - \vec{v}_{\text{fluido}})$$

Attrito viscoso



$$\vec{F}_{\text{attrito}} = -\mu_d |\vec{F}_{\perp}| \hat{v}'$$

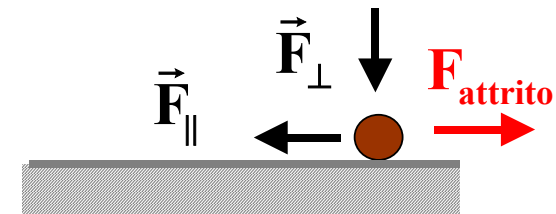
Attrito cinematico
radente
(Solo punto in
movimento)



$$\vec{F}_{\text{attrito}} = -\vec{F}_{\parallel}$$

se $|\vec{F}_{\parallel}| < \mu_s |\vec{F}_{\perp}|$

Attrito statico
(Solo punto in quiete)



N.B. $\mu_s \geq \mu_d$

Vincoli

(Deformazioni elastiche di corpi solidi)

$$\vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\text{piano}} = 0$$

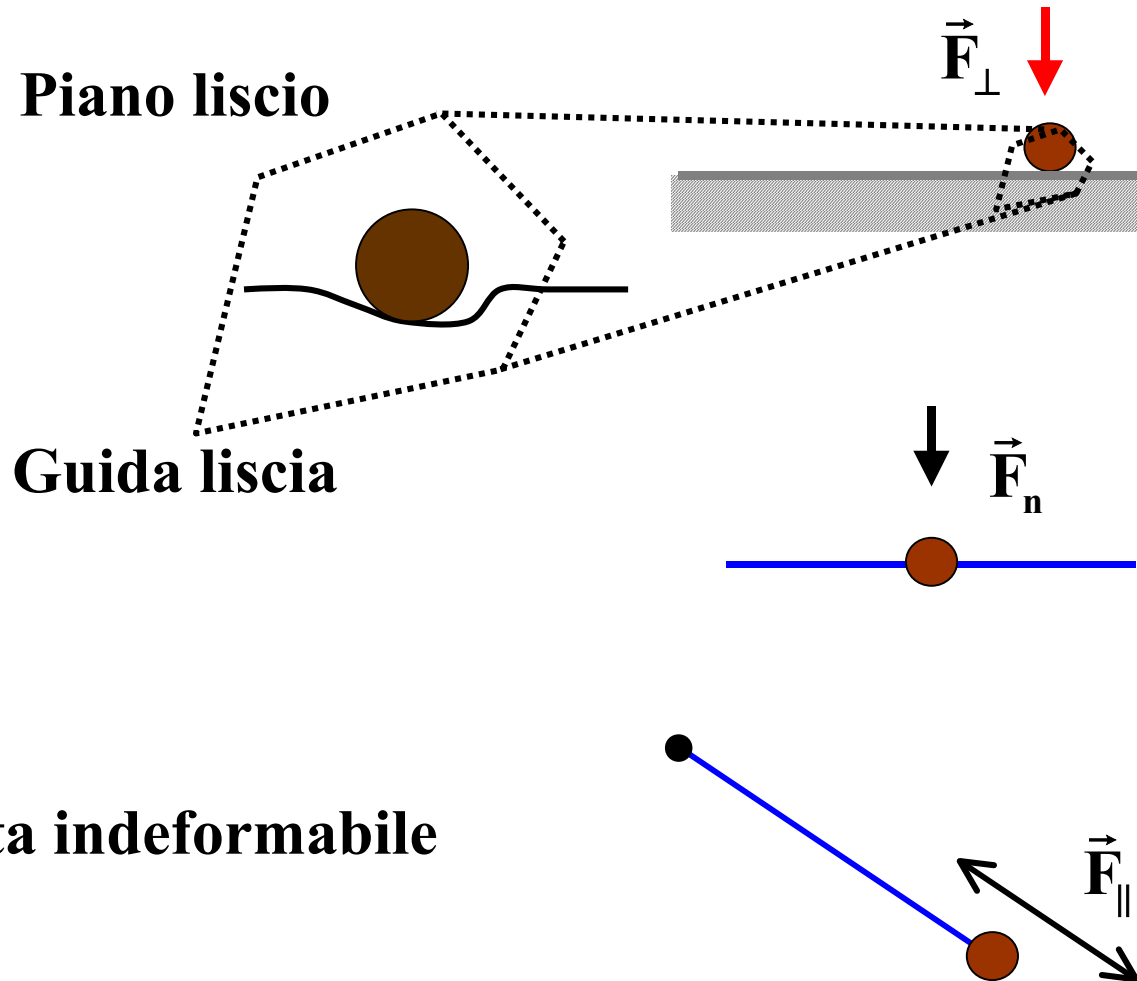
Piano liscio

$$\vec{F}_n + \vec{F}_{\text{guida}} = 0$$

Guida liscia

$$\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\text{asta}} = 0$$

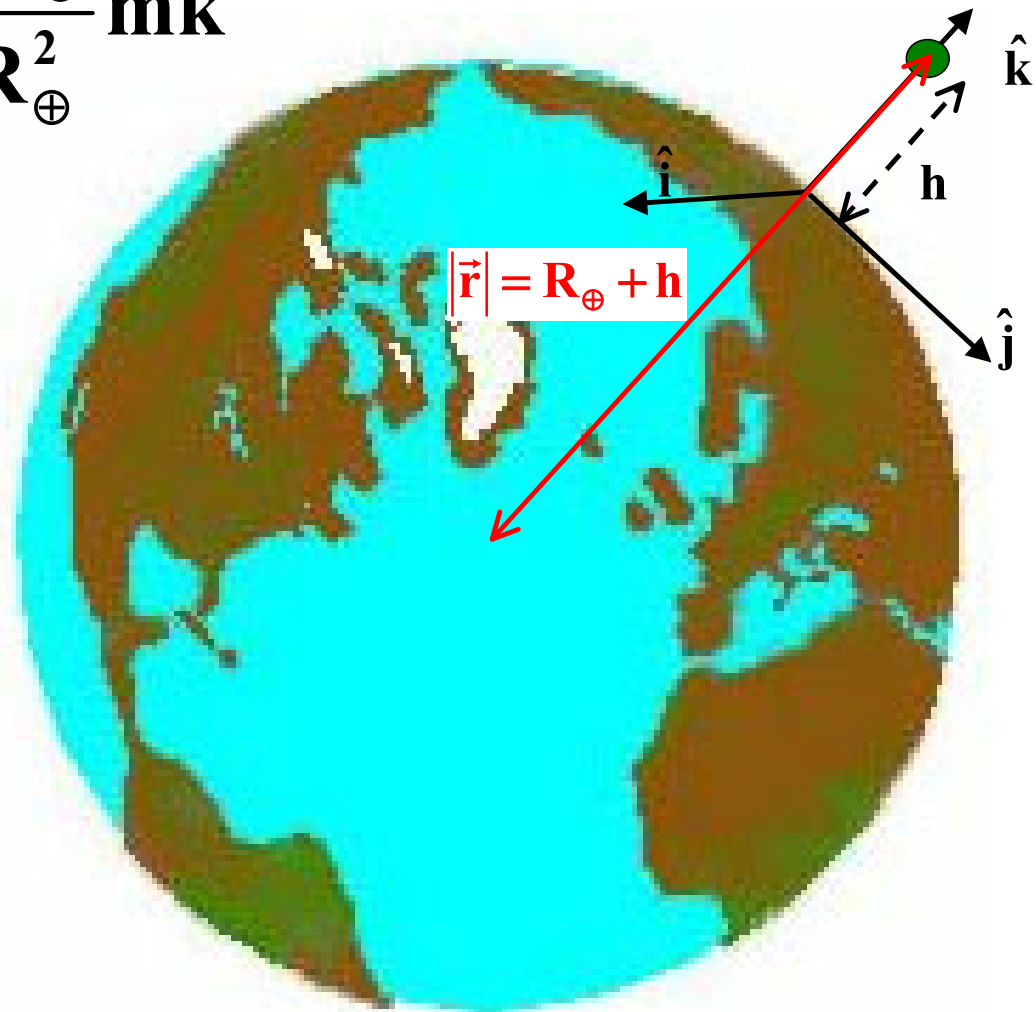
Asta indeformabile



Approssimazioni di Forze Fondamentali

$$-G \frac{M_{\oplus} m}{(R_{\oplus} + h)^2} \hat{\mathbf{r}} \approx -G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} m \hat{\mathbf{k}} \\ \equiv -g m \hat{\mathbf{k}}$$

$$g = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \approx 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



N.B. Sfere equivalenti a particelle puntiformi

Forze diverse → Problemi diversi

Caso 1: forza funzione nota del tempo

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{\vec{F}(t'')}{m} dt'' \right) dt'$$

$$x(t) = x(0) + v_x(0)t + \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{F_x(t'')}{m} dt'' \right) dt'$$

$$y(t) = y(0) + v_y(0)t + \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{F_y(t'')}{m} dt'' \right) dt'$$

$$z(t) = z(0) + v_z(0)t + \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{F_z(t'')}{m} dt'' \right) dt'$$

*Nota molto bene:
I moti lungo direzioni ortogonali sono indipendenti: per conoscere y(t) non devo conoscere F_x(t)*

Esempio 1.1 piano inclinato liscio:

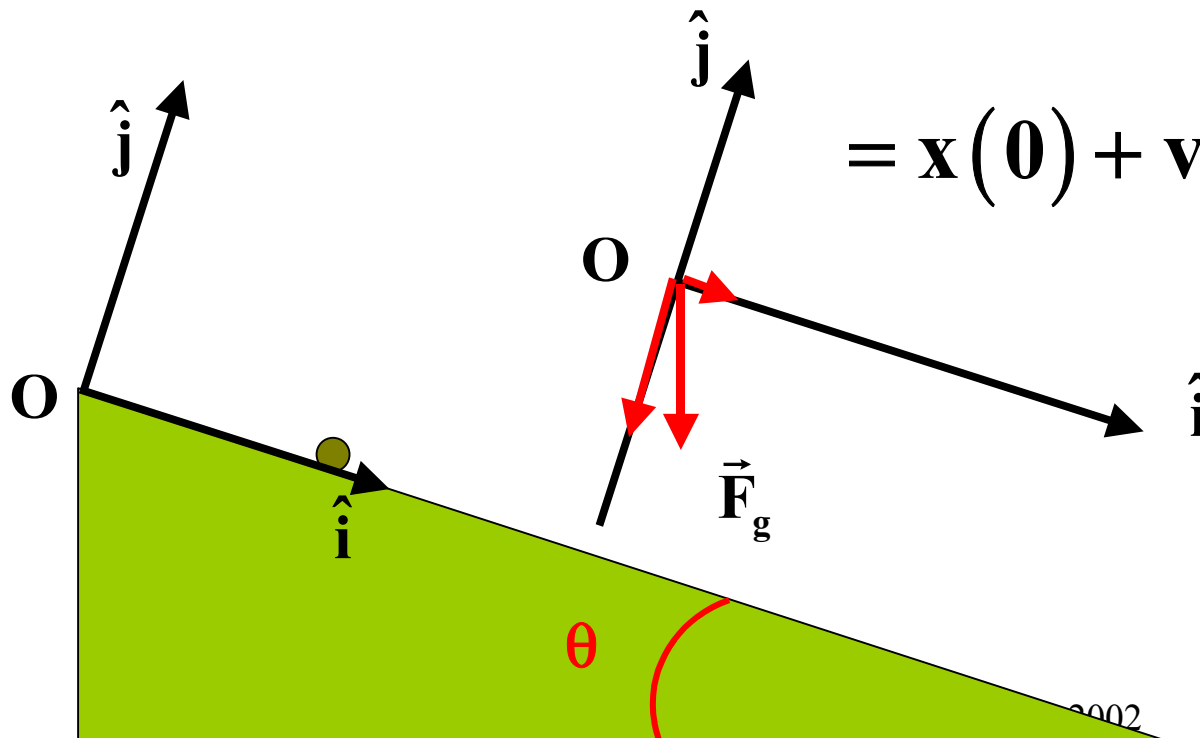
$$\vec{F}_g = mg \sin(\theta) \hat{i} - mg \cos(\theta) \hat{j} \quad \hat{j} \perp \text{superficie del piano}$$

$$-mg \cos(\theta) + F_{\text{vincolo}} = 0 \rightarrow \frac{dy^2}{dt^2} = 0 \text{ se } v_y(0) \text{ e } y(0) = 0 \rightarrow y(t) = 0$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin(\theta)$$

$$\rightarrow x(t) = x(0) + v_x(0)t + \int_0^t \left(\int_0^{t'} g \sin(\theta) dt'' \right) dt'$$

$$= x(0) + v_x(0)t + \frac{1}{2} g \sin(\theta) t^2$$



Esempio 1.2 piano inclinato con attrito:

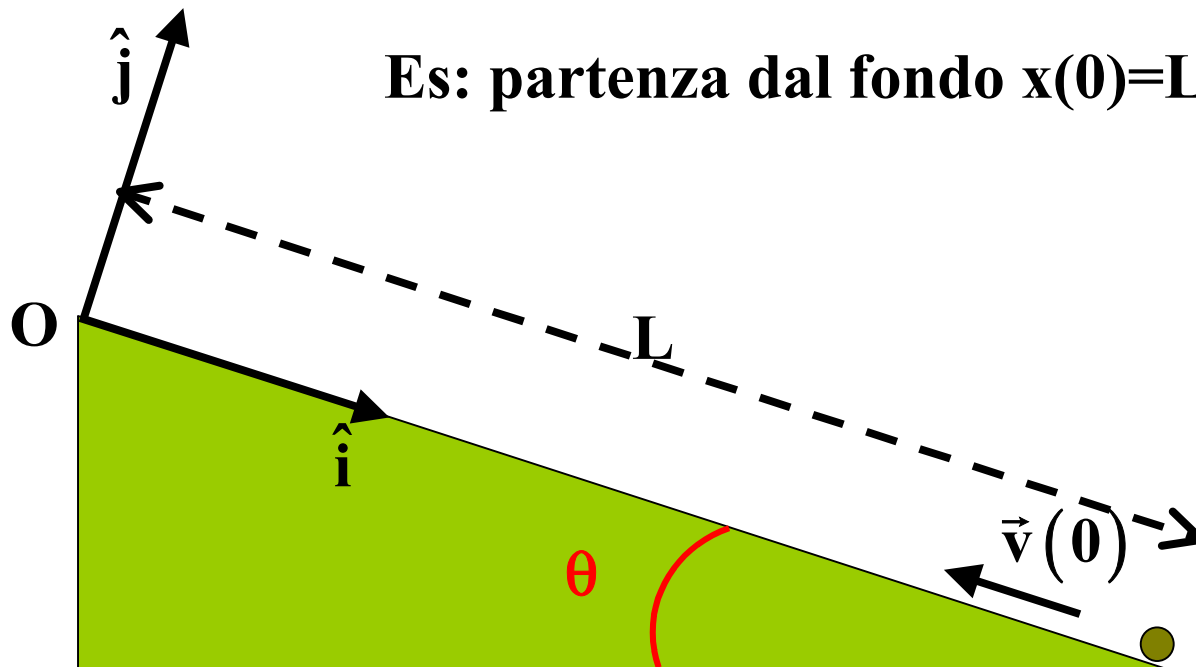
$$|\vec{F}_{\perp}| = mg \cos(\theta) \quad \vec{F}_{\parallel} = mg \sin(\theta) \hat{i}$$

$$\vec{F}_{\text{attrito dinamico}} = -\mu_d mg \cos(\theta) \hat{v} \quad [|\vec{v}| > 0]$$

$$\vec{F}_{\text{attrito statico}} = -mg \sin(\theta) \hat{i} \quad [|\vec{v}| = 0 \text{ e } mg \sin(\theta) \leq \mu_s mg \cos(\theta)]$$

Richiede soluzione “per tentativi”. Condizioni iniziali critiche

Es: partenza dal fondo $x(0)=L$ $v_x(0)=-v_o < 0$



$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = mg \sin(\theta) - \mu_d mg \cos(\theta) \text{Sign}[\mathbf{v}_x(t)]$$

$$\mathbf{v}_x(t) = -\mathbf{v}_o + g[\sin(\theta) + \mu_d \cos(\theta)]t$$

$$\left\{ t < t_{\max} = \frac{v_o}{g[\sin(\theta) + \mu_d \cos(\theta)]}; \mathbf{v}_x(t_{\max}) = 0 \right\}$$

$$\mathbf{x}(t) = L - \mathbf{v}_o t + \frac{1}{2} g[\sin(\theta) + \mu_d \cos(\theta)]t^2$$

Si ferma o riscende?

$$\mathbf{x}(t_{\max}) = L - \frac{1}{2} \frac{v_o^2}{g[\sin(\theta) + \mu_d \cos(\theta)]}$$

$$\vec{F}_{\text{attrito statico}} = -mg \sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} \quad [|\vec{v}| = 0 \text{ e } mg \sin(\theta) \leq \mu_s mg \cos(\theta)]$$

resta fermo se $\tan(\theta) < \mu_s$

N.B. moto: $\tan(\theta) > \mu_s > \mu_d \rightarrow \sin(\theta) > \mu_d \cos(\theta)$

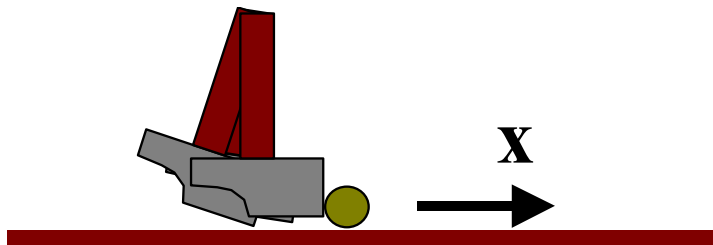
Esempio 1.3: forza “impulsiva”

Teorema dell' impulso

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\vec{F}(t)}{m} dt \rightarrow m\vec{v}(t_2) - m\vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \equiv \vec{I}_{\vec{F}}(t_1, t_2)$$

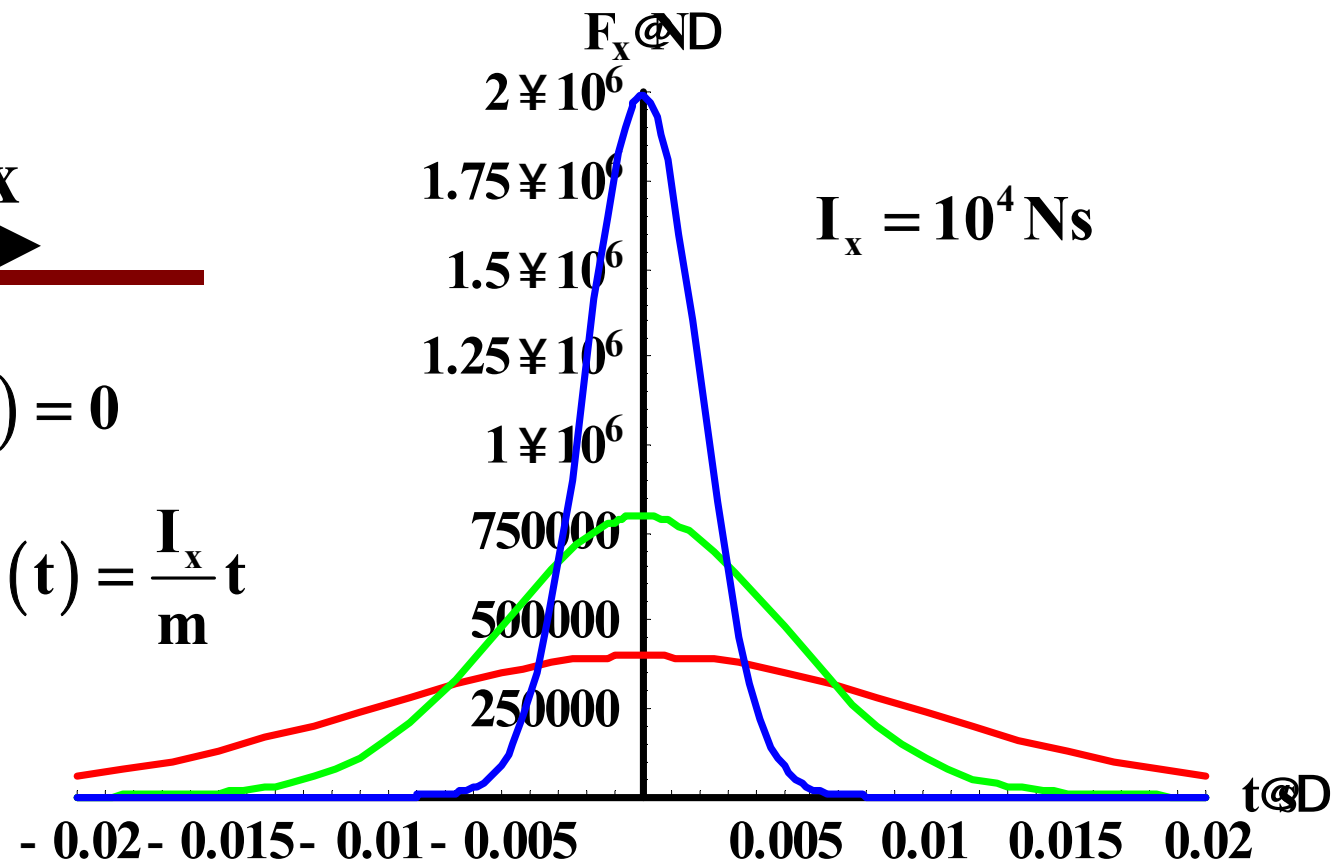
$m\vec{v} \equiv$ quantità di moto

$\vec{I}_{\vec{F}}(t_1, t_2) \equiv$ Impulso della forza



$$x(0), v_x(0) = 0$$

$$v_x(t^+) = \frac{I_x}{m} \rightarrow x(t) = \frac{I_x}{m} t$$



Caso 2: forza funzione di coordinate e velocità:

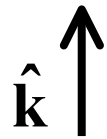
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = f \left[\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}}{dt} \dots \right]$$

Equazione differenziale, caso “semplice”

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = a_0 \vec{r}(t) + a_1 \frac{d\vec{r}}{dt} + ..$$

Equazione differenziale, lineare a coefficienti costanti

Esempio: caduta in un fluido viscoso



$$\vec{F} = -\beta \vec{v}$$

(Fluido in quiete)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{k} - \beta \vec{v}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dz}{dt} = -g$$



Equazione lineare non omogenea

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{dt} = -g \quad \left(\tau = \frac{m}{\beta} \right)$$

Soluzione: 1 → trova soluzione generale dell'omogenea associata

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{dt} &= 0 \quad z = z_k e^{\alpha_k t} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = z_k \alpha_k e^{\alpha_k t} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = z_k \alpha_k^2 e^{\alpha_k t} \\ z_k \alpha_k^2 e^{\alpha_k t} + \frac{1}{\tau} z_k \alpha_k e^{\alpha_k t} &= 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_k^2 + \frac{1}{\tau} \alpha_k = 0 \quad \alpha_k = -\frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

$$z_g(t) = z_1 e^{0t} + z_2 e^{-\frac{t}{\tau}} = z_1 + z_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**2→ trova una soluzione particolare
(condizioni iniziali qualunque)**

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{dt} = -g$$

$$z_p(t) = -g\tau t \rightarrow \frac{dz_p}{dt} = -g\tau \rightarrow \frac{d^2 z_p}{dt^2} = 0 \rightarrow 0 + \frac{1}{\tau}(-g\tau) = -g!$$

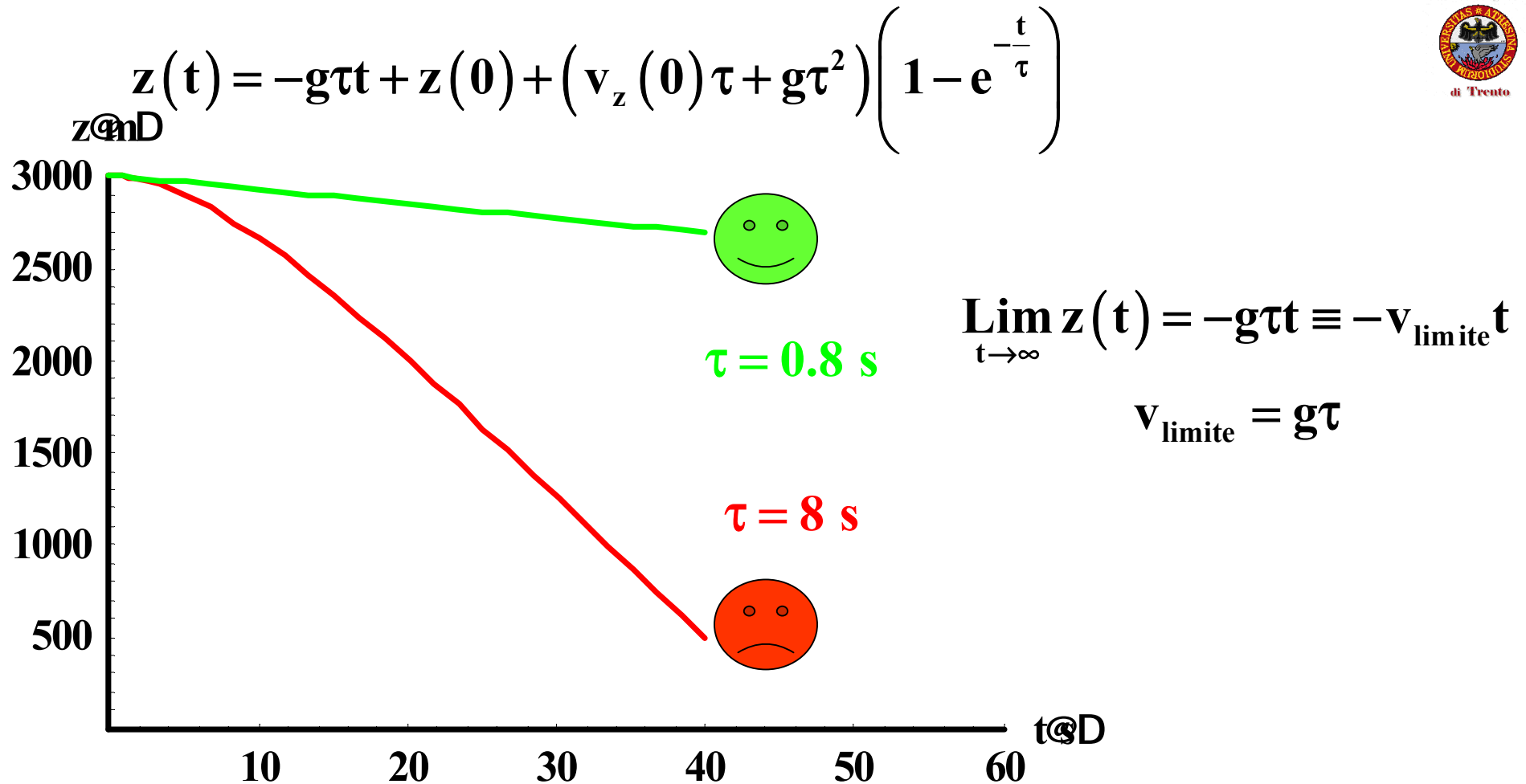
3→ la soluzione generale è:

$$z(t) = z_g(t) + z_p(t) = -g\tau t + z_1 + z_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

4→ Determinare z_1 e z_2 dalle condizioni iniziali

$$z(0) = z_1 + z_2 \quad v_z(0) = \left[-g\tau - \frac{1}{\tau} z_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_{t=0} = -g\tau - \frac{1}{\tau} z_2$$

$$z_2 = -[v_z(0)\tau + g\tau^2] \quad z_1 = z(0) + v_z(0)\tau + g\tau^2$$



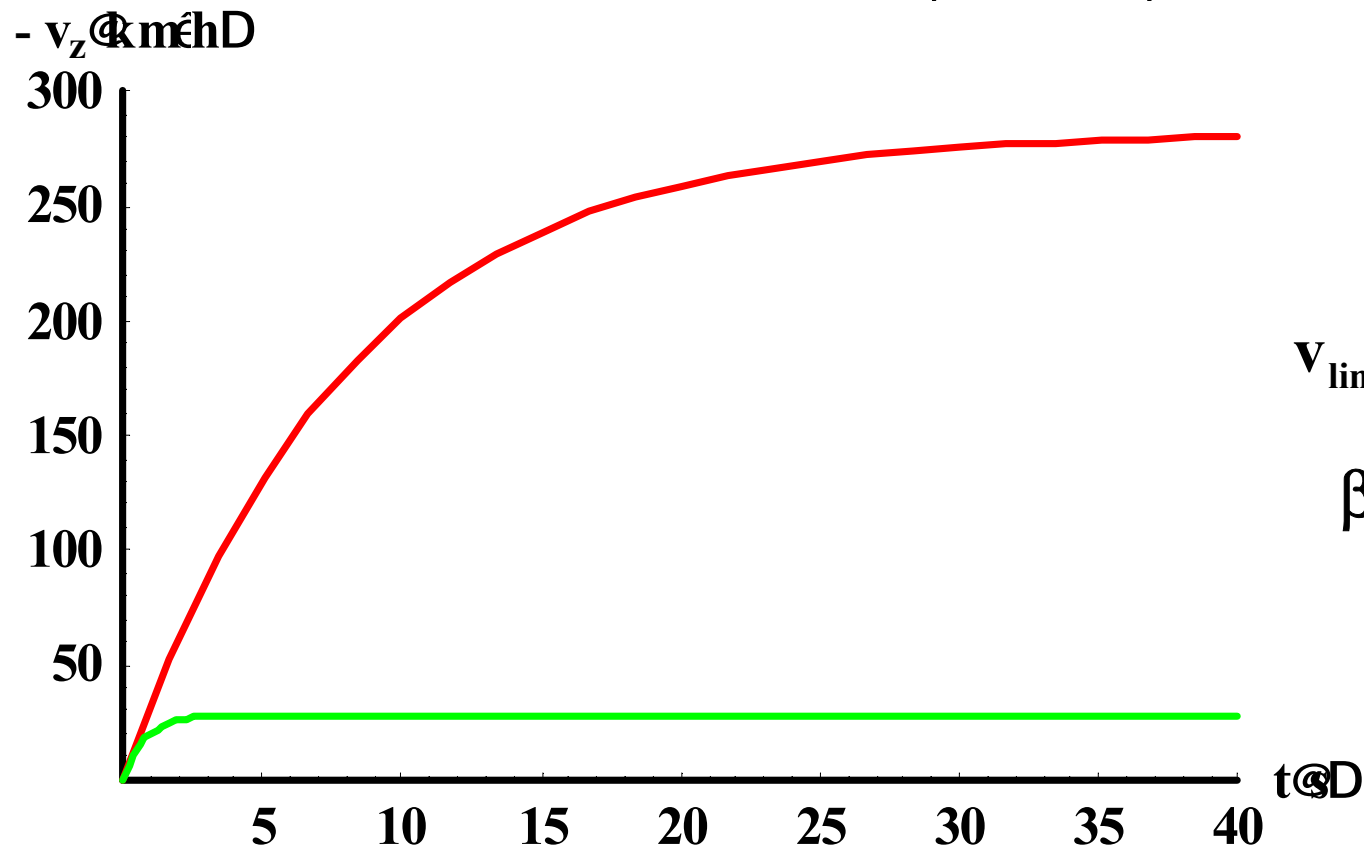
$$z(t) = -g\tau t + z(0) + [v(0)\tau + g\tau^2] \left\{ 1 - \left[1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 + \dots \right] \right\} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

La velocità limite

$$z(t) = -g\tau t + z(0) + (v_z(0)\tau + g\tau^2) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$v_z(t) = -g\tau + g\tau e^{-\frac{t}{\tau}} = -g\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -v_{\text{limite}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



$$v_{\text{limite}} = g\tau = \frac{mg}{\beta}$$

$$\beta v_{\text{limite}} = mg$$

N.B. grande $\tau \rightarrow$ grande m , piccolo β (grande peso, scarso attrito)

Che succede lungo x e y?

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} = 0$$

$$x = x_k e^{\alpha_k t} \rightarrow \frac{dx}{dt} = x_k \alpha_k e^{\alpha_k t}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = x_k \alpha_k^2 e^{\alpha_k t}$$

$$x_k \alpha_k^2 e^{\alpha_k t} + \frac{1}{\tau} x_k \alpha_k e^{\alpha_k t} = 0 \rightarrow \alpha_k^2 + \frac{1}{\tau} \alpha_k = 0$$

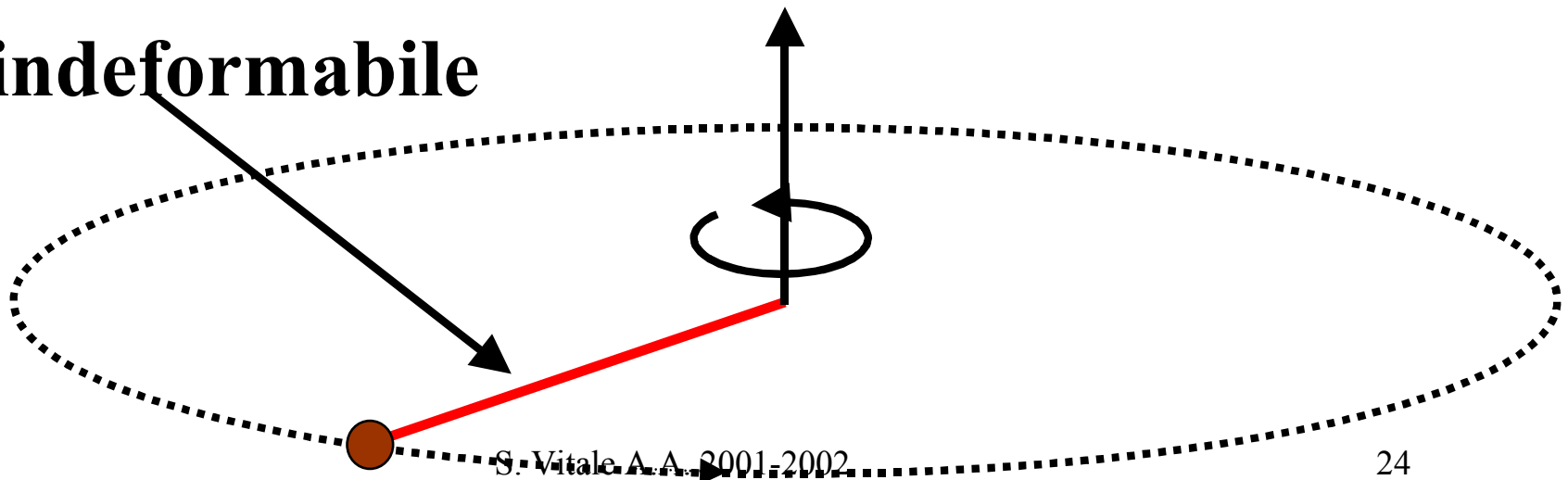
$$x(t) = x_1 + x_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad v_x(t) = -\frac{x_2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**L'equazione di Newton al contrario: se si conosce
la legge oraria si può determinare la forza?
Esempio: moto circolare uniforme, quant'è la forza
che l'asta esercita sulla particella?**

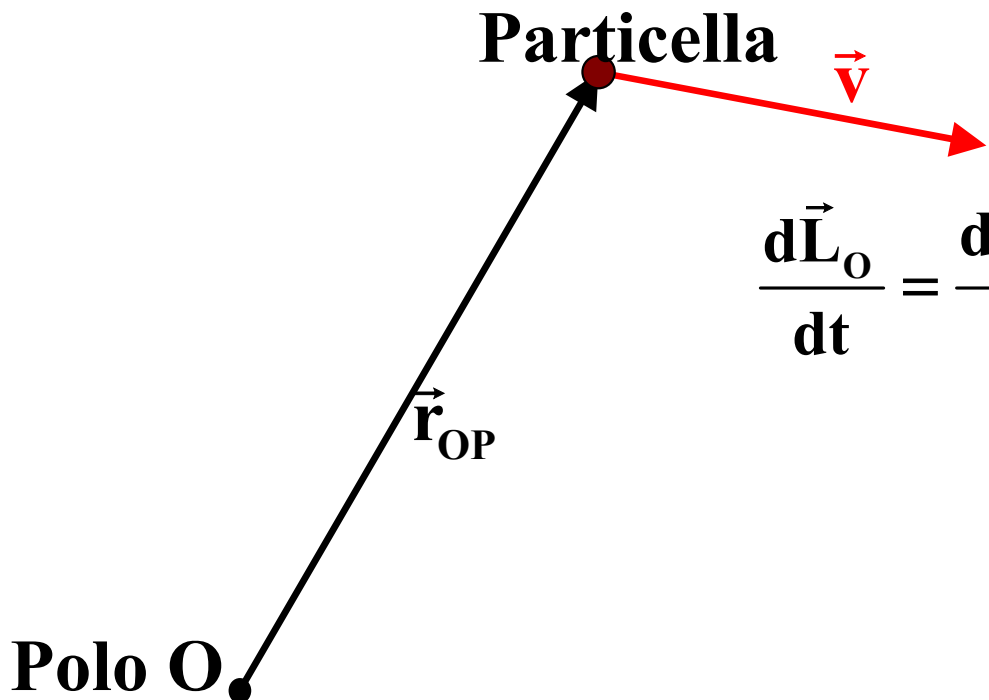
$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$\vec{F}_{\text{asta}} = -m\omega^2 \vec{r}(t)$$

Asta indeformabile



Un bell'esempio di applicazione del Teorema del momento angolare



Particella

Polo O

\vec{r}_{OP}

\vec{v}

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{OP} \times m\vec{v} = (\vec{r} - \vec{r}_O) \times m\vec{v}$$

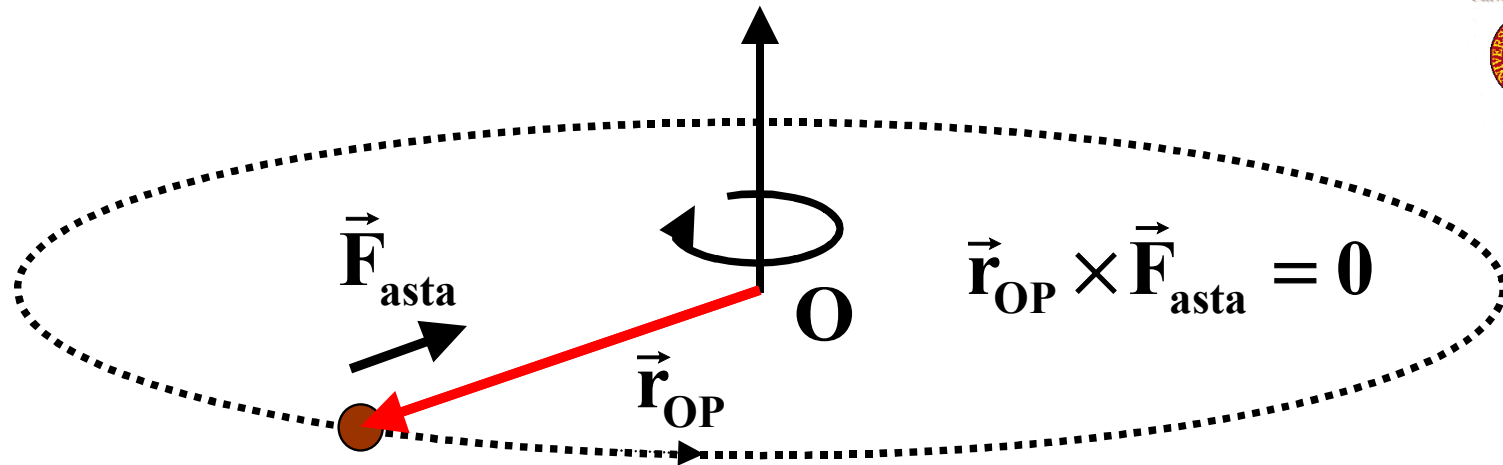
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} - \vec{r}_O)}{dt} \times m\vec{v} + (\vec{r} - \vec{r}_O) \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= (\vec{v} - \vec{v}_O) \times m\vec{v} + (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F}$$

$$= -\vec{v}_O \times m\vec{v} + \vec{r}_{OP} \times \vec{F}$$

Se il polo è fisso:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_{OP} \times \vec{F} \equiv \vec{M}$$



$$\vec{v}(t) = -\omega r_0 \sin(\omega t) \hat{i} + \omega r_0 \cos(\omega t) \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = r_0 \cos(\omega t) \hat{i} + r_0 \sin(\omega t) \hat{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) \times m \vec{v}(t) &= m \left\{ \left[r_0 \sin(\omega t) \hat{j} \right] \times \left[-\omega r_0 \sin(\omega t) \hat{i} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[r_0 \cos(\omega t) \hat{i} \right] \times \left[\omega r_0 \cos(\omega t) \hat{j} \right] \right\} = m \omega r_0^2 \hat{k} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Moto rettilineo uniforme

$$\vec{a} = 0 \quad \vec{F} = 0 \quad \vec{r}_o \times \vec{F} = 0 \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = 0$$

