Università degli Studi di Trento

Ricostruzione della legge oraria dalla velocità: il fatto matematico

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad x(t_B) - x(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} v_x(t)\,dt$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} \quad \rightarrow \quad y(t_B) - y(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} v_y(t)\,dt$$

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} \quad \rightarrow \quad z(t_B) - z(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} v_z(t)\,dt$$

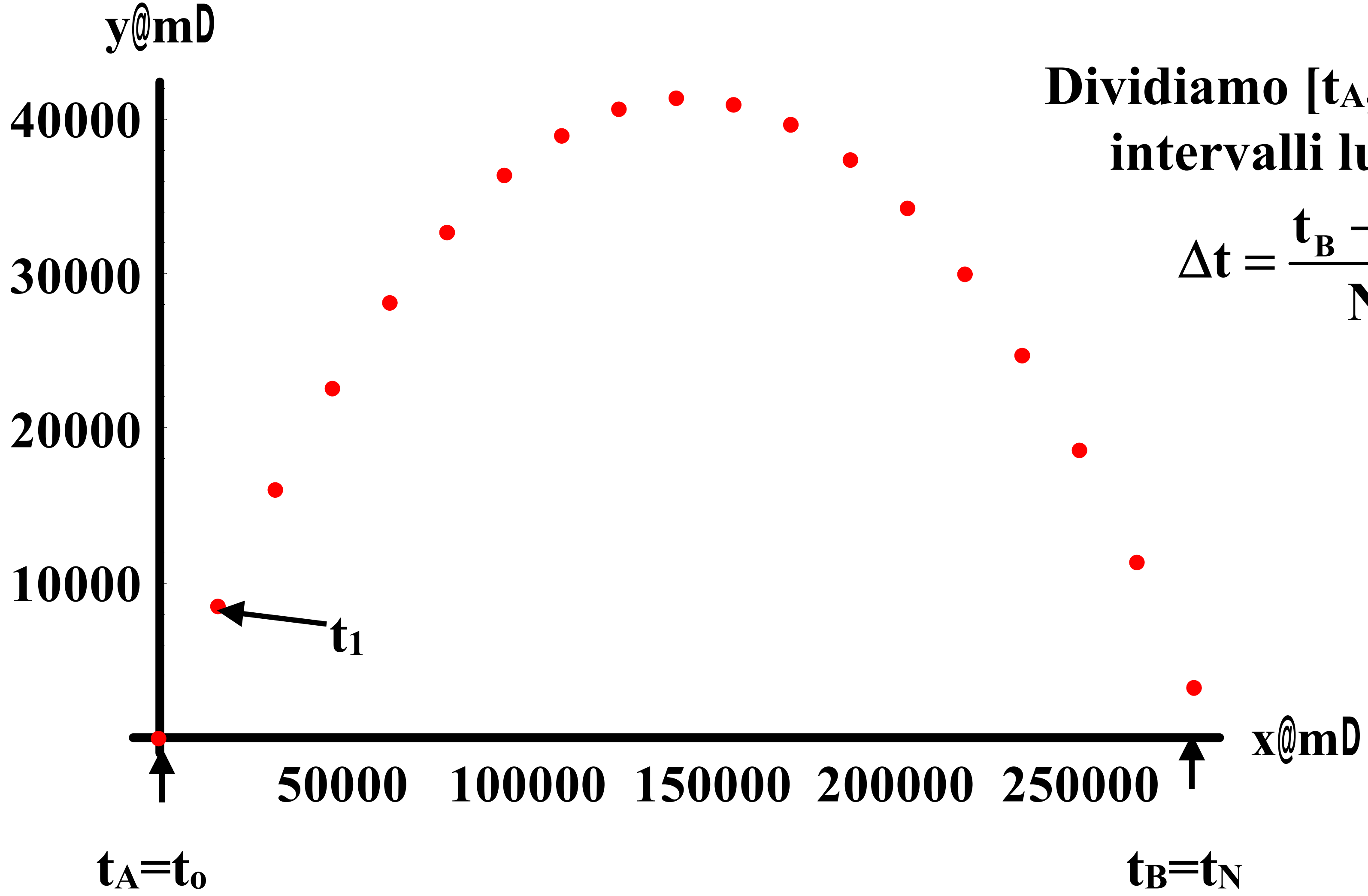
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{v}(t)\,dt$$

$$\vec{r}(t_B) = \vec{r}(t_A) + \int_{t_A}^{t_B} \vec{v}(t)\,dt$$

Per conoscere la posizione al tempo t_B bisogna conoscere la velocità fra t_A e t_B

e la posizione al tempo t_A

Perché l'integrale?



Dividiamo [t_A,t_B] in N intervalli lunghi

$$\Delta t = \frac{t_B - t_A}{N}$$

$$x[t_B]-x[t_A]\equiv x[t_N]-x[t_0]=$$

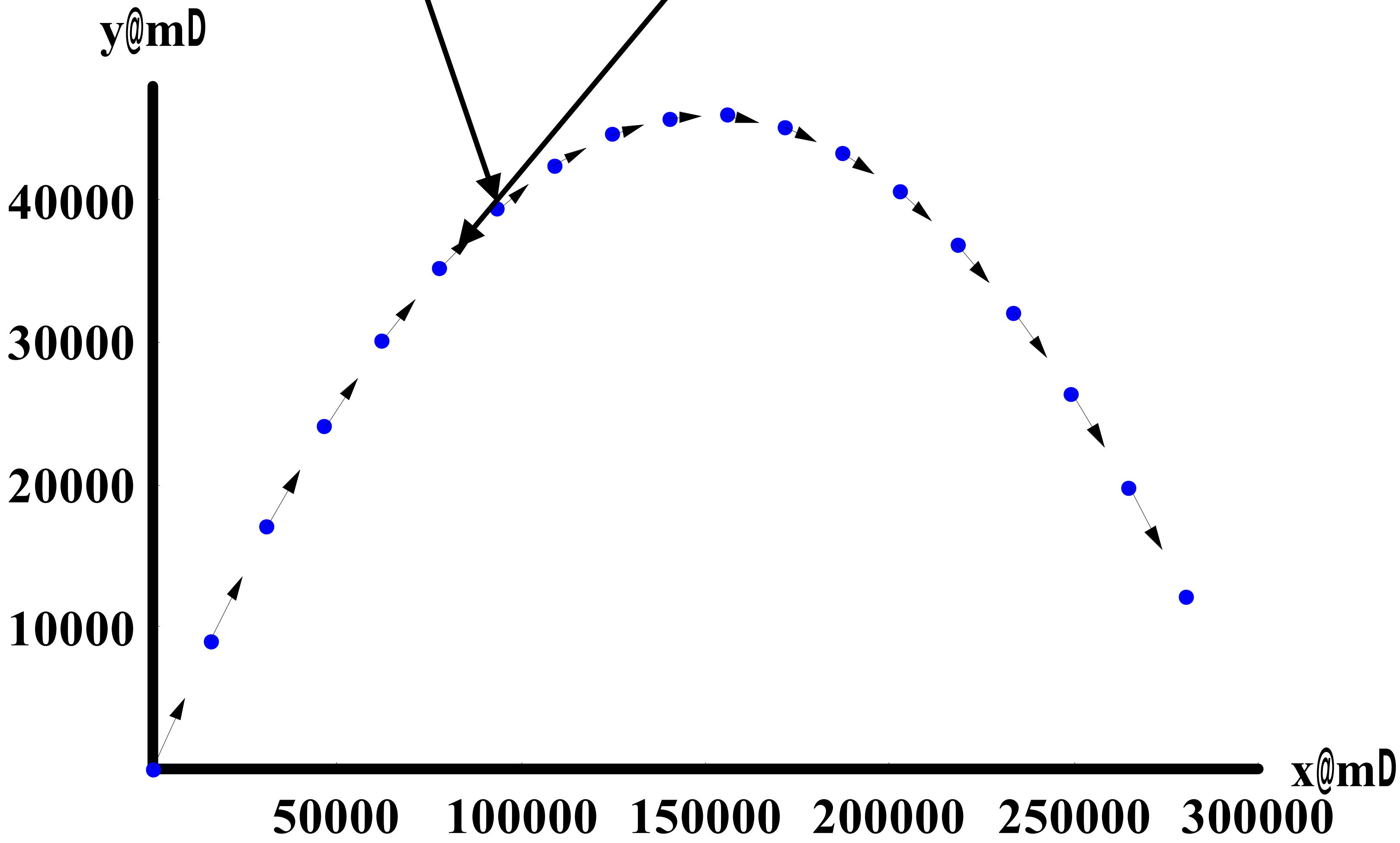
$$x[t_1]-x[t_0]+x[t_2]-x[t_1]+x[t_3]-x[t_2]+\ldots+x[t_N]$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\left(x[t_{k+1}]-x[t_k]\right)$$

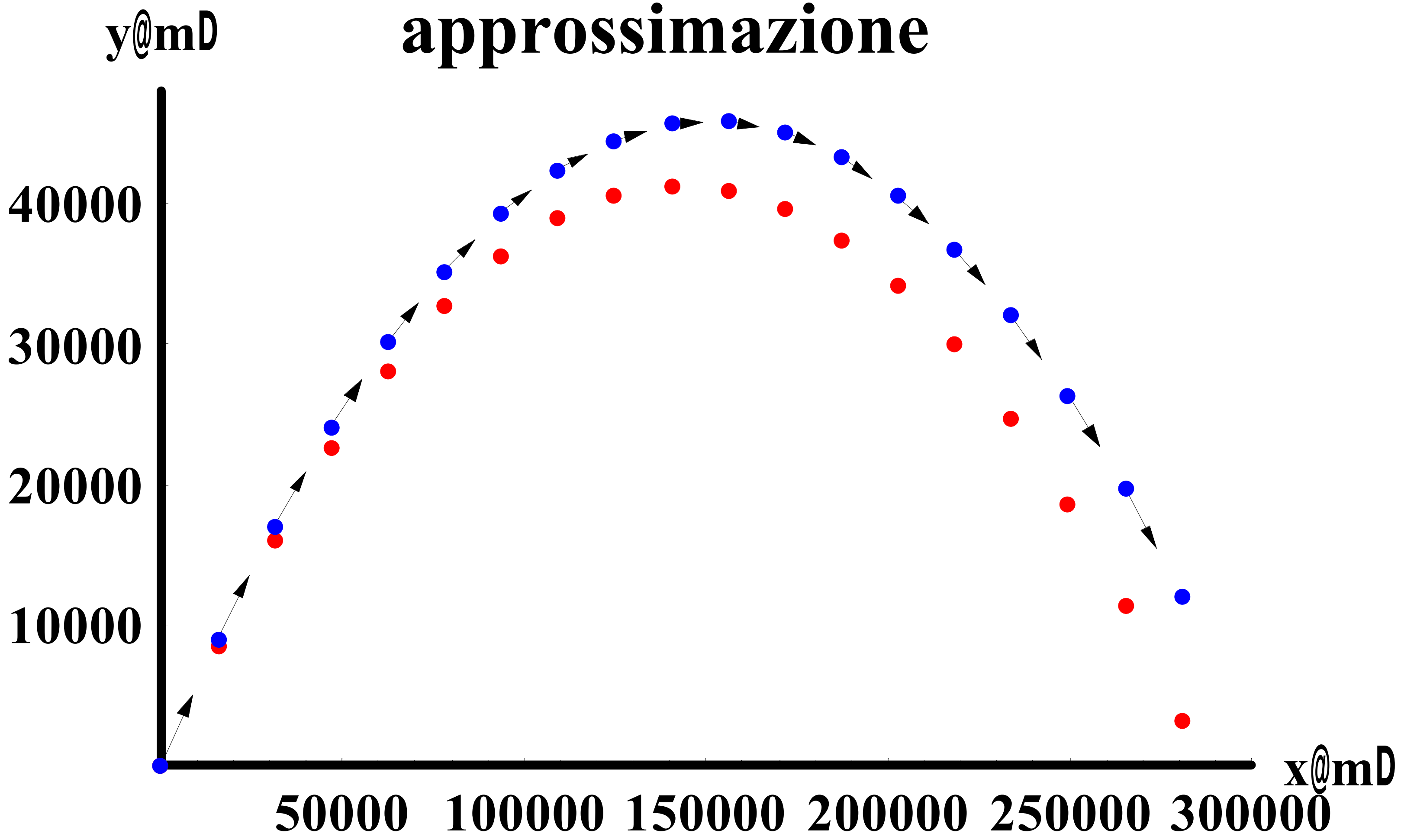
$$\frac{x[t_{k+1}=t_k+\Delta t]-x[t_k]}{\Delta t}\approx v_x[t_k]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(x[t_{k+1}]-x[t_k]\right)\approx\sum_{k=0}^{N-1}v_x[t_k]\Delta t$$

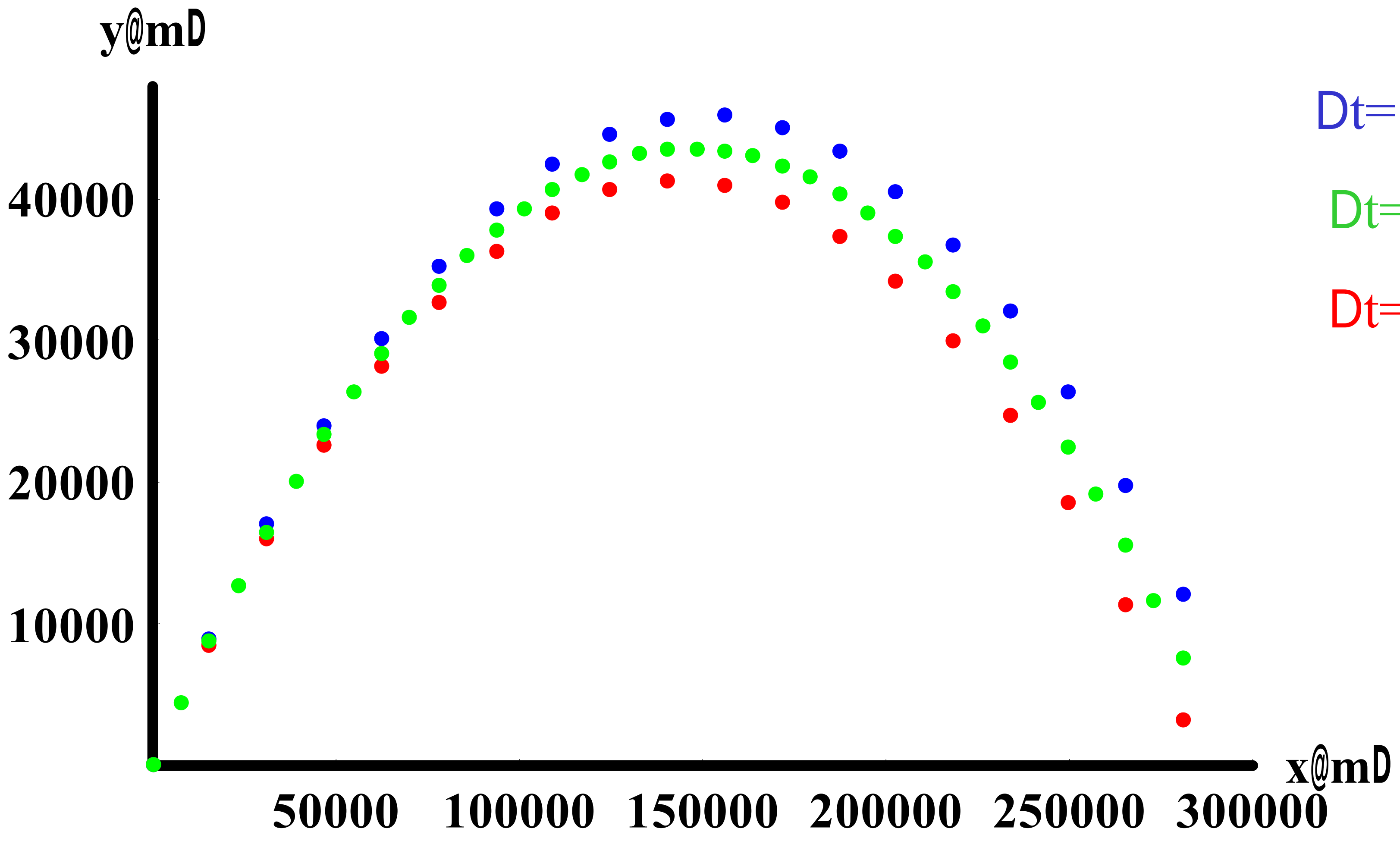
$$\vec{r}[t_{k+1}] \approx \vec{r}[t_k] + \vec{v}[t_k]\Delta t$$



Andare per la tangente a velocità costante per un tempo Dt: una discreta approssimazione



$$\lim_{N\to\infty,\Delta t\to 0}\sum_{k=0}^{N-1}\vec{v}[t_k]\Delta t = \int_{t_A}^{t_B}\vec{v}[t]dt$$



Es: moto rettilineo uniforme

$$v_x(t) = v_{xo};\; v_y(t) = v_{yo}; v_z(t) = v_{zo};$$

$$\vec{v}(t) = \{v_x(t),\; v_y(t), v_z(t)\} = \{v_{xo}, v_{yo}, v_{zo}\} \equiv \vec{v}_o$$

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v_{xo}\,dt = x(t_1) + v_{xo}(t_2 - t_1)$$

$$y(t_2) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v_{yo}\,dt = y(t_1) + v_{yo}(t_2 - t_1)$$

$$z(t_2) = z(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v_{zo}\,dt = z(t_1) + v_{zo}(t_2 - t_1)$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_o\,dt = \vec{r}(t_1) + \vec{v}_o(t_2 - t_1)$$

Es: moto circolare uniforme

$$v_x(t) = -\omega\, r_o \mathrm{Sin}(\omega t);\ v_y(t) = \omega\, r_o \mathrm{Cos}(\omega t);\ v_z(t) = 0$$

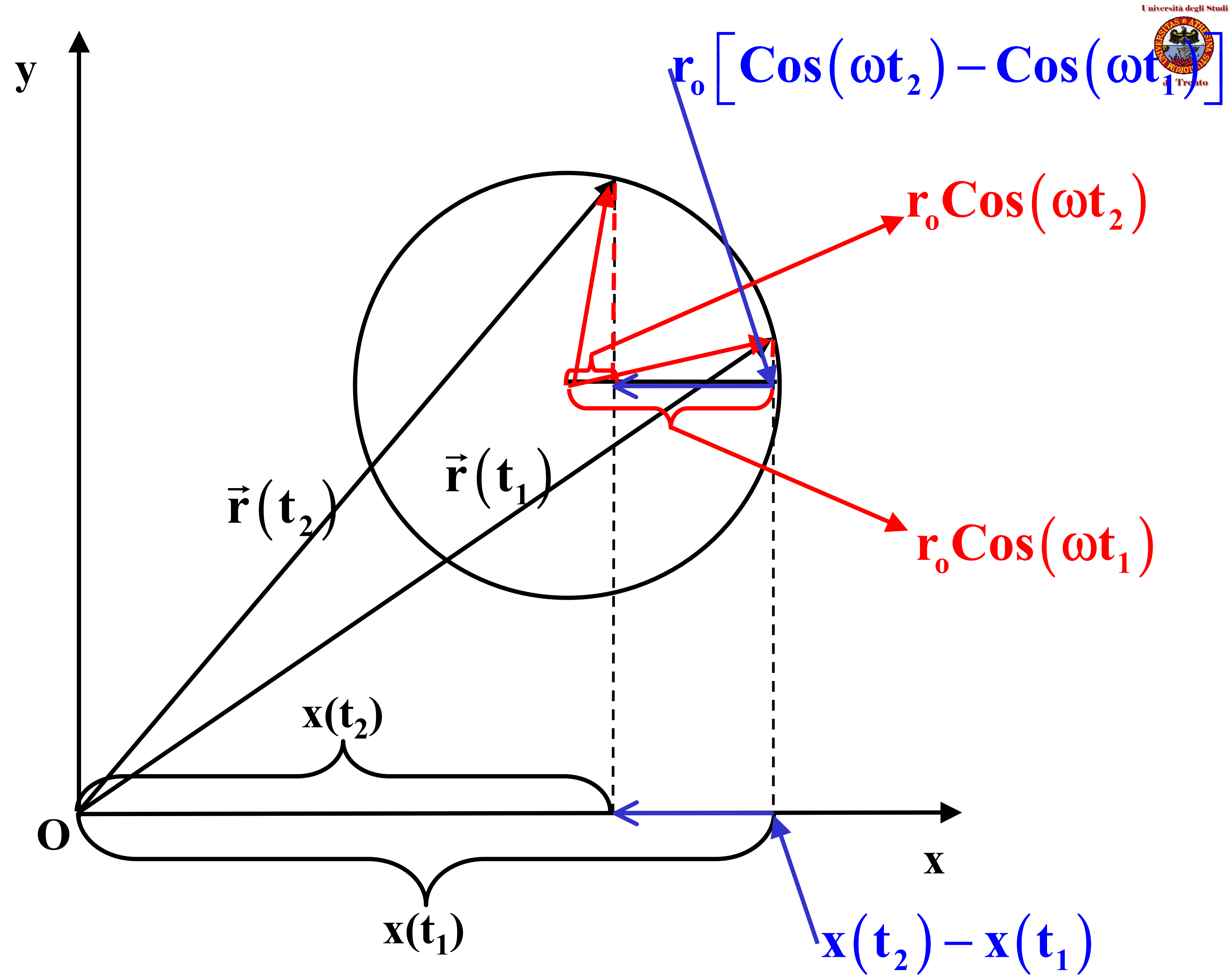
$$x(t_2) = x(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \omega\, r_o \mathrm{Sin}(\omega t)\, dt =$$

$$x(t_1) + r_o\left[\mathrm{Cos}(\omega t_2) - \mathrm{Cos}(\omega t_1)\right]$$

$$y(t_2) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \omega\, r_o \mathrm{Cos}(\omega t)\, dt =$$

$$y(t_1) + r_o\left[\mathrm{Sin}(\omega t_2) - \mathrm{Sin}(\omega t_1)\right]$$

$$z(t_2) = z(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} 0\, dt = z(t_1)$$



Università degli Studi di Trento
$r_o\left[\mathrm{Cos}(\omega t_2)-\mathrm{Cos}(\omega t_1)\right]$
y
$r_o\mathrm{Cos}(\omega t_2)$
$\vec{r}(t_1)$
$\vec{r}(t_2)$
$r_o\mathrm{Cos}(\omega t_1)$
$x(t_2)$
O
x
$x(t_1)$
$x(t_2)-x(t_1)$

Università degli Studi di Trento

N.B. da

$$\vec{r}(t_B) = \vec{r}(t_A) + \int_{t_A}^{t_B} \vec{v}(t)\,dt$$

Segue che la velocità media

$$\bar{\vec{v}}(t_A, t_B) \equiv \frac{\vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A)}{t_B - t_A} = \frac{1}{t_B - t_A} \int_{t_A}^{t_B} \vec{v}(t)\,dt$$

È la media temporale della velocità istantanea

Come si ricavano posizione e velocità dall'accelerazione?

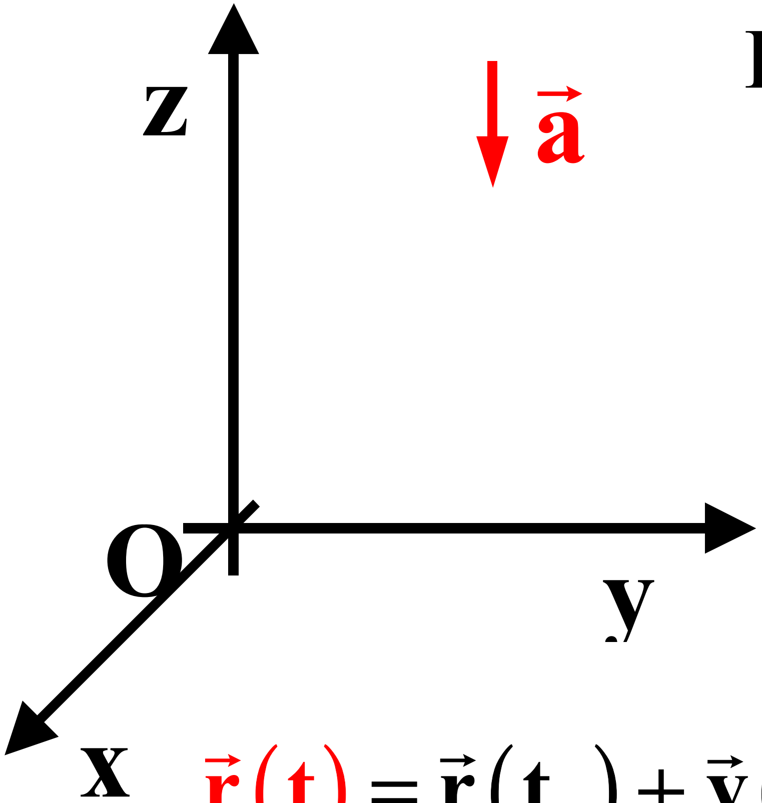
$$\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{a}(t)\,dt$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}(t_o)+\int_{t_o}^{t}\vec{a}(t')\,dt'$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_o)+\int_{t_o}^{t}\vec{v}(t')\,dt'=\vec{r}(t_o)+\int_{t_o}^{t}\left[\vec{v}(t_o)+\int_{t_o}^{t'}\vec{a}(t'')\,dt''\right]dt'$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_o)+\vec{v}(t_o)(t-t_o)+\int_{t_o}^{t}dt'\int_{t_o}^{t'}\vec{a}(t'')\,dt''$$

Due condizioni iniziali: se l'accelerazione è nulla la velocità può essere diversa da zero



Esempio: il moto nel campo gravitazionale terrestre

$$\vec{a}(t) = -g\hat{k}$$

$$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \vec{v}(t_o)(t - t_o) + \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t'} -g\hat{k}\ dt'' =$$

$$= \vec{r}(t_o) + \vec{v}(t_o)(t - t_o) - \int_{t_o}^{t} g\hat{k}(t' - t_o)dt' =$$

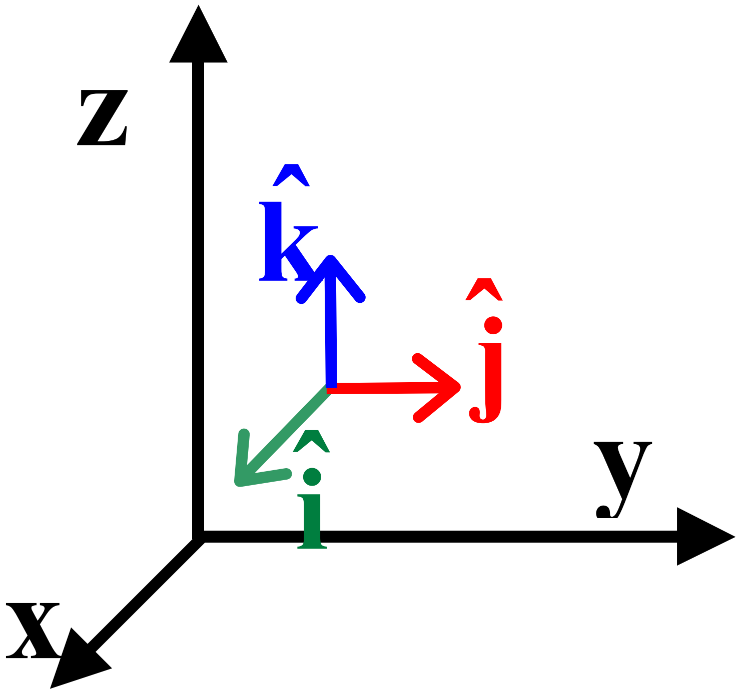
$$= \vec{r}(t_o) + \vec{v}(t_o)(t - t_o) - \hat{k}\ \frac{1}{2} g (t - t_o)^2$$

Una piccola parentesi matematica: il versore

Università degli Studi di Trento

$$\hat{\mathbf{B}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\left|\vec{\mathbf{B}}\right|} = \left\{ \frac{B_x}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}, \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}, \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}} \right\}$$

$$\rightarrow \left|\hat{\mathbf{B}}\right| = 1 \rightarrow \vec{\mathbf{B}} = \left|\vec{\mathbf{B}}\right| \hat{\mathbf{B}}$$



$$\hat{\mathbf{i}} = \{1,0,0\}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \{0,1,0\}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \{0,0,1\}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \{B_x, B_y, B_z\} = \{B_x, 0, 0\} + \{0, B_y, 0\} + \{0, 0, B_z\} =$$

$$B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}$$

La velocità

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) - g\hat{k}(t - t_o)$$

$$v_x(t) = v_x(t_o);\ v_y(t) = v_y(t_o)$$

$$v_z(t) = v_z(t_o) - g(t - t_o)$$