

SOLUZIONE ESERCIZIO 8

La soluzione consiste nel descrivere le leggi orarie del moto della freccia e della scimmia, e verificare se le condizioni iniziali (H , D , V_0) sono tali da permettere che la freccia in un qualche istante t^* si trovi nello stesso posto della scimmia.

In coordinate $x - y$ rispetto al sistema di riferimento indicato in figura

Le condizioni iniziali sono:

per la freccia

$$V_{fix} = V_0 \cos(\theta)$$

$$V_{fiy} = V_0 \sin(\theta)$$

dove:

$$V_{fix} = V_{fx}(t = 0 \text{ s})$$

$$V_{fiy} = V_{fy}(t = 0 \text{ s})$$

per la scimmia

$$V_{six} = 0$$

$$V_{siy} = 0$$

dove:

$$V_{six} = V_{sx}(t = 0 \text{ s})$$

$$V_{siy} = V_{sy}(t = 0 \text{ s})$$

la velocità con cui si muove la freccia é:

$$V_{fx} = V_{fix}$$

$$V_{fy} = V_{fiy} - g t$$

la velocità con cui si muove la scimmia é:

$$V_{sx} = V_{six}$$

$$V_{sy} = -g t + V_{siy}$$

sostituendo le condizioni iniziali:

$$V_{fx} = V_0 \cos(\theta)$$

$$V_{fy} = -g t + V_0 \sin(\theta)$$

$$V_{sx} = 0$$

$$V_{sy} = -g t$$

integrando le velocità otteniamo le equazioni della traiettoria della freccia e della scimmia

$$P_{fx} = \int_0^t V_{fx} dt$$

$$P_{fy} = \int_0^t V_{fy} dt$$

$$P_{sx} = \int_0^t V_{sx} dt + D$$

$$P_{sy} = \int_0^t V_{sy} dt + H$$

sostituendo le espressioni delle velocità

$$P_{sy} = -\frac{1}{2} g t^2 + H$$

$$P_{sx} = D$$

$$P_{fy} = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin(\theta) t$$

$$P_{fx} = V_o \cos(\theta) t$$

Risposta al quesito a)

L'istante in cui la freccia colpisce la scimmia si ottiene quando le due traiettorie si incrociano. Ovvero quando scimmia e freccia si trovano nello stesso posto.

Uguagliando le coordinate si ottiene questo istante

$$P_{fx} = P_{sx}$$

$$V_o \cos(\theta) t = D$$

$$P_{fy} = P_{sy}$$

$$-\frac{1}{2} g t^2 + V_o \sin(\theta) t = -\frac{1}{2} g t^2 + H$$

$$V_o \sin(\theta) t = H$$

Uguagliando le seguenti....

$$t = \frac{D}{V_o \cos(\theta)} \quad t = \frac{H}{V_o \sin(\theta)}$$

...si ottiene la condizione per cui la freccia colpisce la scimmia:

$$\frac{H}{D} = \tan(\theta)$$

Risposta al quesito b) e c)

L'istante in cui la freccia tocca il suolo si ha per:

$$P_{fy} = 0$$

$$t = 2 \frac{V_o \sin(\theta)}{g}$$

La posizione x della freccia quando tocca il suolo:

$$P_{fx} = 2 \frac{V_o^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g}$$

ora la posizione della freccia deve essere maggiore o uguale a D se si vuole colpire la scimmia.

In altre parole la gittata della freccia deve essere superiore a D, per colpire la scimmia.

$$P_{fx} \geq D$$

$$2 \frac{V_o^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g} \geq D$$

$$V_o^2 \geq \frac{1}{2} \frac{D g}{\cos(\theta) \sin(\theta)}$$

Quando $(V_o)^2$ é uguale a questa espressione, la scimmia viene colpita nell'istante in cui tocca il suolo.

Sostituendo i numeri:

$$D = 17.3 \, m \quad H = 10 \, m \quad g = 9.81 \, \frac{m}{s^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{H}{D}\right)$$

$$V_o = 14 \, \frac{m}{s}$$