SOLUZIONE ESERCIZIO sul MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

Risposta a)

L'accelerazione angolare del disco é costante:

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial t}\omega$$

per cui integrando si ottiene la velocità angolare di rotazione: la legge seguita é lineare.

$$\omega = \alpha t + \omega o \qquad \textit{(eq. 1)}$$

La velocità di rotazione angolare iniziale é nulla perchè il disco parte da fermo

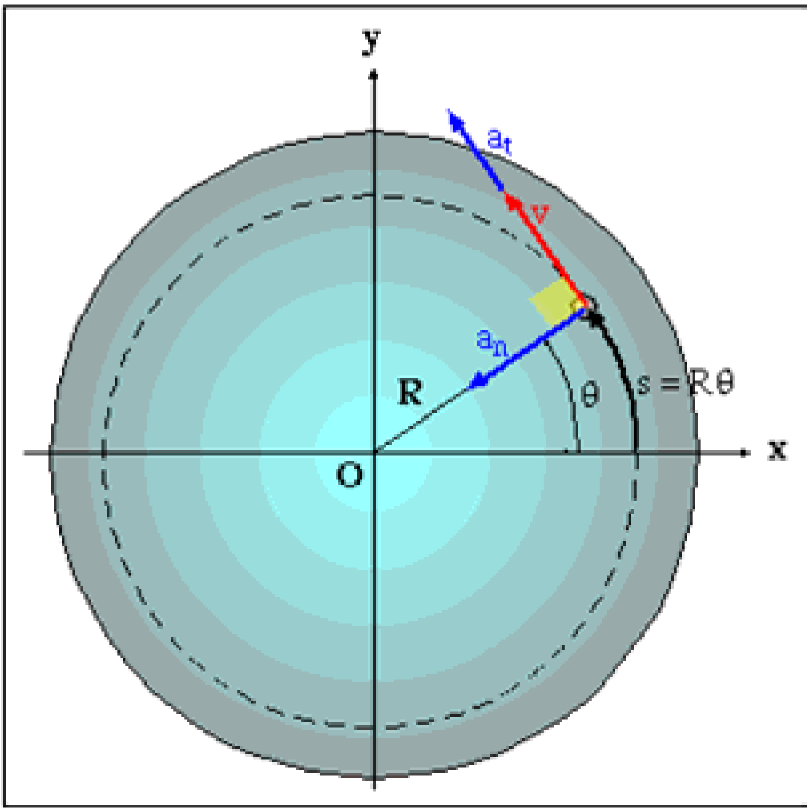
$$\omega o = 0$$

La derivata della posizione angolare é la velocità di rotazione angolare:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \omega$$

Per rispondere al secondo quesito vengono proposti tre procedimenti:la motivazione sta nel fatto che a volte la scelta del sistema di riferimento di coordinate puo' semplificare molto i conti. Ovviamente i risultati sono gli stessi.

COORDINATE CURVILINEE



$s = R\theta$ *derivando rispetto al tempo:* $v = \frac{\partial}{\partial t}s$ $v = R\frac{\partial}{\partial t}\theta$

ricordando che la derivata della posizione angolare é la velocità di rotazione angolare

$\omega = \frac{\partial}{\partial t}\theta$

si ottiene la velocità di tangenziale del punto solidale al disco

$v = R\omega$ *(eq. 2)*

$\omega = \frac{v}{R}$

sostituendo l'espressione di ω:

$v = \alpha R t$ *(eq. 3)*

Le componenti dell'accelerazione sono:

Accelerazione tangenziale

$a_T = \frac{\partial}{\partial t}v$ *sostituendo l'eq.3* $a_T = \alpha R$ *(eq. 4)*

Accelerazione centripeta:

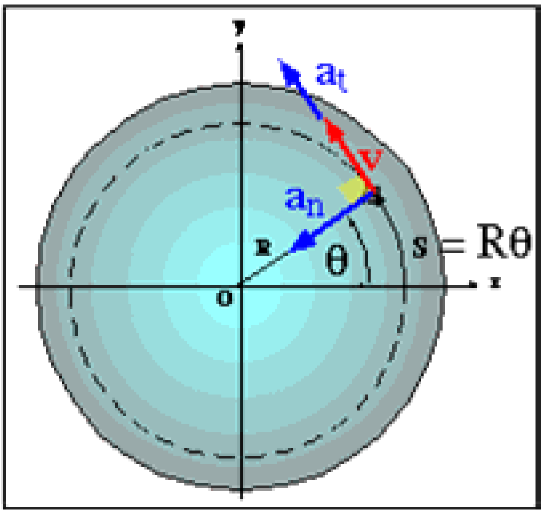
$a_N = R\omega^2$ *o equivalentemente* $a_N = R\left(\frac{v}{R}\right)^2$

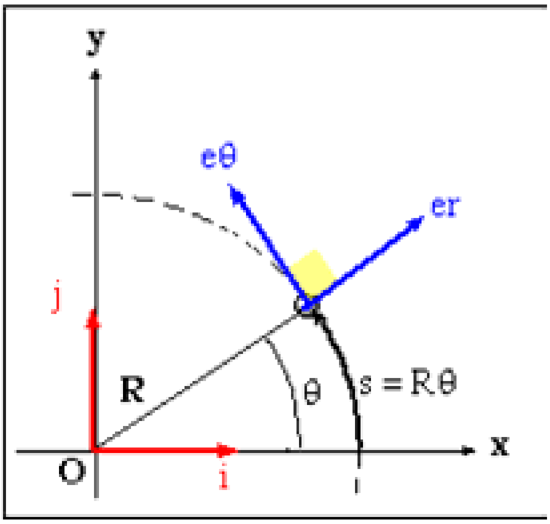
oppure $a_N = R(\alpha t)^2$ *(eq. 5)*

Il modulo dell'accelerazione:

$a = \sqrt{a_T^{\ 2} + a_N^{\ 2}}$ *sostituendo la eq. 4 e eq. 5* $a = \sqrt{\alpha^4 R^2 t^4 + (\alpha R)^2}$

COORDINATE POLARI





$\overline{\mathbf{er}}$ versore del vettore R (*vedi figura*)
$\overline{\mathbf{e\theta}}$ versore ortogonale al vettore R (*vedi figura*)
Espressione dei versori radiale e tangente alla traiettoria, nel punto P

$\overline{\mathbf{e\theta}} = -\sin(\theta)\,\overline{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\,\overline{\mathbf{j}}$ $\quad \overline{\mathbf{er}} = \cos(\theta)\,\overline{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\,\overline{\mathbf{j}}$

NB: $\overline{\mathbf{er}}$, $\overline{\mathbf{e\theta}}$, $\overline{\mathbf{i}}$, $\overline{\mathbf{j}}$ vanno intesi come vettori

$\overline{\mathbf{i}}$ e $\overline{\mathbf{j}}$ versori degli assi cartesiani X e Y rispettivamente

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{er} = \overline{j}\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\theta - \overline{i}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\theta \qquad \frac{\partial}{\partial t}\overline{er} = (j\cos[\theta] - i\sin[\theta])\omega$$

raccogliendo ω e sostituendo $\overline{\boldsymbol{e\theta}}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{er} = \omega\,\overline{e\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{e\theta} = -\overline{i}\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\theta - \overline{j}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\theta \qquad \frac{\partial}{\partial t}\overline{e\theta} = -\overline{i}\,\omega\cos(\theta) - \overline{j}\,\omega\sin(\theta)$$

raccogliendo ω e sostituendo $\overline{\boldsymbol{er}}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{e\theta} = -\omega\,\overline{er}$$

Si calcolano ora le velocità e accelerazioni del punto, in coordinate polari:

$\overline{r} = R\,\overline{er}$ *derivando rispetto al tempo:* $\frac{\partial}{\partial t}\overline{r} = R\frac{\partial}{\partial t}\overline{er}$

sostituendo l'espressione della derivata del versore: $\frac{\partial}{\partial t}\overline{r} = R\,\omega\,\overline{e\theta}$

La velocità del punto é tangenziale (infatti ha la direzione di $\overline{e\theta}$):

$V = R\,\omega$ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\overline{r} = V\,\overline{e\theta}$ *(eq. 2)*

L'accelerazione del punto ha due componenti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{r}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(R\,\omega\,\overline{e\theta})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{r}\right) = R\,\overline{e\theta}\frac{\partial}{\partial t}\omega + R\,\omega\frac{\partial}{\partial t}\overline{e\theta}$$

sostituendo l'espressione della derivata del versore e della velocità angolare:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{r}\right) = \alpha\,R\,\overline{e\theta} - R\,\omega^2\,\overline{er}$$

Una componente radiale: accelerazione centripeta (rivolta verso il centro):

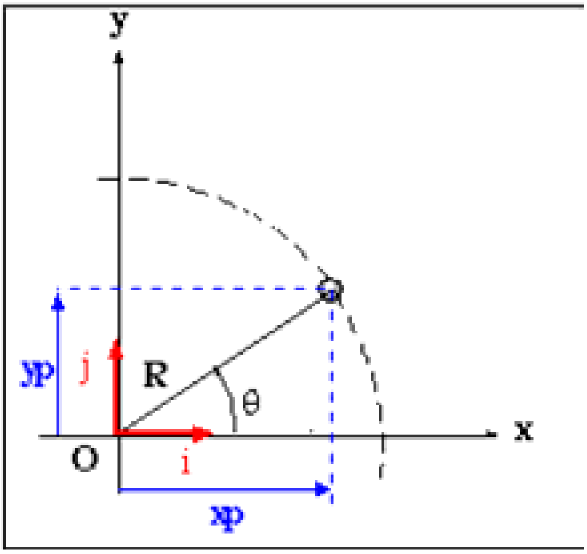
$\overline{a}_N = -R\,\omega^2\,\overline{er}$ *sostituendo eq.1:* $\overline{a}_N = -R(\alpha\,t + \omega o)^2\,\overline{er}$

Una componente tangenziale: accelerazione tangenziale
(ortogonale a quella centripeta e nel verso di avanzamento):

$\overline{a}_T = \alpha\,R\,\overline{e\theta}$

Il modulo dell'accelerazione si calcola come nell'approccio precedente.

COORDINATE CARTESIANE



La posizione del punto P é individuata in questo caso dalle coordinate cartesiane **xp** e **yp**.
In questo caso la rappresentazione usata é quella matriciale, che é del tutto equivalente a quella vettoriale.

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} xp \\ yp \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \cos[\theta] \\ \sin[\theta] \end{pmatrix}$$

dove la prima riga corrisponde alla priezione lungo il versore i (asse X), e la seconda componente la proiezione lungo il versore j (asse Y).

La velocità del punto é tangenziale (infatti ha la direzione di eθ):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} xp \\ \frac{\partial}{\partial t} yp \end{pmatrix} = R\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta\right)\begin{pmatrix} -\sin[\theta] \\ \cos[\theta] \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} xp \\ \frac{\partial}{\partial t} yp \end{pmatrix} = R\,\omega\begin{pmatrix} -\sin[\theta] \\ \cos[\theta] \end{pmatrix}$$

Nuovamente si ritrova che l'accelerazione ha due componenti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} xp \\ \frac{\partial}{\partial t} yp \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\left(R\,\omega\begin{bmatrix} -\sin\{\theta\} \\ \cos\{\theta\} \end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} xp \\ \frac{\partial}{\partial t} yp \end{pmatrix} = R\left(\frac{\partial}{\partial t}\omega\right)\begin{pmatrix} -\sin[\theta] \\ \cos[\theta] \end{pmatrix} - R\,\omega^2\begin{pmatrix} \cos[\theta] \\ \sin[\theta] \end{pmatrix}$$

Il risultato é uguale a quello già trovato in precedenza:Infatti é sufficiente considerare come si esprimono i versori $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$ *in funzione dei versori* $\bar{\mathbf{er}}$, $\bar{\mathbf{e\theta}}$

Una componente radiale: accelerazione centripeta (rivolta verso il centro):

$$\bar{a}_N = -R\,\omega^2\begin{pmatrix} \cos[\theta] \\ \sin[\theta] \end{pmatrix} \qquad \bar{a}_N = -R(\alpha\,t + \omega o)^2\begin{pmatrix} \cos[\theta] \\ \sin[\theta] \end{pmatrix}$$

Una componente tangenziale: accelerazione tangenziale
(ortogonale a quella centripeta e nel verso di avanzamento):

$$\bar{a}_T = R\left(\frac{\partial}{\partial t}\omega\right)\begin{pmatrix} -\sin[\theta] \\ \cos[\theta] \end{pmatrix}$$

sostituendo eq.1:

$$\bar{a}_T = \alpha\,R\begin{pmatrix} -\sin[\theta] \\ \cos[\theta] \end{pmatrix}$$