$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}$$

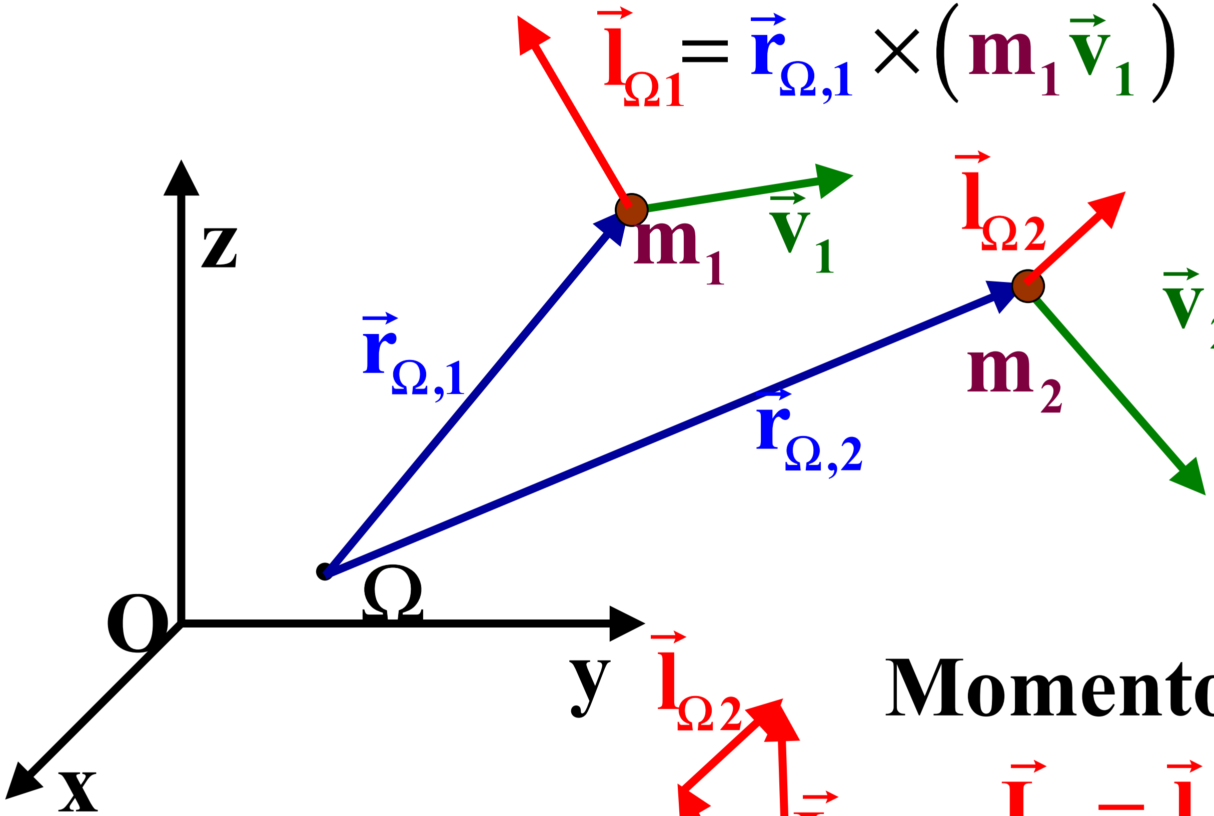
$$M\vec{v}_{cm} = \vec{P}$$

Da cui la prima legge cardinale diventa

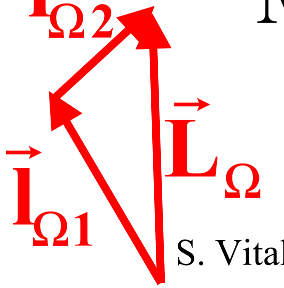
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{tot}^{ext}$$

Il cm si muove come un punto di massa M soggetto ad una forza $\vec{F}_{tot}^{ext}$

La seconda legge cardinale della meccanica e **il momento angolare totale**



Momenti angolari rispetto ad un "polo" fisso W



Momento angolare totale

$$\vec{L}_{\Omega} = \vec{l}_{\Omega 1} + \vec{l}_{\Omega 2} + \ldots + \vec{l}_{\Omega N}$$

Momento angolare totale

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{k=1}^{N} \vec{l}_{\Omega k} \equiv \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega k} \times \left(m_k \vec{v}_k \right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{r}_k - \vec{r}_\Omega \right) \times \left(m_k \vec{v}_k \right)$$

La sua derivata

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{d\left[\left(\vec{r}_k - \vec{r}_\Omega \right) \times \left(m_k \vec{v}_k \right) \right]}{dt}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{d\left[\left(\vec{r}_k - \vec{r}_\Omega \right) \right]}{dt} \times \left(m_k \vec{v}_k \right) + \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{r}_k - \vec{r}_\Omega \right) \times \frac{d\left(m_k \vec{v}_k \right)}{dt}$$

Newton

$$\vec{r}_\Omega = \text{cost} \rightarrow \quad = \sum_{k=1}^{N} \cancel{\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times \left(m_k \vec{v}_k \right)} + \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{r}_k - \vec{r}_\Omega \right) \times \vec{F}_k$$

Dalla Legge di Newton:
La derivata del momento angolare totale rispetto ad un polo fisso è uguale alla somma di tutti i momenti di tutte le forze

$$\frac{d\vec{L}_{\Omega}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega k} \times \vec{F}_k$$

Ma (vedi lezione 10):

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{ext} \underbrace{+\vec{F}_{k,1} + \vec{F}_{k,2} + \vec{F}_{k,m\neq k} + \dots}_{\text{Generate dalle altre particelle del sistema}} = \vec{F}_k^{ext} + \vec{F}_k^{int}$$

Generate da corpi esterni

Dalla legge di Newton (continua)

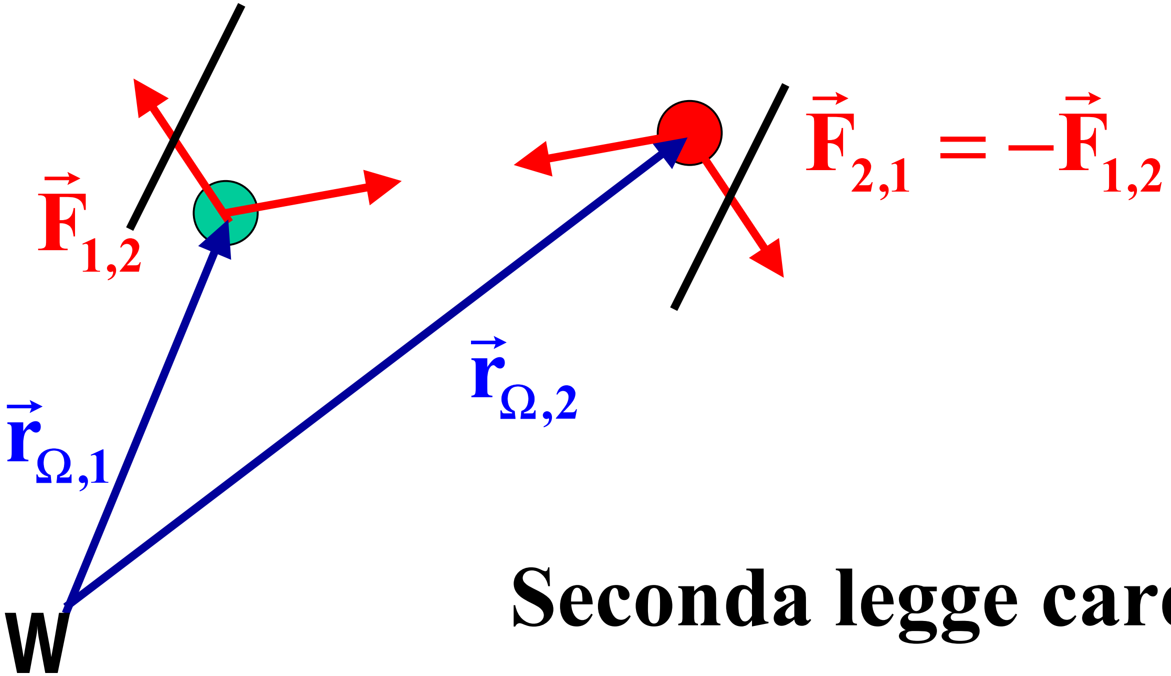
$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega k} \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega k} \times \vec{F}_k^{ext} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega k} \times \vec{F}_k^{int}$$

$$\equiv \vec{M}_\Omega^{ext} + \vec{M}_\Omega^{int}$$

Seconda legge cardinale della meccanica

$$\vec{M}_\Omega^{int} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{M}_\Omega^{ext}$$

Prima legge cardinale:



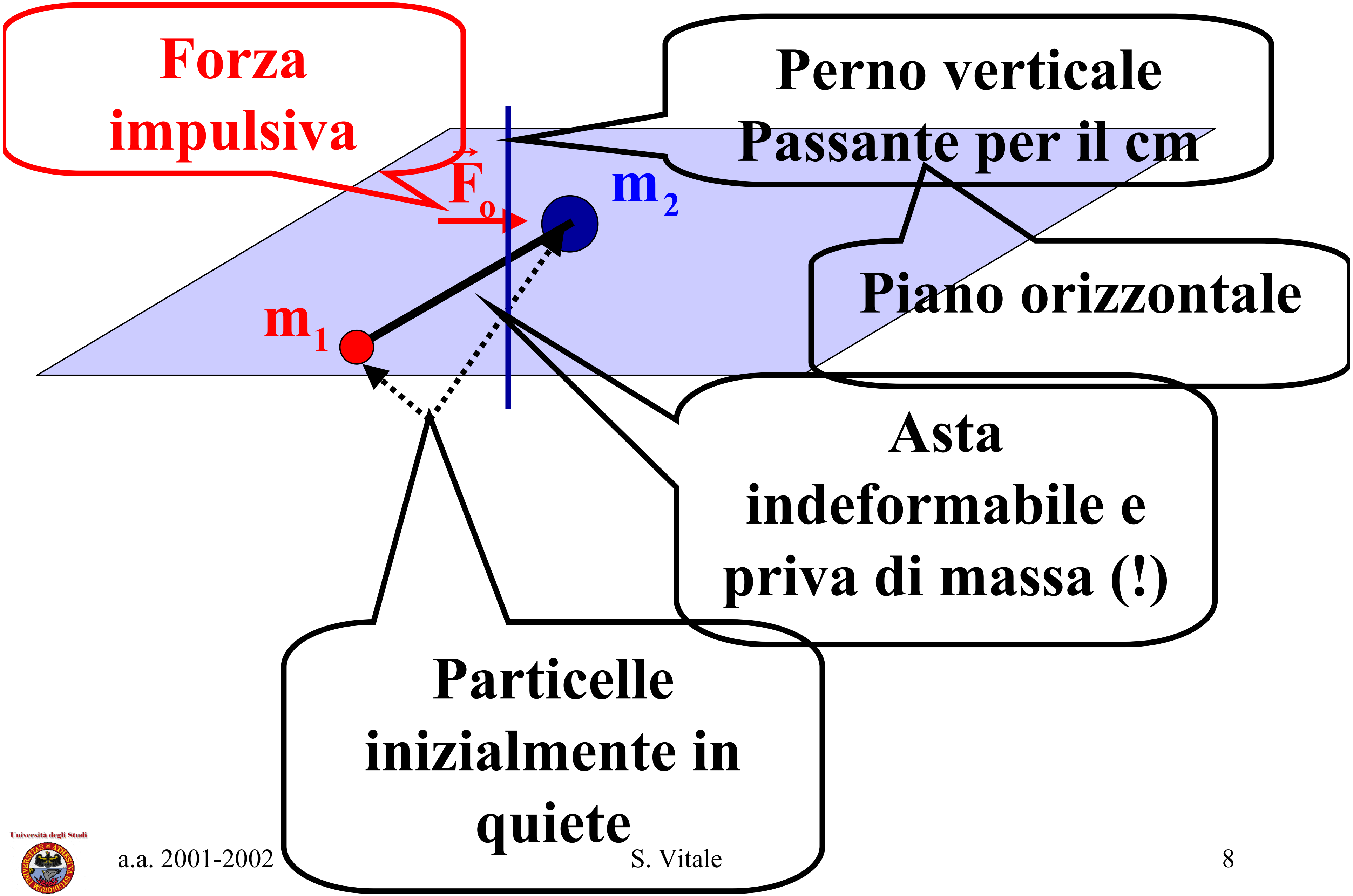
Seconda legge cardinale

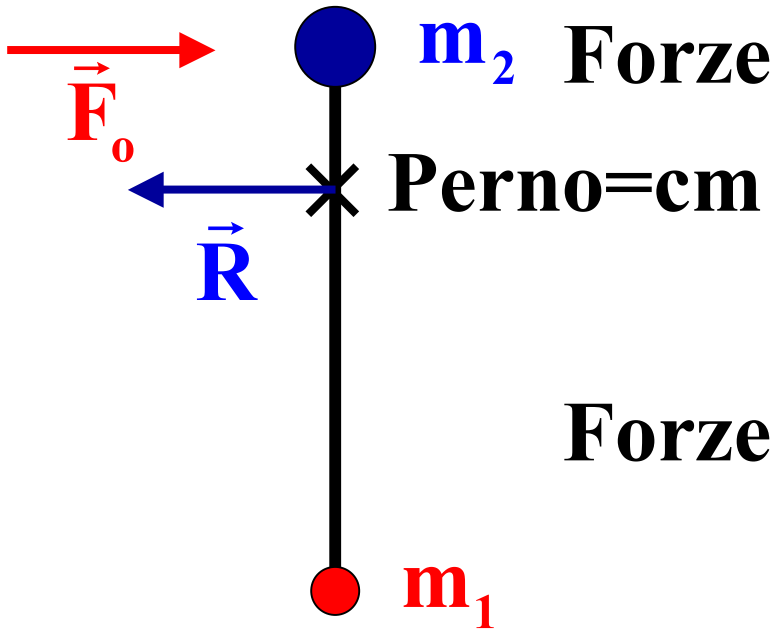
$$\vec{M}^{int} = \vec{r}_{\Omega,1} \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_{\Omega,2} \times \vec{F}_{2,1} = \vec{r}_{\Omega,1} \times \vec{F}_{1,2} - \vec{r}_{\Omega,2} \times \vec{F}_{1,2}$$

$$= \left(\vec{r}_{\Omega,1} - \vec{r}_{\Omega,2}\right) \times \vec{F}_{1,2} = \vec{r}_{2,1} \times \vec{F}_{1,2} = 0 \quad \rightarrow \vec{r}_{2,1} \parallel \vec{F}_{2,1}$$

Due particelle si possono scambiare solo una coppia di forze uguali in modulo e contrarie in verso (prima legge cardinale) e dirette come la congiungente fra le due particelle (seconda legge cardinale)

Le leggi cardinali al lavoro





Forze interne: reazione dell'asta

Forze esterne: ~~**Gravità**~~

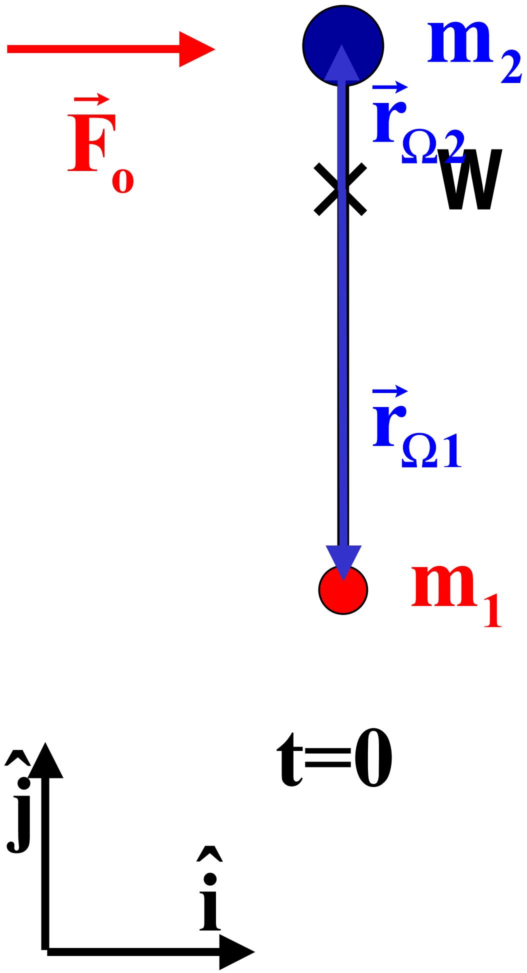
~~**Reazione del piano**~~

Forza impulsiva

Reazione del perno

$$(m_1 + m_2)\underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}} = \vec{F}^{ext}_{tot} = \vec{F}_o + \vec{R} \longrightarrow \vec{F}_o = -\vec{R}$$

1) Il momento angolare



$$\vec{l}_1 = \vec{r}_{\Omega 1} \times m_1 \vec{v}_1 \;\; = 0$$

è

0

$$\vec{l}_2 = \vec{r}_{\Omega 2} \times m_2 \vec{v}_2 \;\; = 0$$

è

0

$$\vec{L}_\Omega = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{r}_{\Omega 2} \times \vec{F}_o$$

Forza impulsiva → $\vec{F}_o(t') \neq 0 \quad 0 < t' < \delta t$

$$\vec{L}_\Omega(t > \delta t) = \int_0^t \vec{r}_{\Omega 2}(t') \times \vec{F}_o(t')\,dt' \approx \vec{r}_{\Omega 2}(0) \times \int_0^{\delta t} \vec{F}_o(t')\,dt'$$

$$\vec{L}_\Omega(t > \delta t) = \vec{r}_{\Omega 2}(0) \times \int_0^{\delta t} \vec{F}_o(t')\,dt' = \vec{r}_{\Omega 2}(0) \times \vec{I}_o$$

$$= \left|\vec{r}_{\Omega 2}(0)\right| \hat{j} \times \left|\vec{I}_o\right| \hat{i} \quad = -\left|\vec{r}_{\Omega 2}(0)\right| \left|\vec{I}_o\right| \hat{k}$$

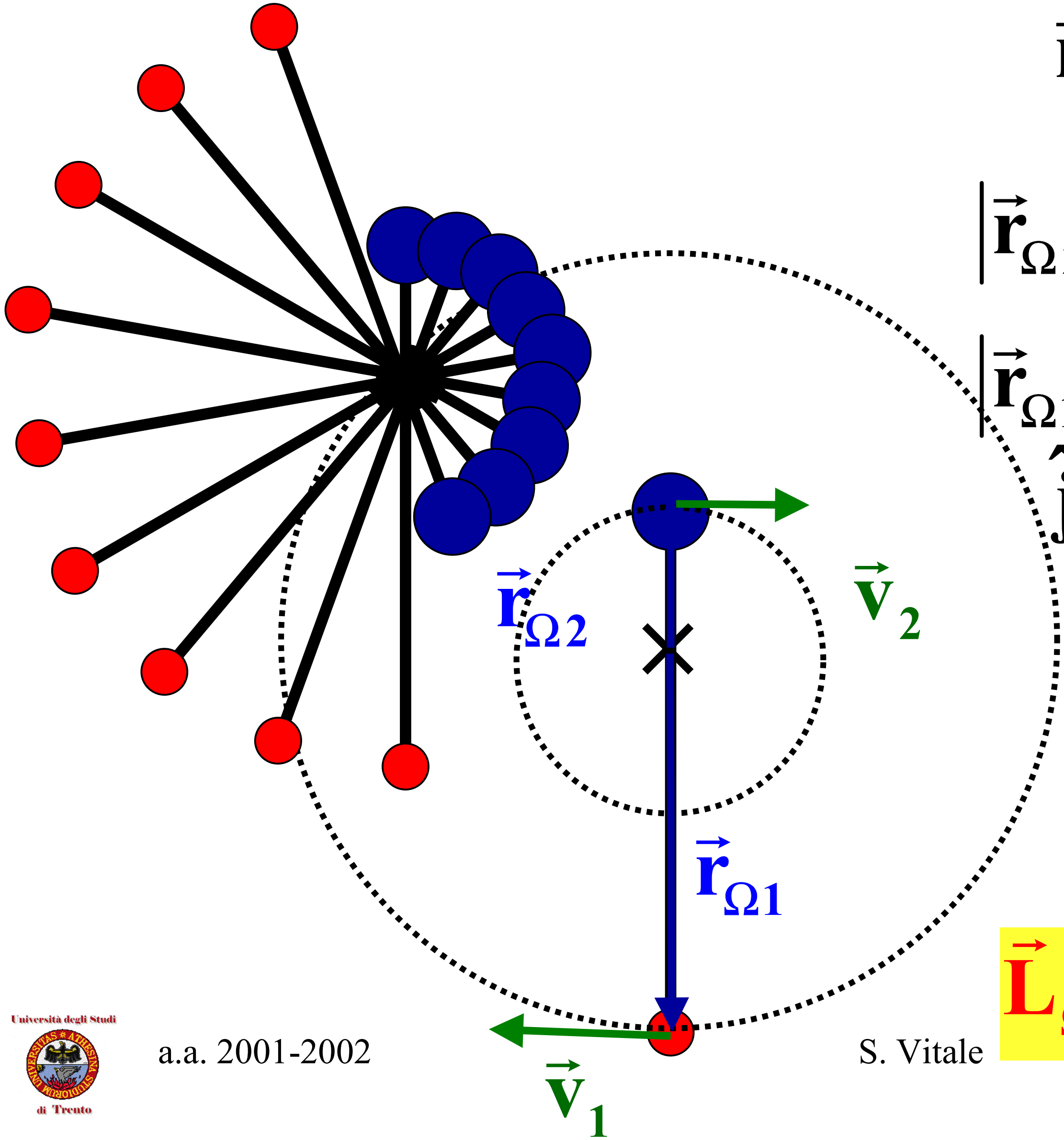
Per t>dt

$$\vec{M}_{\Omega}^{ext} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_{\Omega}}{dt} = 0 \qquad \rightarrow \quad \vec{L}_{\Omega} = \text{costante}$$

Il momento angolare si conserva

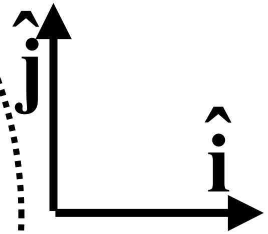
2)Le due particelle possono solo fare un moto circolare con la stessa velocità angolare ω



$$\vec{r}_{\Omega 2} \perp \vec{v}_2 \qquad |\vec{v}_2| = |\vec{r}_{\Omega 2}||\omega|$$

$$|\vec{r}_{\Omega 2} \times m_2 \vec{v}_2| = m_2 |\vec{r}_{\Omega 2}|^2 |\omega|$$

$$|\vec{r}_{\Omega 1} \times m_1 \vec{v}_1| = m_1 |\vec{r}_{\Omega 1}|^2 |\omega|$$



$$\vec{l}_1 = m_1 |\vec{r}_{\Omega 1}|^2 \omega \hat{k}$$

$$\vec{l}_2 = m_2 |\vec{r}_{\Omega 2}|^2 \omega \hat{k}$$

$$\vec{L}_\Omega = \omega \hat{k} \left(m_1 r_{\Omega 1}^2 + m_2 r_{\Omega 2}^2 \right)$$

$$\mathbf{1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{2}$$

$$\vec{L}_\Omega(t>\delta t) = -\left|\vec{r}_{\Omega 2}(0)\right|\left|\vec{I}_o\right|\hat{k} \qquad \vec{L}_\Omega = \omega\hat{k}\left(m_1 r_{\Omega 1}^2 + m_2 r_{\Omega 2}^2\right)$$

$$-r_{\Omega 2}\left|I_o\right| = \omega\left(m_1 r_{\Omega 1}^2 + m_2 r_{\Omega 2}^2\right)$$

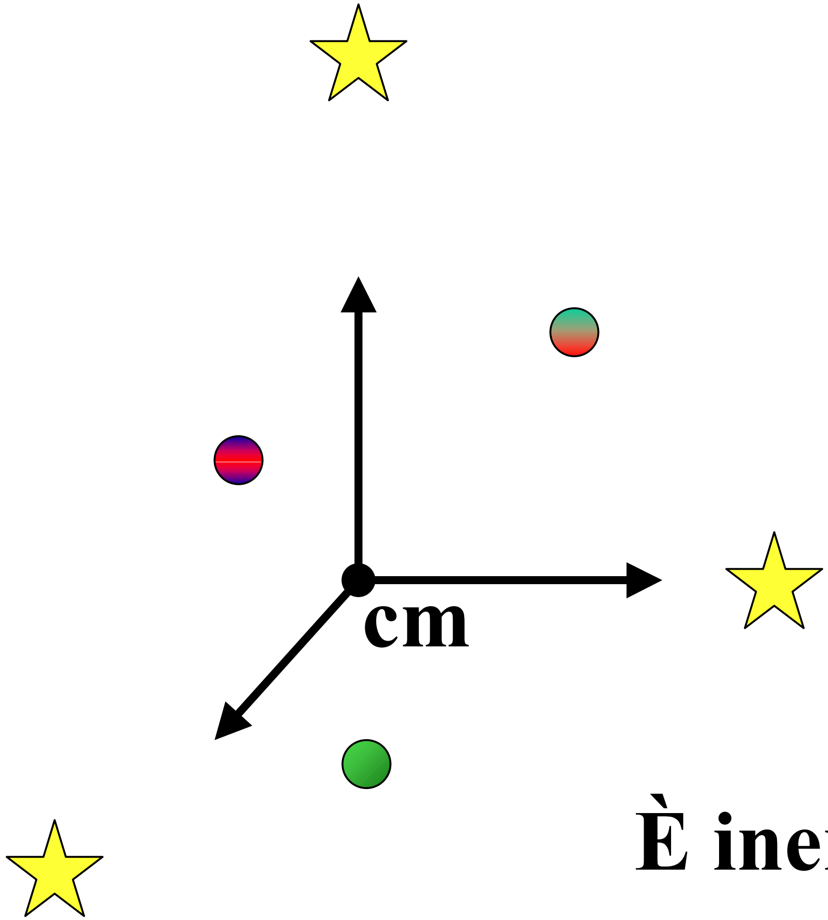
$$\Downarrow$$

$$\omega = \frac{-r_{\Omega 2}\left|I_o\right|}{m_1 r_{\Omega 1}^2 + m_2 r_{\Omega 2}^2}$$

Per t> dt il sistema ruota con velocità angolare costante w

Un sistema di riferimento notevole:

il sistema del centro di massa

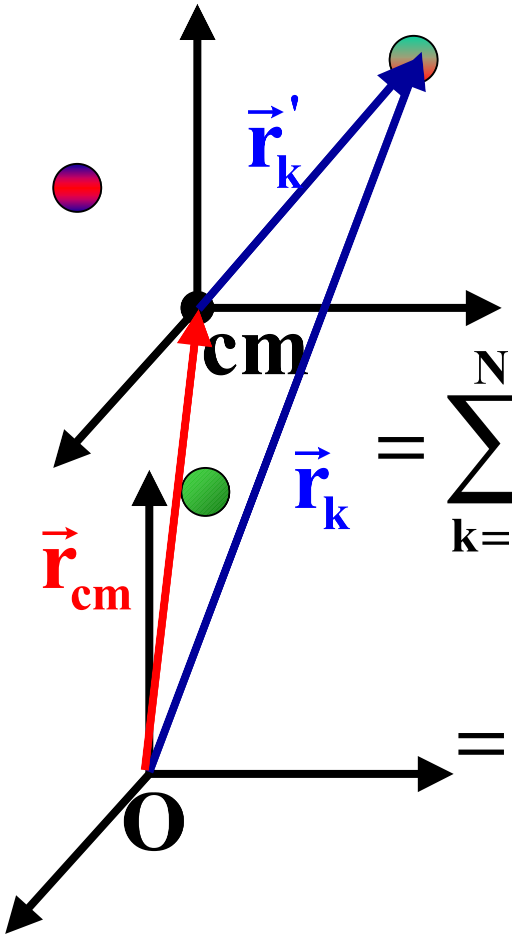


Origine nel cm e assi che puntano le stelle fisse

$$\vec{\Omega} = 0 \quad \vec{a}_O = \vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{tot}^{ext}}{M}$$

È inerziale solo se $\vec{F}_{tot}^{ext} = 0$

Trasformazione di raggi vettori $\vec{r}_k^{\,\prime} = \vec{r}_k - \vec{r}_{cm}$



ovviamente $\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k^{\,\prime} =$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_{cm} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k - \vec{r}_{cm} \sum_{k=1}^{N} m_k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \Big/ \sum_{k=1}^{N} m_k - \vec{r}_{cm} \right) = 0$$

Cioè: $\vec{r}_{cm}^{\,\prime} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k^{\,\prime} \Big/ \sum_{k=1}^{N} m_k = 0$

Poiché gli assi non ruotano:

$$\vec{r}_k' = \vec{r}_k - \vec{r}_{cm} \quad \rightarrow \vec{v}_k' = \vec{v}_k - \vec{v}_{cm} \quad \rightarrow \vec{v}_k = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_k'$$

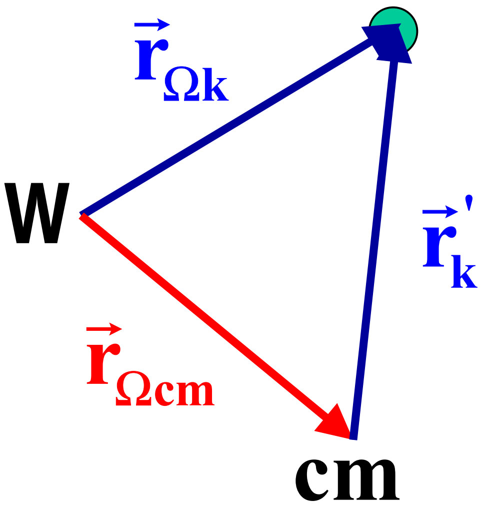
$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k' = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k'\right) = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k' = 0$$

Il caso notevole di 2 particelle

$$\vec{p}_1' \equiv m_1 \vec{v}_1' = -m_2 \vec{v}_2' \equiv -\vec{p}_2'$$

Una decomposizione notevole del momento angolare



$$\vec{L}_\Omega = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega k} \times m_k \vec{v}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{r}_{\Omega cm} + \vec{r}_k^{\,'} \right) \times m_k \left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_k^{\,'} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega cm} \times m_k \vec{v}_{cm} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega cm} \times m_k \vec{v}_k^{\,'}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k^{\,'} \times m_k \vec{v}_{cm} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k^{\,'} \times m_k \vec{v}_k^{\,'}$$

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega cm} \times m_k \vec{v}_{cm} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega cm} \times m_k \vec{v}_k'$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times m_k \vec{v}_{cm} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times m_k \vec{v}_k'$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega cm} \times m_k \vec{v}_k' = \vec{r}_{\Omega cm} \times \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k' = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k' = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times m_k \vec{v}_{cm} = \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k' \right) \times \vec{v}_{cm} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k' = 0$$

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_{\Omega cm} \times m_k \vec{v}_{cm} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times m_k \vec{v}_k'$$

$$= \vec{r}_{\Omega cm} \times \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \right) \vec{v}_{cm} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times m_k \vec{v}_k'$$

$$= \vec{r}_{\Omega cm} \times M\vec{v}_{cm} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times m_k \vec{v}_k'$$

Momento di un punto di massa M che si muove con il cm

Momento del moto intorno al cm

Sono termini separati

$$\frac{d\left(\vec{r}_{\Omega cm}\times M\vec{v}_{cm}\right)}{dt}=\frac{d\vec{r}_{\Omega cm}}{dt}\times M\vec{v}_{cm}+\vec{r}_{\Omega cm}\times M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$=\cancel{\vec{v}_{cm}\times M\vec{v}_{cm}}+\vec{r}_{\Omega cm}\times\vec{F}^{ext}_{tot}$$

$$\frac{d\left(\sum_{k=1}^{N}\vec{r}'_k\times m_k\vec{v}'_k\right)}{dt}=\sum_{k=1}^{N}\cancel{\frac{d\vec{r}'_k}{dt}\times m_k\vec{v}'_k}+\vec{r}'_k\times m_k\frac{d\vec{v}'_k}{dt}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}'_k\times\left(\vec{F}^{ext}_k-m_k\vec{a}_{cm}\right)=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}'_k\times\vec{F}^{ext}_k-\left(\cancel{\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{r}'_k}\right)\times\vec{a}_{cm}$$

Riassumendo

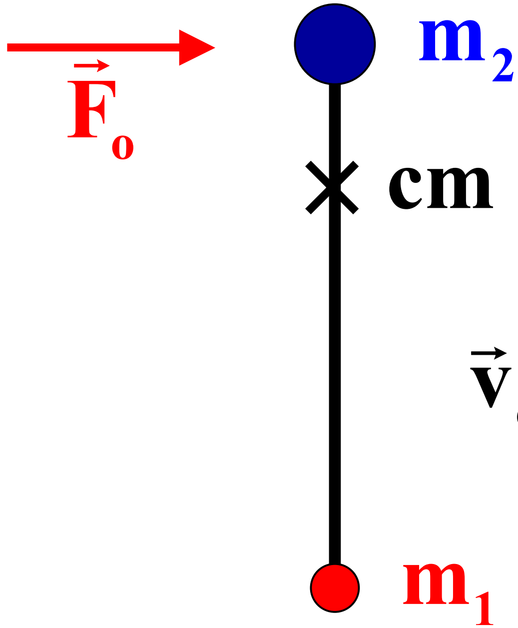
$$\vec{L}_{\Omega}^{cm} = \vec{r}_{\Omega cm} \times M\vec{v}_{cm}$$

$$\vec{L}'_{cm} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}'_k$$

$$\frac{d\vec{L}_{\Omega}^{cm}}{dt} = \vec{r}_{\Omega,cm} \times \vec{F}_{tot}^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}'_{cm}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}'_k \times F_k^{ext}$$

Una forza impulsiva, partenza da fermo e niente perno



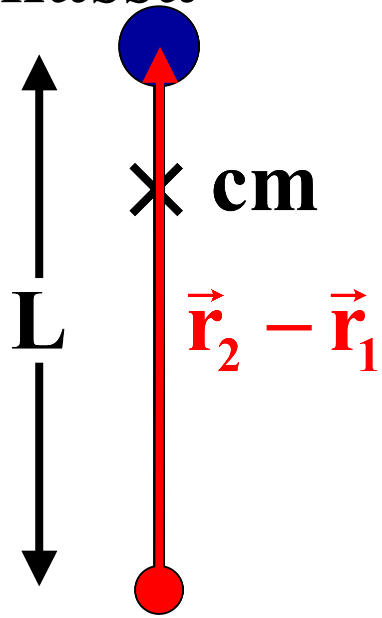
$$\left(m_1+m_2\right)\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}=\vec{F}_o$$

$$\vec{v}_{cm}\left(t>\delta t\right)=\int_0^{\delta t}\frac{\vec{F}_o\left(t'\right)}{m_1+m_2}dt'=\frac{\vec{I}_o}{m_1+m_2}$$

Il centro di massa effettua un moto rettilineo uniforme

Momenti rispetto al centro di massa

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{r}_{cm2}\times\vec{F}_o$$



$$\vec{L}'_{cm}\left(t>\delta t\right) = \int_0^t \vec{r}_{cm2}\left(t'\right)\times\vec{F}_o\left(t'\right)dt'$$

$$\approx \vec{r}_{cm2}\left(0\right)\times\int_0^{\delta t}\vec{F}_o\left(t'\right)dt' = \vec{r}_{cm2}\left(0\right)\times\vec{I}_o$$

$$= \left|\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)\right|\hat{j}\times\left|\vec{I}_o\right|\hat{i} \quad \boxed{= -\frac{m_1 L}{m_1+m_2}\left|\vec{I}_o\right|\hat{k}}$$

Nel sistema (inerziale) del centro di massa

$$\vec{l}_2 = m_2 \left|\vec{r}_{cm2}\right|^2 \omega\hat{k} = m_2 \left(\frac{m_1 L}{m_1 + m_2}\right)^2 \omega\hat{k}$$

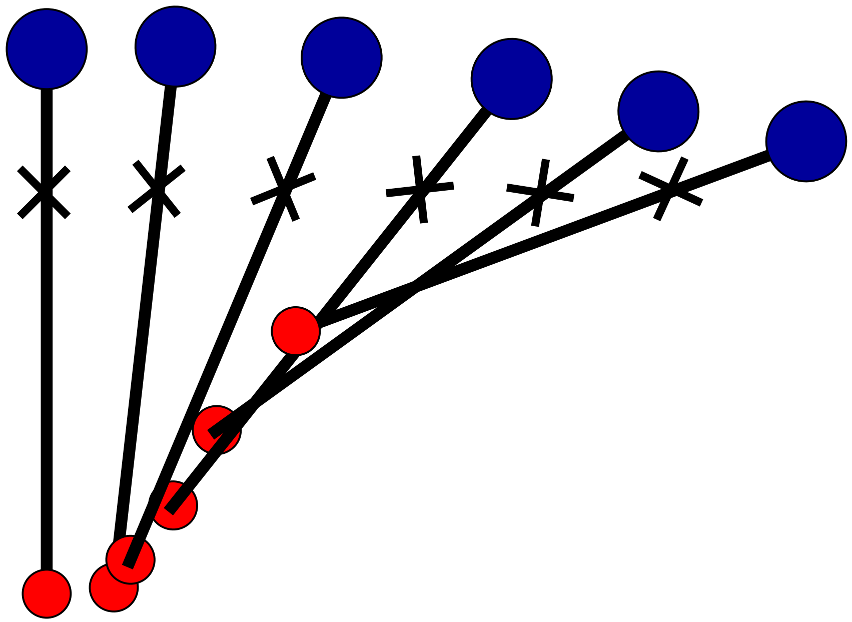
$$\vec{l}_1 = m_1 \left|\vec{r}_{cm1}\right|^2 \omega\hat{k} = m_1 \left(\frac{m_2 L}{m_1 + m_2}\right)^2 \omega\hat{k}$$

$$\vec{L}'_{cm} = L^2\omega\hat{k}\left[m_1 \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + m_2 \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right]$$

$$= L^2\omega\hat{k}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\cancel{(m_1+m_2)} \quad \boxed{= L^2\omega\hat{k}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

$$\vec{L}'_{cm} = -\frac{m_1 L}{m_1 + m_2}\left|\vec{I}_o\right|\hat{k}$$

$$\vec{L}'_{cm} = L^2\omega\hat{k}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



$$\omega = -\frac{\left|\vec{I}_o\right|}{m_2 L}$$

La separazione del moto in moto del cm e moto intorno al centro di massa: la storia continua:

$$E_{tot}^{kin} \equiv \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2}m_N v_N^2$$

$$E_{tot}^{kin} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\vec{v}_k' + \vec{v}_{cm}\right)\cdot\left(\vec{v}_k' + \vec{v}_{cm}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\vec{v}_k'^2 + 2\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_k' + v_{cm}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k'^2 + \vec{v}_{cm}\cdot\cancel{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k'} + \frac{1}{2}v_{cm}^2\sum_{k=1}^{N} m_k$$

In conclusione

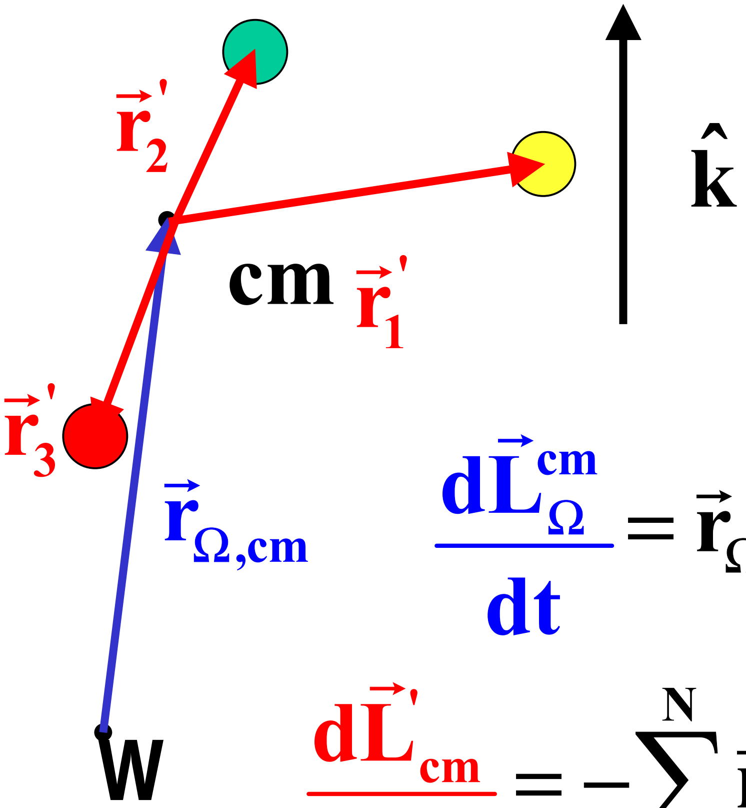
$$E_{tot}^{kin} = \boxed{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^{\,\prime 2}} + \boxed{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2}$$

Moto intorno al centro di massa

Moto del centro di massa

Un esempio: la forza peso

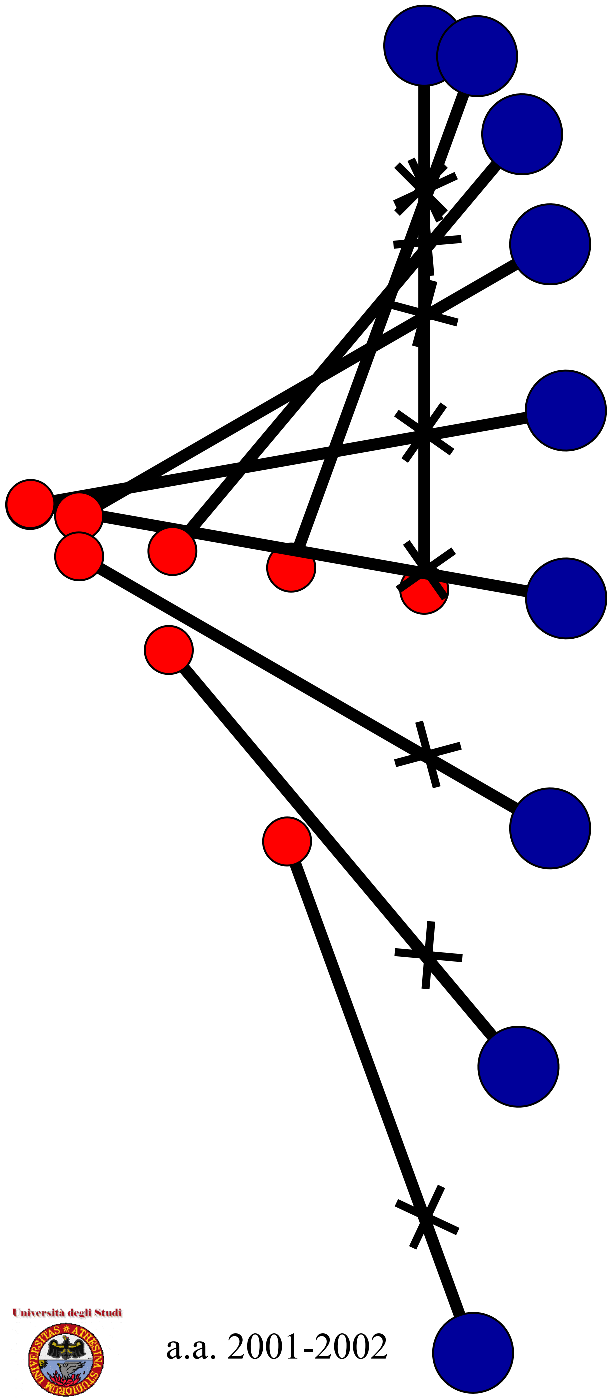
$$\cancel{M}\vec{a}_{cm} = -\sum_{j=1}^{N} m_j g\hat{k} = -g\hat{k}\cancel{M}$$



Il centro di massa “cade” come una particella

$$\frac{d\vec{L}^{cm}_{\Omega}}{dt} = \vec{r}_{\Omega,cm}\times\sum_{j=1}^{N} -g m_j\hat{k} = -\vec{r}_{\Omega,cm}\times gM\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{L}'_{cm}}{dt} = -\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j^{\,'}\times\left(m_j g\hat{k}\right) = -\underbrace{\cancel{\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{r}_j^{\,'}\right)}}_{=0}\times\left(g\hat{k}\right)$$



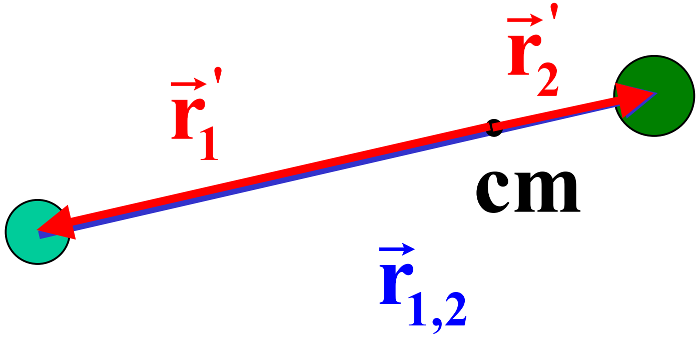
La forza peso non ha momento rispetto al cm

$$\frac{d\vec{L}'_{cm}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \vec{L}'_{cm} = \cos t$$

Il momento angolare si conserva mentre il centro di massa cade con accelerazione costante

Il problema dei "due corpi"

Due particelle soggette solo alla loro interazione



$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}^{ext}_{tot} = 0$$

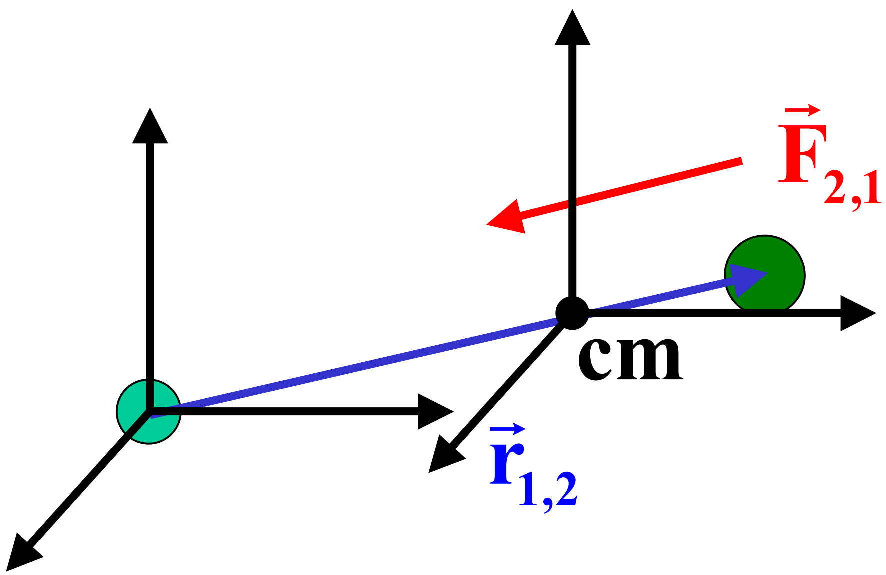
Il sistema del cm è inerziale

$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_{1,2} \rightarrow m_2\vec{r}_2' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_{1,2} \equiv \boxed{\mu}\,\vec{r}_{1,2}$$

Massa ridotta

$$m_2 \vec{r}_2^{\,'} = \mu \vec{r}_{1,2}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2^{\,'}}{dt} = \mu \frac{d^2 \vec{r}_{1,2}}{dt^2} = \vec{F}_{2,1}$$



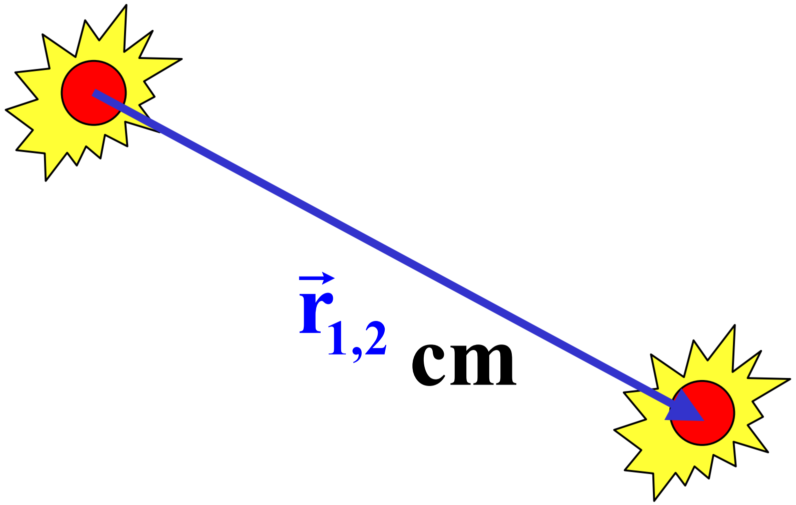
Il sistema del cm

Il sistema della particella 1

Nel sistema della particella 1, la massa 2 sente la forza $\vec{F}_{2,1}$ ma ha massa m

Un esempio: l'orbita di una stella binaria

(moto circolare uniforme)



Condizione di equilibrio

$$\mu\omega^2 r_{1,2} = G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}$$

$$\omega = \sqrt{G\frac{m_1 m_2}{\mu r_{1,2}^3}} = \sqrt{G\frac{\cancel{m_1 m_2}(m_1 + m_2)}{\cancel{m_1 m_2} r_{1,2}^3}}$$

Le orbite