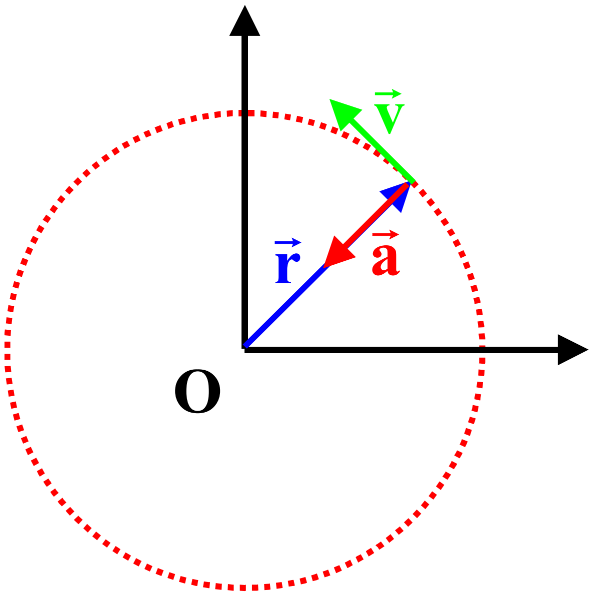
Proprietà dell'accelerazione
1: Moto circolare uniforme

$$\vec{v}(t) = \{-\omega\, r_o \mathrm{Sin}(\omega t),\ \omega\, r_o \mathrm{Cos}(\omega t),\ 0\} \quad |\vec{v}(t)| = \omega r_o$$

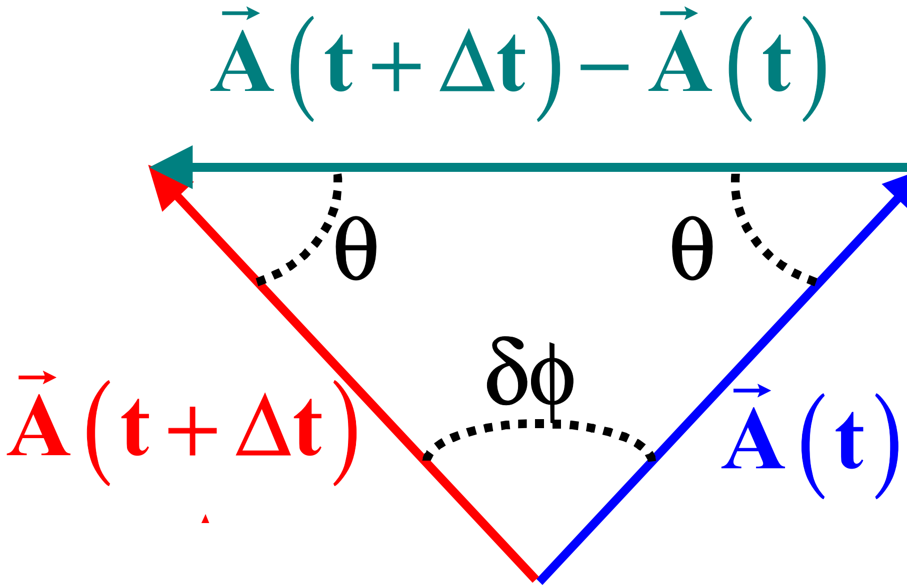
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \{-\omega^2\ r_o \mathrm{Cos}(\omega t),\ -\omega^2\ r_o \mathrm{Sin}(\omega t),\ 0\} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$



$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 r_o = \frac{|\vec{v}|^2}{r_o}$$

Derivata di un vettore costante in modulo

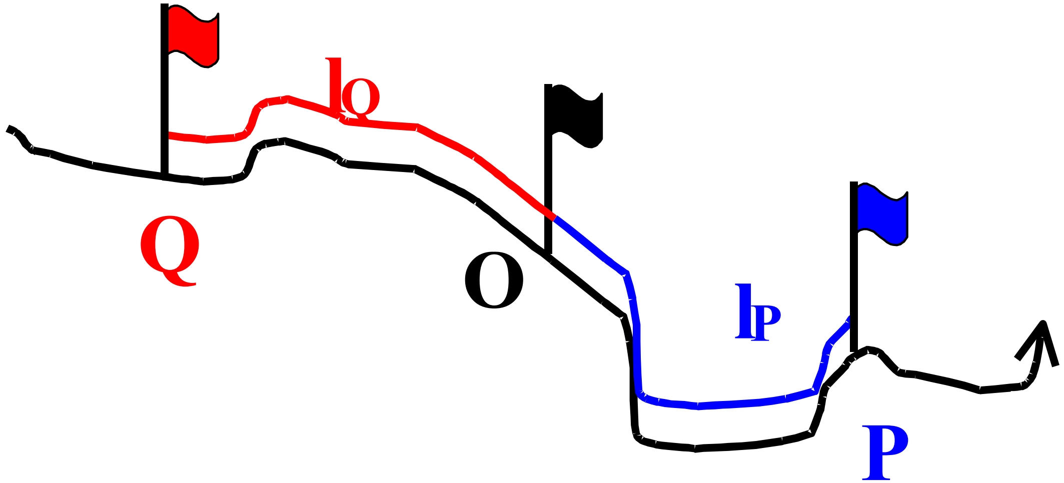


$$\Delta\phi = \pi - 2\theta;\ \ \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\phi}{2}$$

$$\Delta\phi \to 0 \quad \Rightarrow \theta \to \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}\right| = \frac{2}{\Delta t}\left|\vec{A}(t)\right|\left|\mathrm{Sin}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right| \approx \frac{|\Delta\phi|}{\Delta t}\left|\vec{A}(t)\right|$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}\right| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right|\left|\vec{A}(t)\right|$$



$$s_P = l_P$$
$$s_Q = -l_Q$$

Ascissa Curvilinea s su una curva orientata: Distanza di un punto sulla curva da un'origine sulla stessa

+ : il punto segue l'origine
-: il punto precede l'origine

$$\left|\vec{v}\right| = \frac{d\left(\text{lunghezza dell'arco di traiettoria percorso}\right)}{d\left(\text{tempo impiegato a percorrerlo}\right)} = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Università degli Studi di Trento

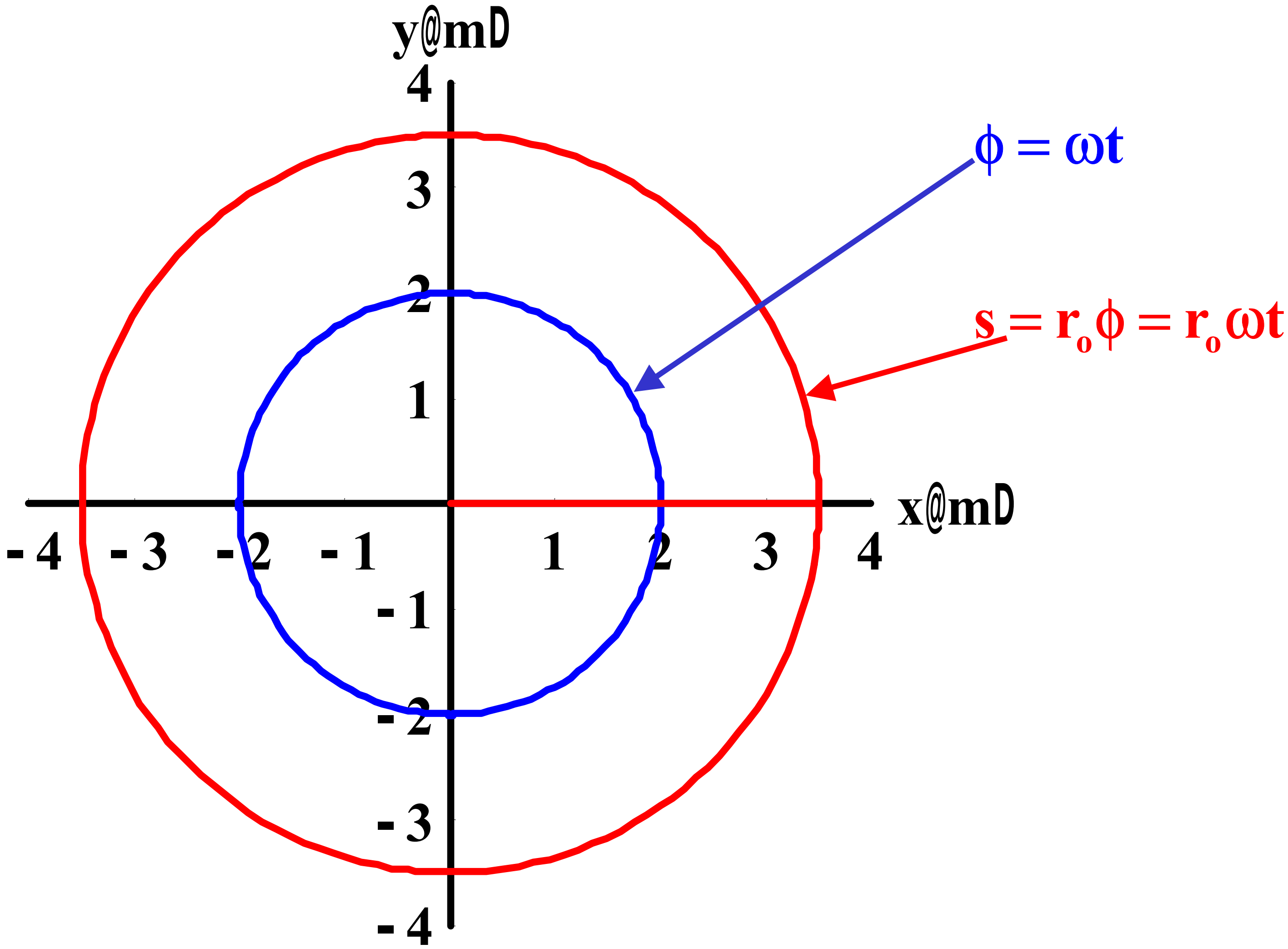
Moto Circolare Uniforme

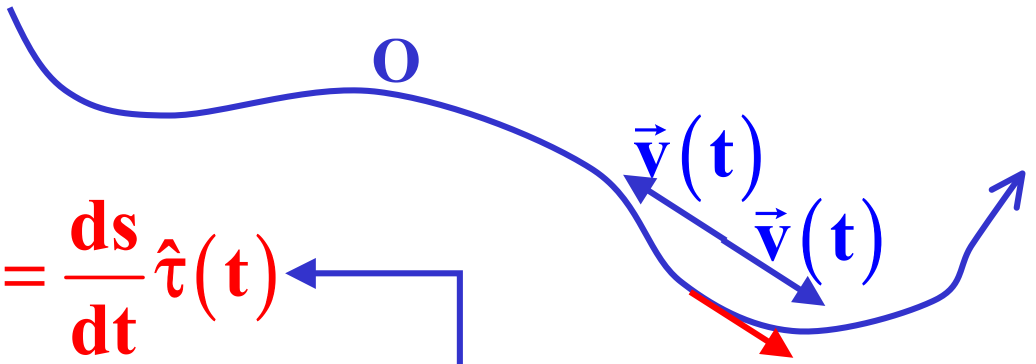
$$v_x(t) = -\omega\, r_o \mathrm{Sin}(\omega t);\, v_y(t) = \omega\, r_o \mathrm{Cos}(\omega t);\, v_z(t) = 0$$

$$\sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} =$$

$$\sqrt{(\omega\, r_o)^2 \mathrm{Sin}^2(\omega t) + (\omega\, r_o)^2 \mathrm{Cos}^2(\omega t)} = \omega\, r_o$$

$$s(t) = s(0) \pm \int_0^t \omega r_o dt = s(0) \pm \omega r_o t$$


y@mD
x@mD
4
3
2
1
- 1
- 2
- 3
- 4
- 4
- 3
- 2
- 1
1
2
3
4
φ = ωt
s = r_o φ = r_o ωt



$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\hat{\tau}(t)$$

$\hat{\tau} \equiv$ **versore tangente**

Il verso è quello positivo della traiettoria

$$\left|\vec{v}(t)\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|\left|\hat{\tau}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|\left|\hat{\tau}\right|$$

$$\frac{ds}{dt} \geq 0 \rightarrow \vec{v} \uparrow\uparrow \hat{\tau}$$

$$\frac{ds}{dt} \leq 0 \rightarrow \vec{v} \uparrow\downarrow \hat{\tau}$$

$$\vec{v}(t) = \left|\vec{v}(t)\right|\hat{v}(t)$$

Derivata del prodotto di uno scalare per un vettore

$$\frac{d a(t)\vec{A}(t)}{dt} = \frac{d\left\{a(t)A_x(t), a(t)A_y(t), a(t)A_z(t)\right\}}{dt}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da(t)}{dt}A_x(t) + a(t)\dfrac{dA_x(t)}{dt}, \\ \dfrac{da(t)}{dt}A_y(t) + a(t)\dfrac{dA_y(t)}{dt}, \dfrac{da(t)}{dt}A_z(t) + a(t)\dfrac{dA_z(t)}{dt} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{da(t)}{dt}\vec{A}(t) + a(t)\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

Applichiamolo alla velocità

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left[\frac{ds}{dt}\hat{\tau}(t)\right]}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \boxed{\frac{d^2s}{dt^2}\hat{\tau}} + \boxed{|\vec{v}|\frac{d\hat{v}}{dt}}$$

$\vec{a}_t$

Accelerazione tangenziale

$$|\vec{a}_t| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right|$$

$\vec{a}_n$

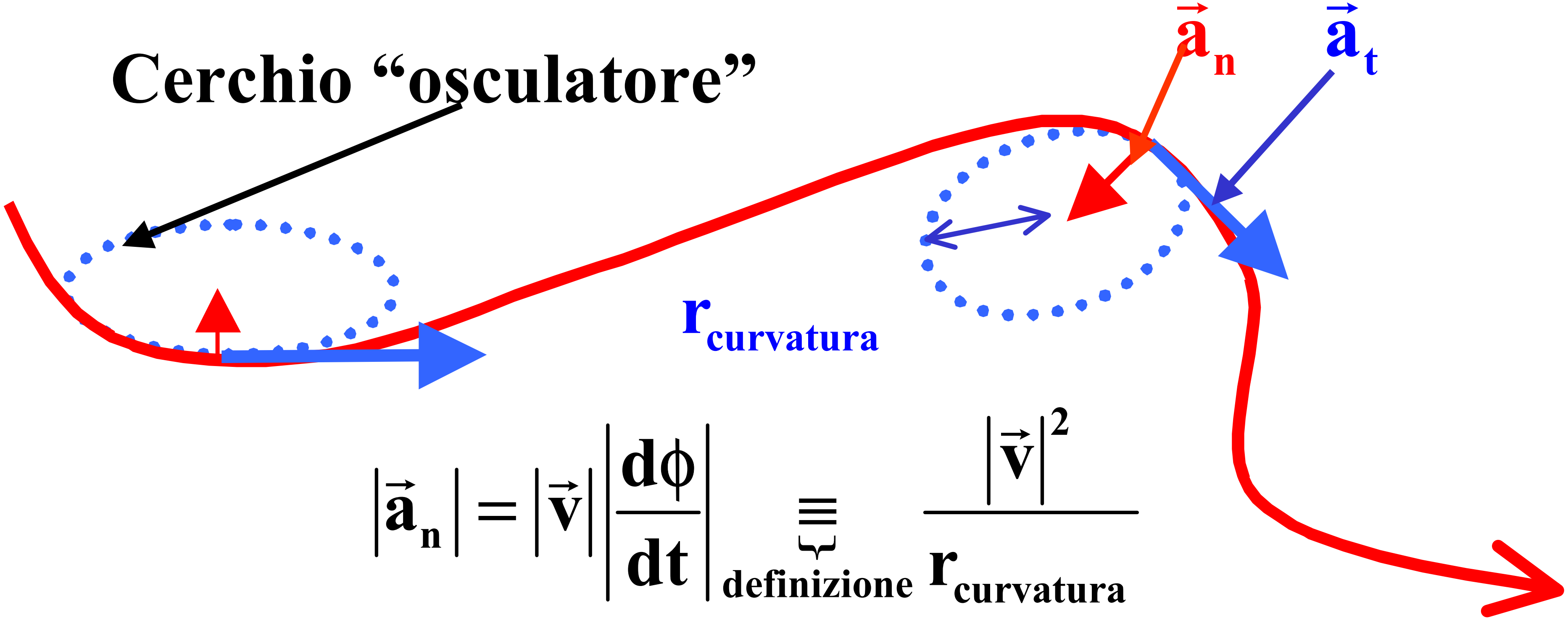
$$\frac{d\hat{v}(t)}{dt} \perp \hat{v}(t)$$

$\frac{d\phi}{dt}$ → **Velocità di rotazione della velocità**

Accelerazione normale

$$|\vec{a}_n| = |\vec{v}|\left|\frac{d\phi}{dt}\right|$$

Qualunque curva localmente si può approssimare con una circonferenza



$$\left|\vec{a}_n\right| = \left|\vec{v}\right|\left|\frac{d\phi}{dt}\right| \underbrace{\equiv}_{\text{definizione}} \frac{\left|\vec{v}\right|^2}{r_{curvatura}}$$

$$\rightarrow r_{curvatura} = \frac{\left|\vec{a}_n\right|}{\left|\vec{v}\right|^2} = \frac{\left|\frac{d\phi}{dt}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

Es: Moto circolare non uniforme

$$\vec{r}(t)=\{r_o \mathrm{Cos}[\phi(t)], r_o \mathrm{Sin}[\phi(t)], 0\} \quad |\vec{r}(t)|=r_o$$

$$\vec{v}(t)=\left\{-r_o \mathrm{Sin}[\phi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt}, r_o \mathrm{Cos}[\phi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt}, 0\right\}$$

$$|\vec{v}(t)|=r_o\left|\frac{d\phi(t)}{dt}\right|$$

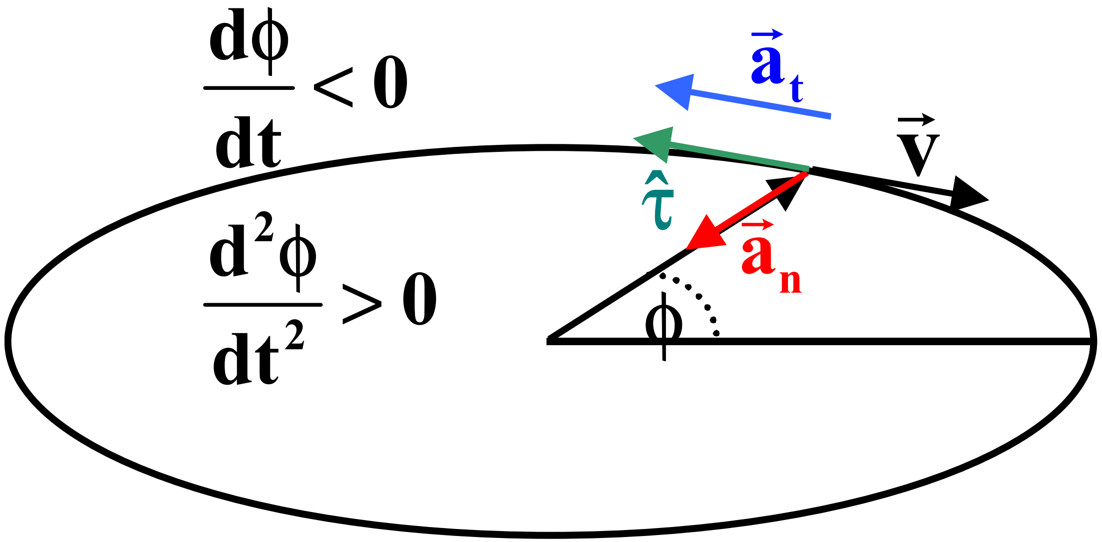
$$\vec{a}(t)=\left\{-r_o \mathrm{Cos}[\phi(t)]\left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right)^2 - r_o \mathrm{Sin}[\phi(t)]\frac{d^2\phi(t)}{dt^2},\right.$$

$$\left. -r_o \mathrm{Sin}[\phi(t)]\left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right)^2 + r_o \mathrm{Cos}[\phi(t)]\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}, 0\right\} =$$

$$= -r_o\left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right)^2 \hat{r}(t) + r_o \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}\hat{\tau}(t)$$

Centripeta

Tangenziale



$$\vec{a}(t) = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

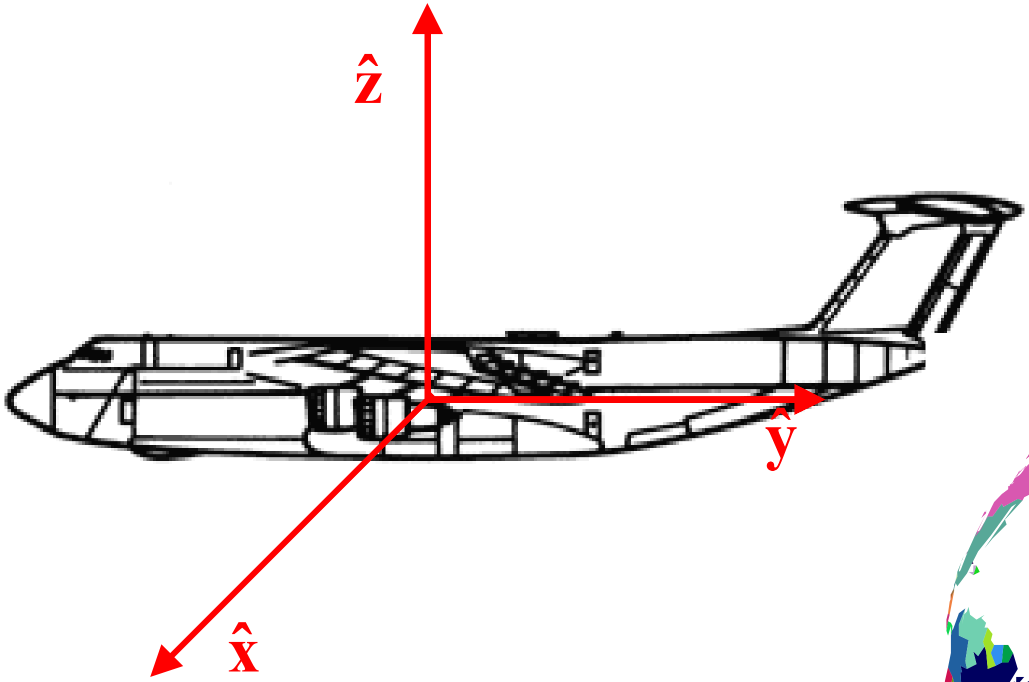
$$\vec{v}(t) = r_o \frac{d\phi(t)}{dt}\hat{\tau}$$

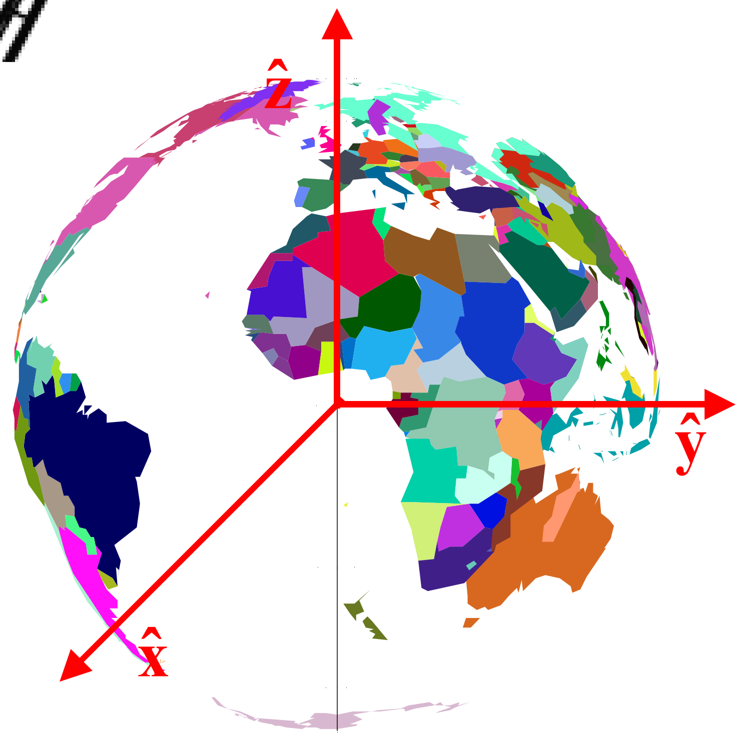
$$\vec{a}_n(t) = -r_o\left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right)^2 \hat{r}(t)$$

$$\left|\vec{a}_n\right| = \frac{\left|\vec{v}(t)\right|^2}{r_o}$$

$$\vec{a}_t = r_o \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}\hat{\tau}(t)$$

Sistemi di Riferimento

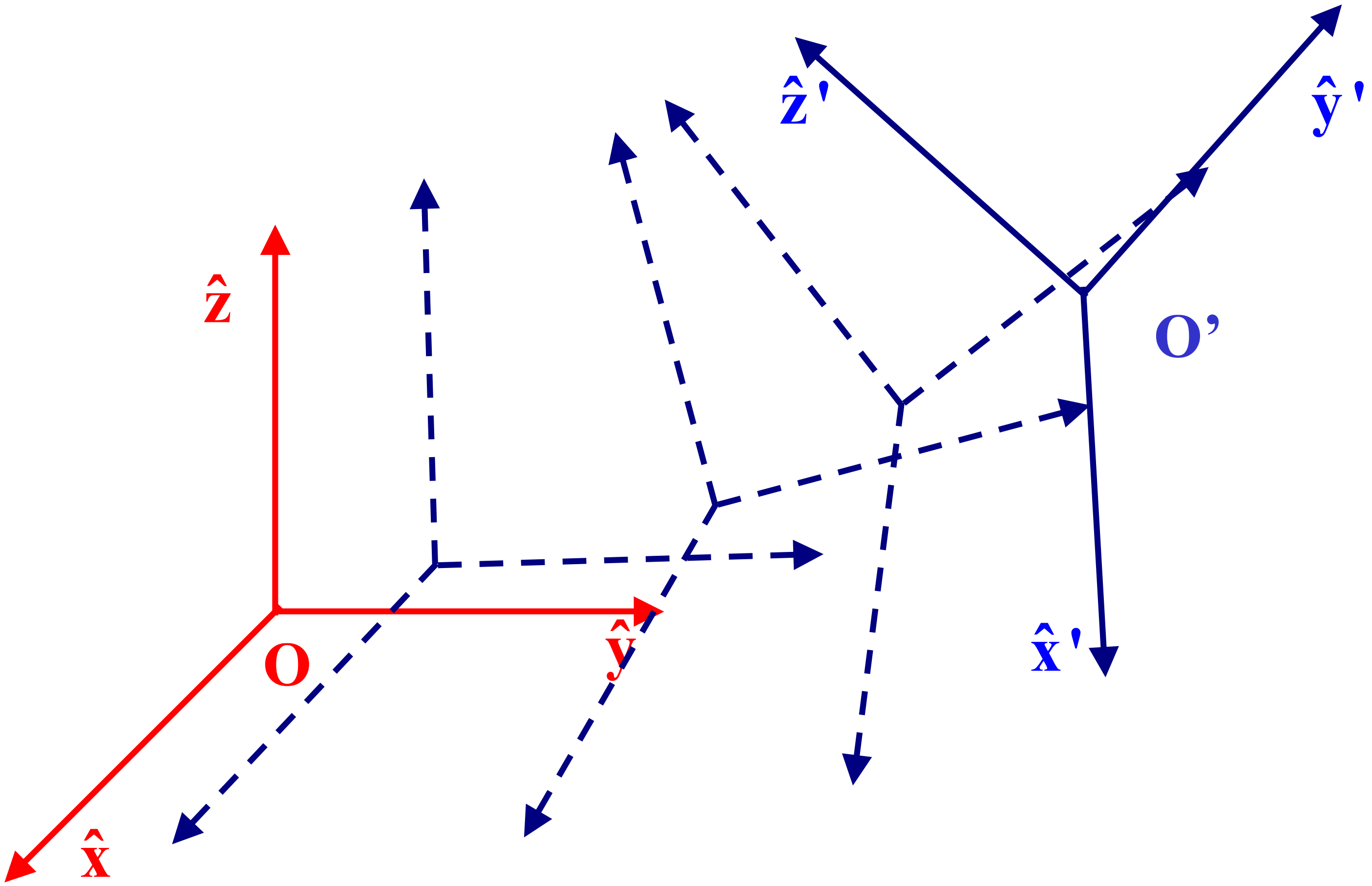




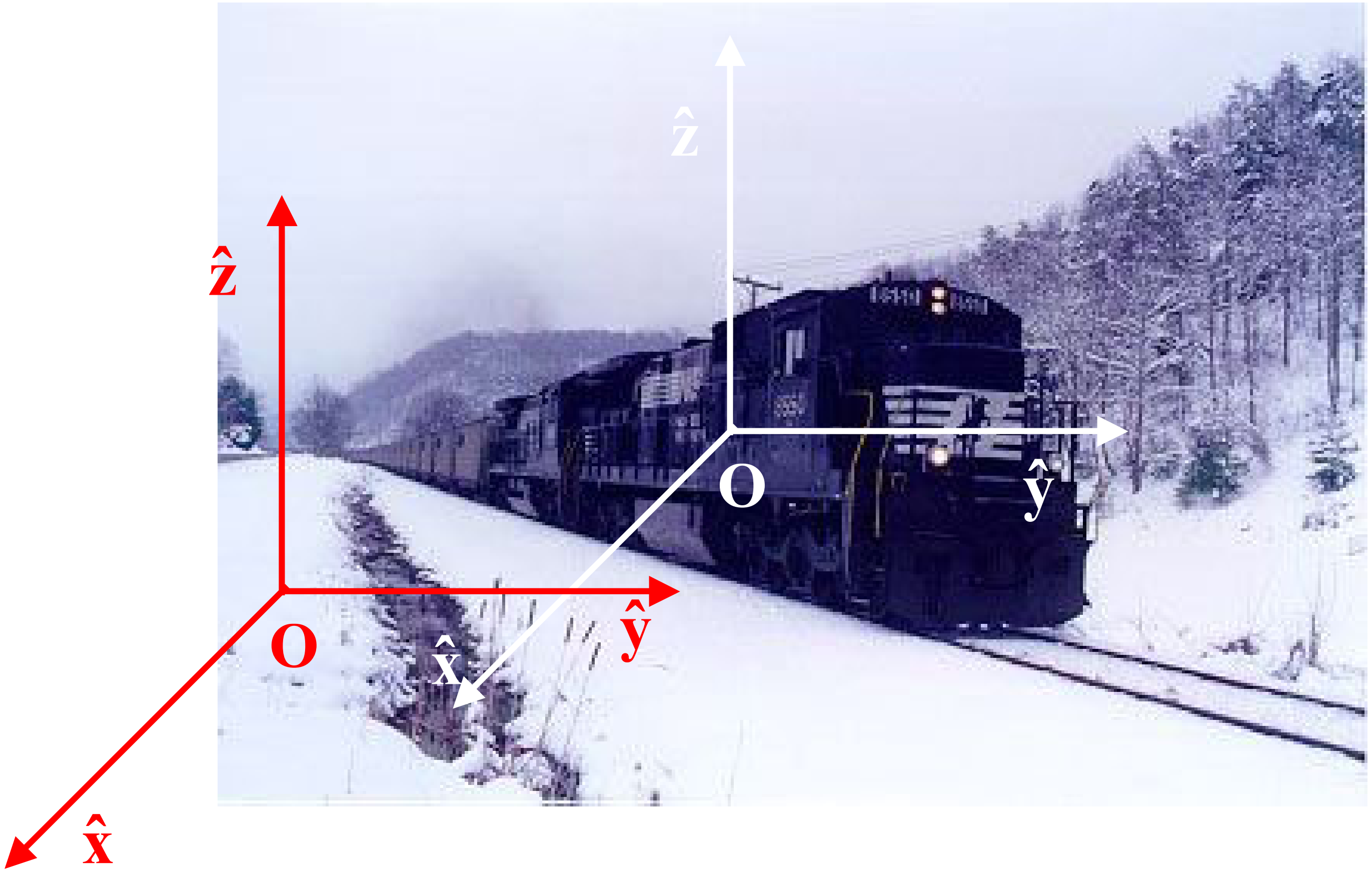
Insiemi di corpi cui è fissato un sistema di coordinate

I sistemi di riferimento possono essere in moto relativo:

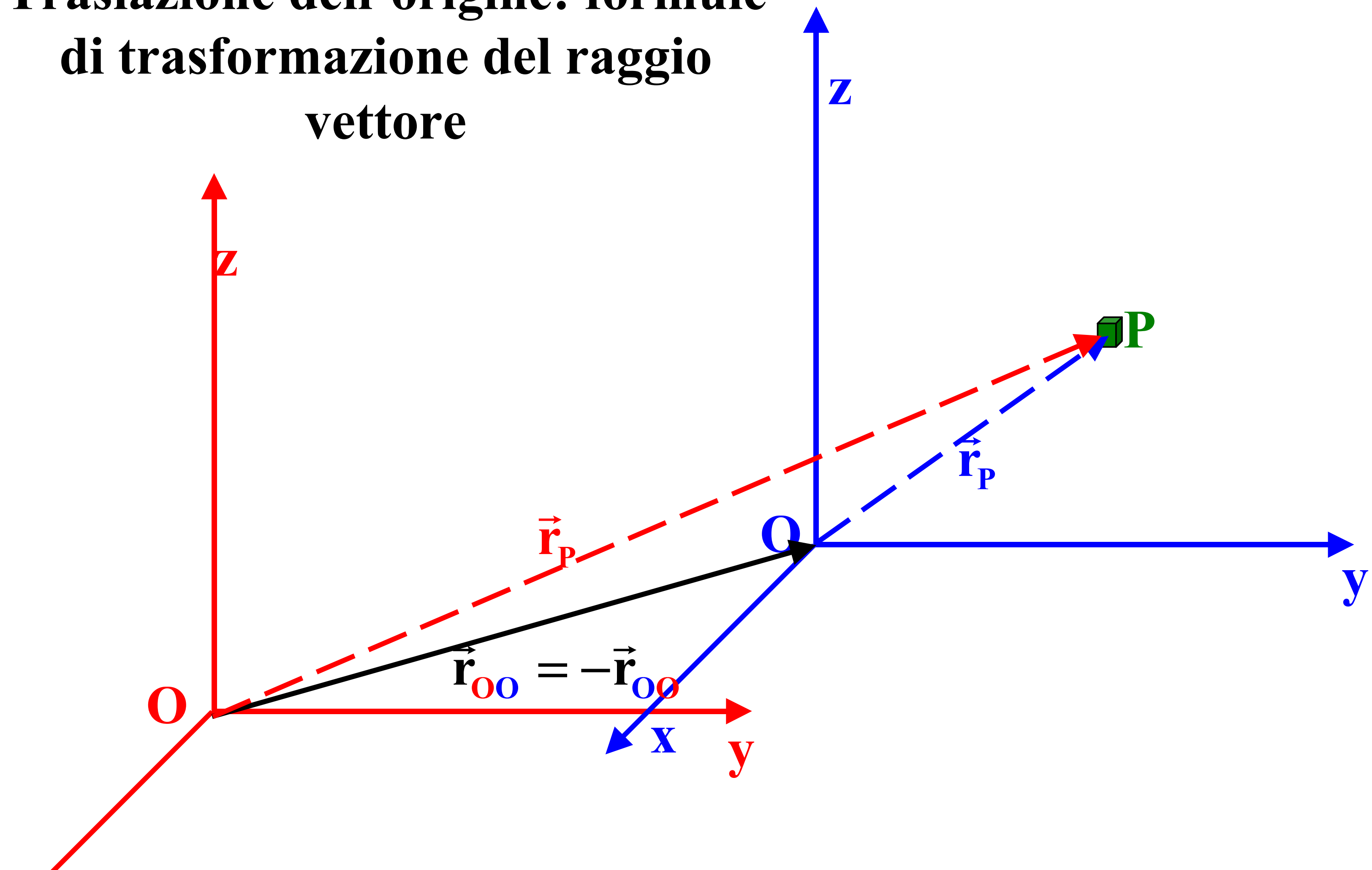
Gli assi possono ruotare   L'origine può traslare



Il moto relativo più semplice è il moto di traslazione dell'origine, con gli assi che mantengono orientazioni relative fisse



Traslazione dell'origine: formule di trasformazione del raggio vettore



$$\vec{r}_P = \vec{r}_P + \vec{r}_{OO}; \quad \vec{r}_P = \vec{r}_P + \vec{r}_{OO} = \vec{r}_P - \vec{r}_{OO}$$

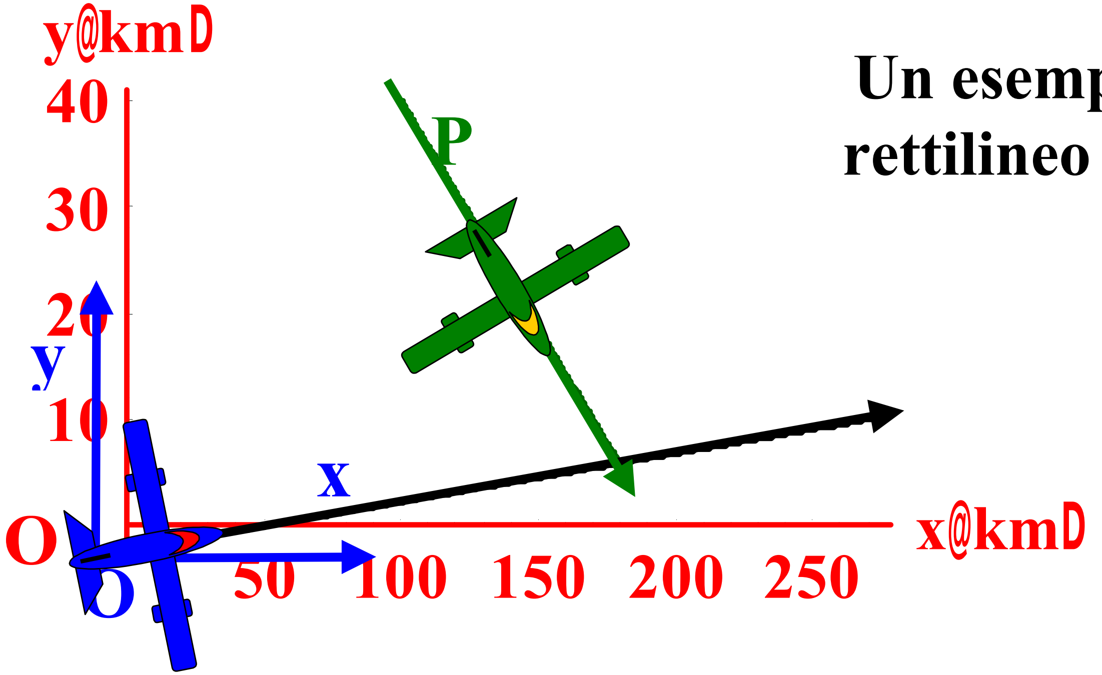
Trasformazione della velocità:

Le velocità si sommano (si compongono) vettorialmente

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_P(t) + \vec{r}_{OO}(t); \quad \vec{r}_P(t) = \vec{r}_P(t) + \vec{r}_{OO}(t) = \vec{r}_P(t) - \vec{r}_{OO}(t)$$

$$\frac{d\vec{r}_P(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_P(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_{OO}(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \vec{v}_P(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{v}_O(t) = \vec{v}_P(t) - \vec{v}_O(t) \\ \vec{v}_P(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{v}_O(t) = \vec{v}_P(t) - \vec{v}_O(t) \end{array}$$

Un esempio: moto rettilineo uniforme



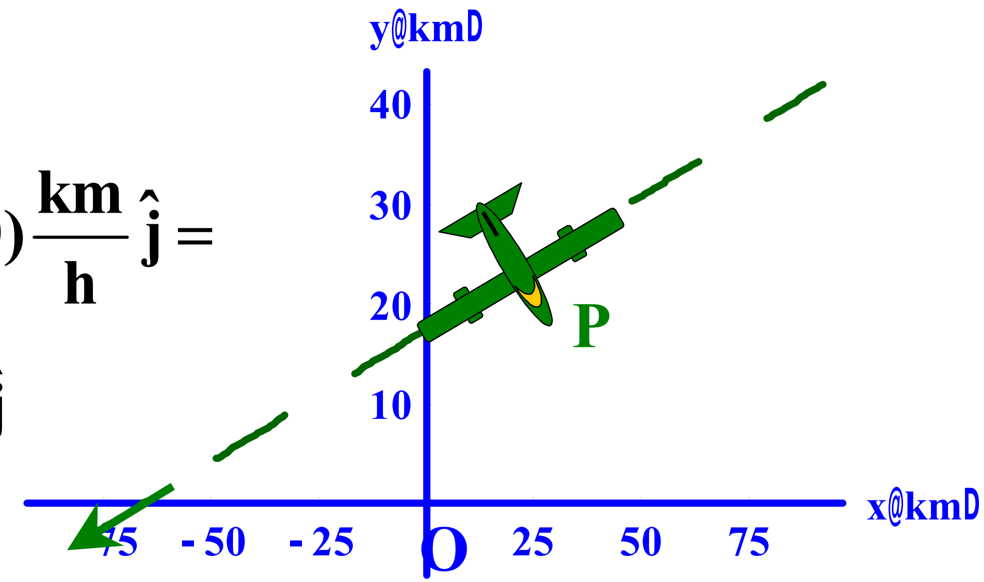
$$\vec{v}_{OO} = 1540\,\frac{km}{h}\,\hat{i} + 70\,\frac{km}{h}\,\hat{j};$$

$$\vec{v}_{P} = 490\,\frac{km}{h}\,\hat{i} - 210\,\frac{km}{h}\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_{P} = \vec{v}_{P} - \vec{v}_{OO} =$$

$$= \left(490 - 1540\right)\frac{km}{h}\,\hat{i} + (-210 - 70)\,\frac{km}{h}\,\hat{j} =$$

$$= -1050\,\frac{km}{h}\,\hat{i} - 280\,\frac{km}{h}\,\hat{j}$$



Moto relativo rettilineo uniforme di due sistemi di riferimento: le trasformazioni di Galileo

$$\vec{r}_{OO}(t) = \vec{r}_{OO}(0) + \vec{v}_o t;$$

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_P(t) + \vec{r}_{OO}(0) + \vec{v}_o t$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{v}_o$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_P(t) - \vec{v}_o$$

$$x_P(t) = x_P(t) + x_{OO}(0) + v_{ox} t$$

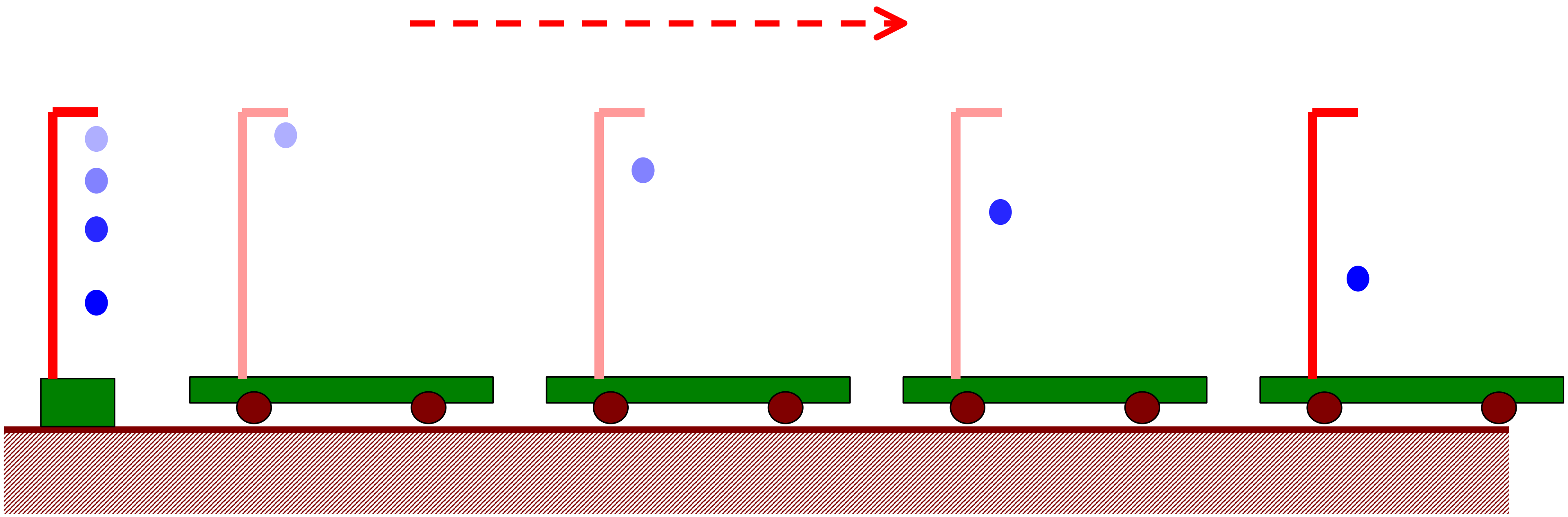
$$y_P(t) = y_P(t) + y_{OO}(0) + v_{oy} t$$

$$z_P(t) = z_P(t) + z_{OO}(0) + v_{oz} t$$

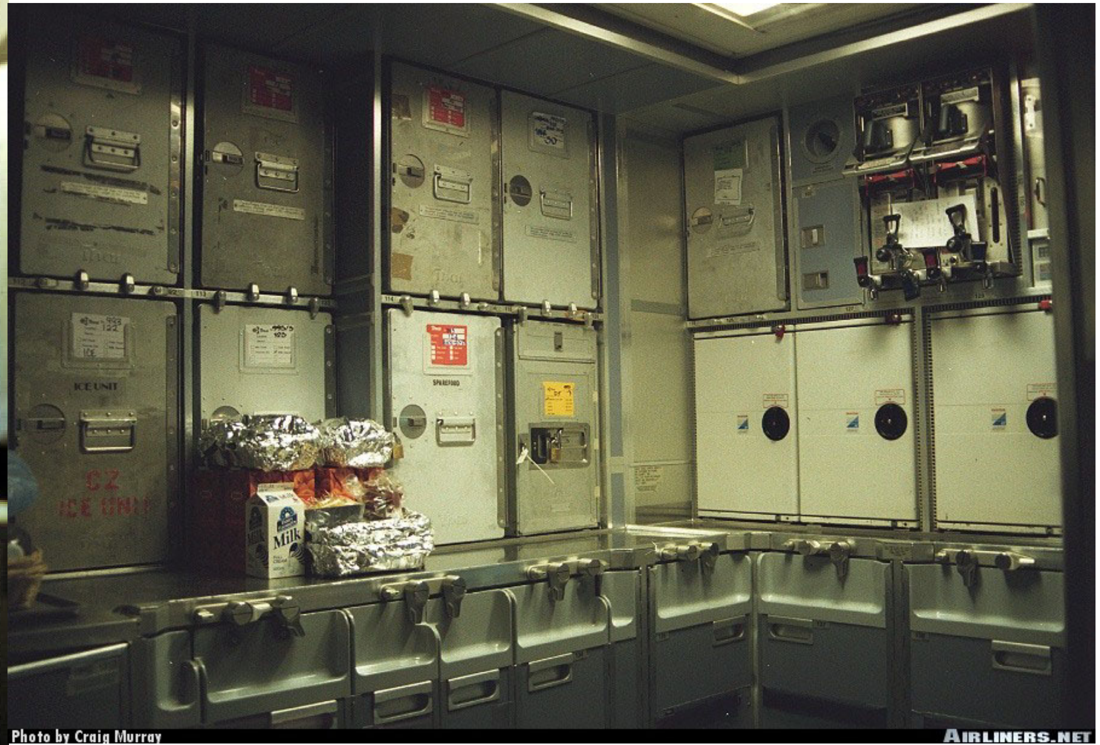
Il Principio di Relatività

Se si effettua lo stesso esperimento in due diversi sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme si ottiene lo stesso risultato

N.B. Stesso esperimento significa stesse condizioni iniziali rispetto a ciascun sistema di riferimento



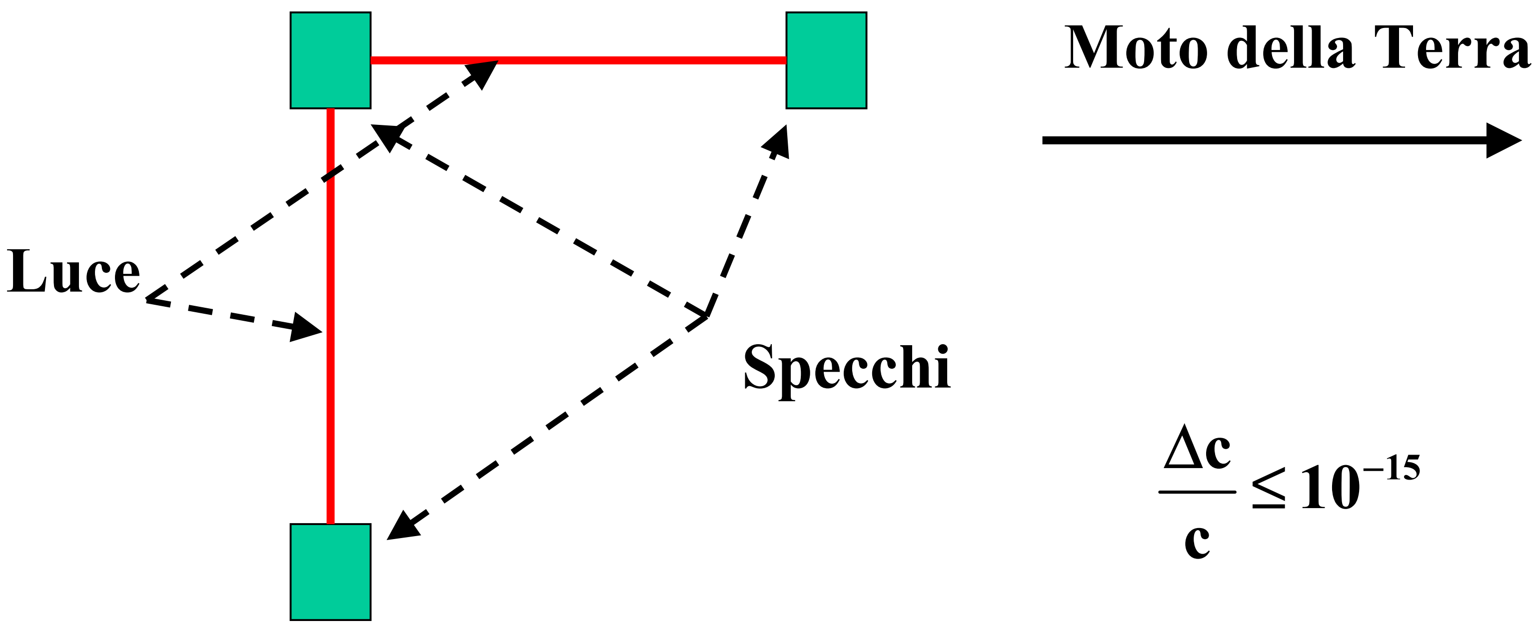
Quale delle due foto è presa in volo e quale a terra?



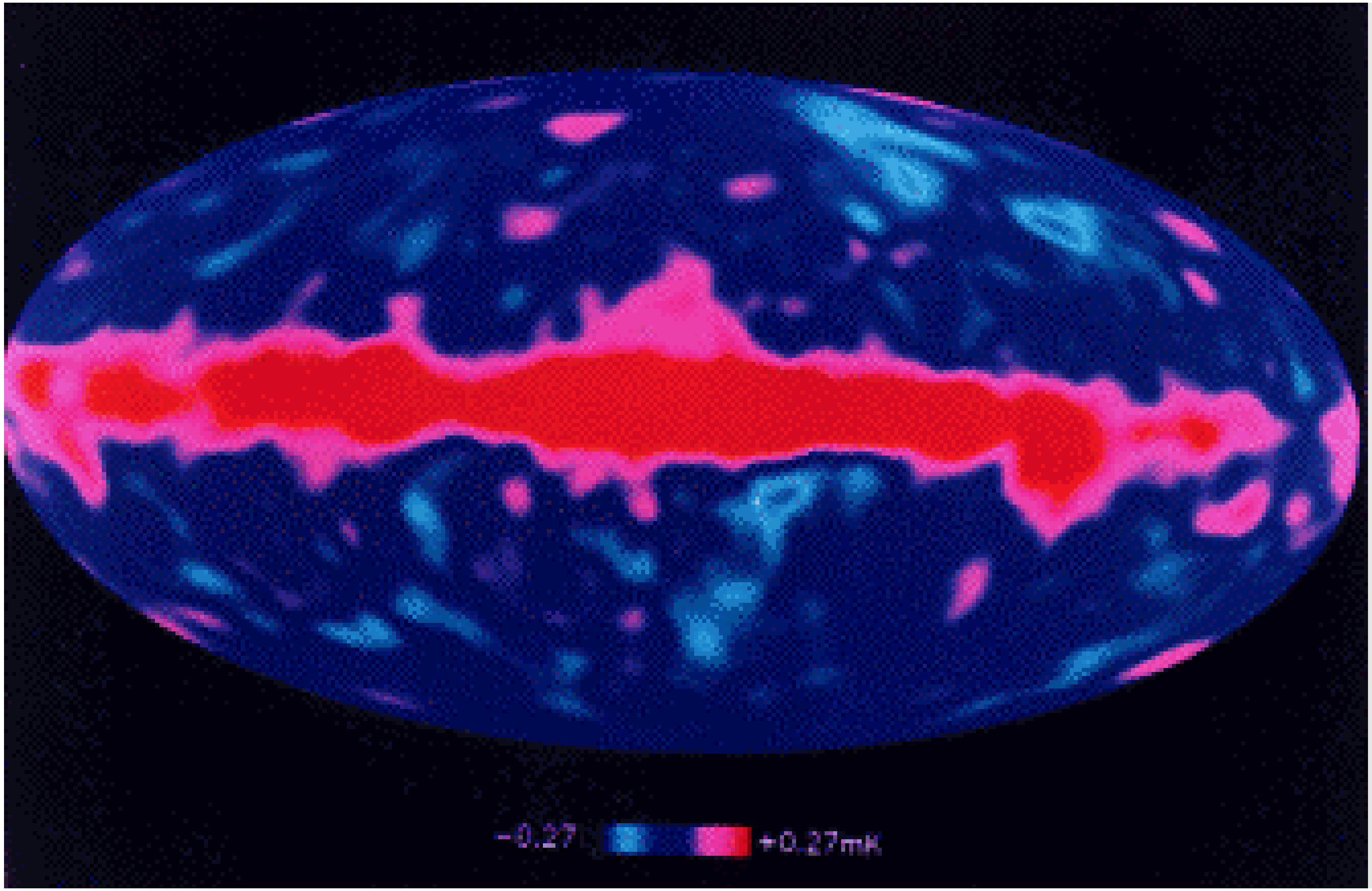
Altri principi:

Isotropia dell'universo: tutte le direzioni sono equivalenti

misura della velocità della luce



$$\frac{\Delta c}{c} \leq 10^{-15}$$



Le anisotropie locali viste da COBE

Principio di Inerzia

[I legge della Dinamica del Punto]

Si può sempre trovare un sistema di riferimento, detto sistema inerziale, rispetto al quale un punto materiale *libero* se posto in quiete vi rimane indefinitamente

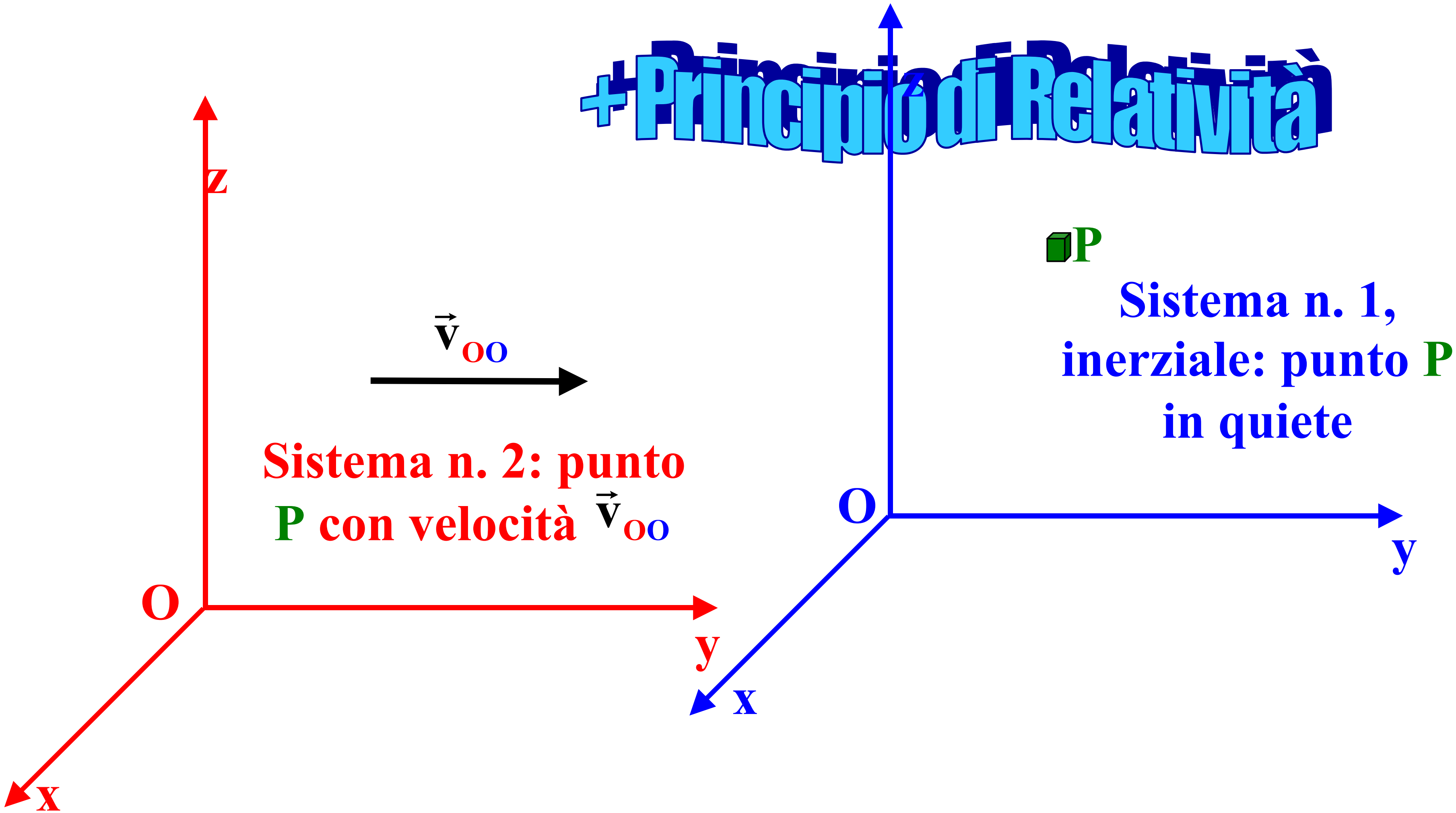
Punto materiale libero: punto materiale non soggetto all'influenza di altri corpi

Operativamente: molto lontano da qualunque altro corpo

L’astronauta rimane fermo dov’è se nessuno lo spinge

Principio di Inerzia

+ Principio di Relatività



Se nel sistema di riferimento 1 il punto materiale libero rimane in quiete se posto in quiete, lo stesso deve succedere nel sistema 2 (principio di relatività)

Sistema di riferimento 2: un punto libero che al tempo zero abbia velocità v_{OO} continua indefinitamente con la stessa velocità

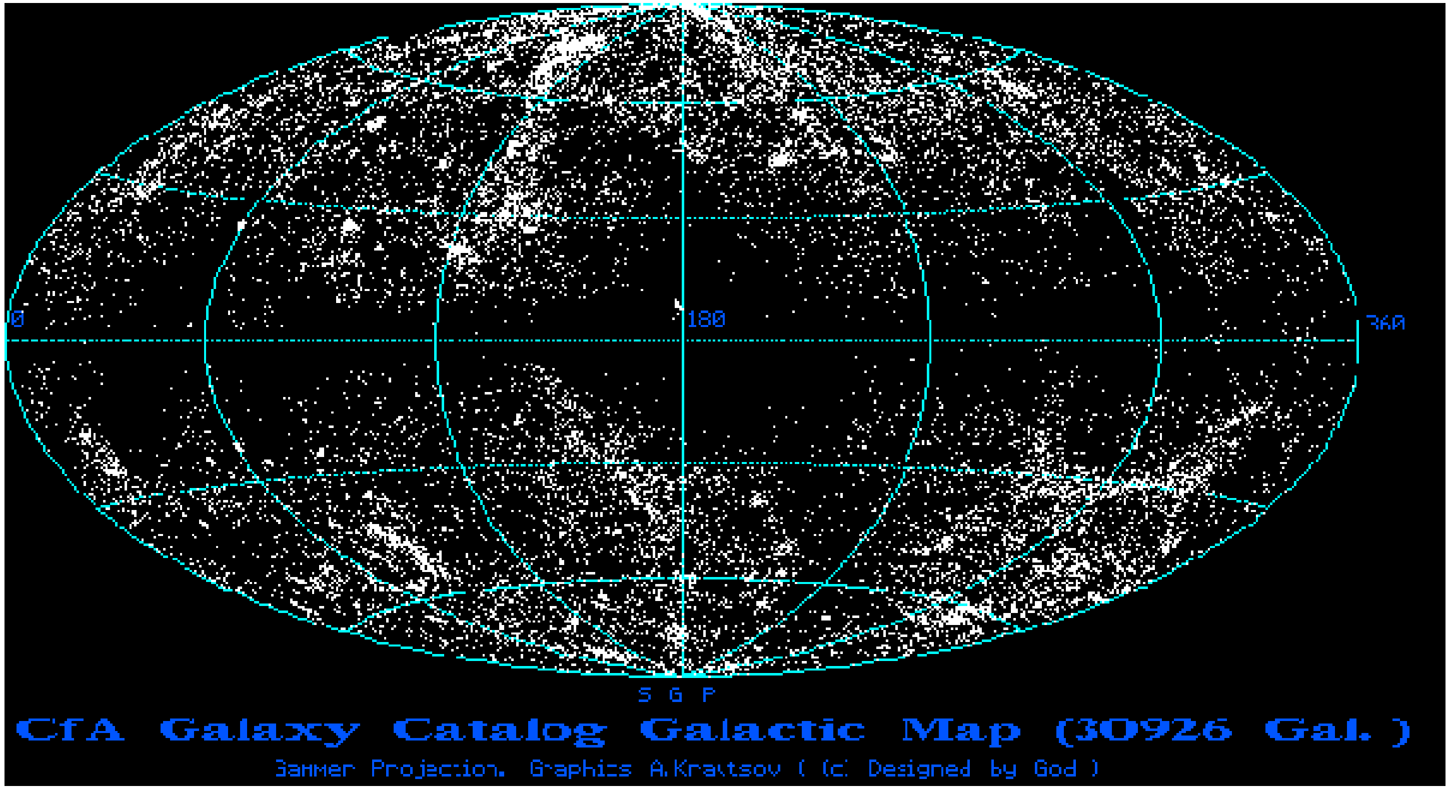
(moto rettilineo uniforme)

Conclusione:

Si può sempre trovare un insieme di (infiniti) sistemi di riferimento (sistemi inerziali)in moto relativo rettilineo uniforme, in cui un punto materiale libero procede di moto rettilineo uniforme

Costruire un sistema inerziale: puntare gli assi alle stelle fisse

(stelle così lontane da non mostrare moto relativo)



Scegliere l'origine nel sole (meglio centro di massa del sistema solare)

(Giove-Sole: 2 10^{27}kg-2 10^{30}kg; raggio del sole 0.7 10^{6} km)