Esercizi sui limiti di funzione con l'ausilio del calcolo differenziale

(1) Determinare lo sviluppo di Mc Laurin fino all'ordine indicato tra parentesi

$$\cos(\sin x) - \log(1+2x) \quad (2); \quad \sin^2 x \quad (6); \quad \sin^2 \sqrt{x} \quad (3);$$

$$\log^2(1+x^2) \quad (7); \quad e^{2x}\cos x \sin 2x \quad (4); \quad \sqrt{1+\tan x} \quad (3);$$

$$(x-\sin x)(x^2+\sin^2 x) \quad (5); \quad e^{-x} - \cos x \quad (3).$$

(2) Determinare ordine e parte principale dei seguenti infinitesimi per $x \to 0$:

$$e^{e^{2x}} - e; \quad \sin x^\alpha - \sin^\alpha x \quad (\alpha > 0); \quad \sin^2(\log(1+x))\log(\cos x) + \frac{x^{4\alpha}}{2} \quad (\alpha > 0).$$

(3) Eventualmente utilizzando il Teorema di de l'Hopital o gli sviluppi di Taylor, verificare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{x-1} = \frac{1}{4}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x - \sin x} = +\infty; \quad \lim_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\log x - 1} = \frac{\sqrt{e}}{2};$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{x-a} = a^a(1-\log a) \quad (a>0); \quad \lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin^2 x - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1} = \frac{\pi}{4}; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log x} = -2;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\arctan x^2 - \pi} = -\frac{1}{2}; \quad \lim_{x\to +\infty} (\tanh x)^{\cosh x} = 1 \quad \lim_{x\to 1} \frac{2x^x - x^{2x} - 1}{(e^2x^2 - x^{\frac{2}{x-1}})^2} = -\frac{1}{9e^4};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\sin x} = -2; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{3}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\log(x+1) - \log x} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos\frac{x}{x^2-1} - 1}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} = 0; \quad \lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right) = -\frac{e}{2};$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\arctan(x+1)}{\arctan x}\right)^{x^2} = e^{2/\pi}.$$

(4) Eventualmente utilizzando il Teorema di de l'Hopital o gli sviluppi di Taylor, verificare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\log x)^2 \left(\sin\frac{1}{\log x} - \sin\frac{1}{\log(x+1)}\right) = 1;$$

$$\lim_{x\to0} \frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^5} = -\frac{27}{400};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\cosh(x+1) - \cosh x\right)^{1/x} = e;$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4} = \frac{1}{24};$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(e^x-1) - x}{x\arctan x} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\frac{1}{x}\left(e^x + 2^{\frac{\log\cos x}{x^2}}\right)}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} x(\arctan x - \arccos x^{-2}) = -\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3+\sinh x)}{\sqrt{1+x^4}} = 0;$$

$$\lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - e^{\frac{x^2}{2}})(\log(1+\sin^2 x) - \arctan x^2)}{\arctan(e^{x^4} - \cos x^2)\cdot\tan(e^x-1)} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3+\sinh x)}{\sqrt{1+x^4}} = 0.$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x\sqrt{x}} - \sin^3\sqrt{x} - \cos x^{5/4}}{x^2\sqrt{x}} = 1.$$

(5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

(6) Si calcoli lo sviluppo di Taylor delle seguenti funzioni rispetto al punto a fianco indicato.

$$\cos x \quad \left\{\frac{\pi}{6}\right\}; \qquad e^x \quad \{2\}; \qquad \log x \quad \{2\}.$$