ANALISI 1 - C.d.L. in FISICA A.A.2005/06

Limiti di funzione e continuità

1. Utilizzando la definizione di limite, verificare che si ha

$$\lim_{x\to -1} 2x+5=3; \qquad \lim_{x\to 1} x^2-x+1=1; \qquad \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}=0;$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-3x+2}=-\infty; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+3x+1}=0; \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{x}=\frac{1}{a} \quad (a\neq 0).$$

2. Calcolare i seguenti limiti (NB: $x^4-x^2\ \{+\infty,-\infty\}$ indica che va calcolato il limite per $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$)

$$x^4-x^2 \quad \{+\infty,-\infty\}, \quad x^3-x^2 \quad \{-\infty,+\infty\}, \quad \frac{x^5+3x^2+x}{x^6-1} \quad \{+\infty,0,-\infty\},$$

$$\frac{|x+2|}{x^2-4} \quad \{-2\}, \qquad \frac{(x+2)^2}{|x^2-4|} \quad \{-2\}, \qquad \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \quad \{+\infty\},$$

$$\frac{x^2-4}{x+2} \quad \{-2\}, \qquad \frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3} \quad \{1\}, \quad \frac{2x^2}{|x|+1}+x \quad \{-\infty\},$$

$$\frac{x\sqrt[3]{x}+x^2}{x^4-x} \quad \{0^+\}, \qquad \frac{x+\cos x}{x-\sin x} \quad \{+\infty\}, \qquad x^2+\sin x \quad \{+\infty\}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti per $x\to 0$

$$\frac{\sin x}{x^2}, \quad \frac{\sin(2x)}{x^2}, \quad \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}, \quad \frac{\sin(2x)}{x\cos x}, \quad \sin x\log|x|, \quad \frac{\tan^2 x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\cos x},$$
$$\frac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x}, \quad \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}, \quad \log|x|\tan x, \quad \frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad \frac{1}{x}\log_{1/2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

4. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} x+\frac{1}{x}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2+x} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1};$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0) \quad \lim_{x\to 0} x\left(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x}\right).$$

5. Calcolare i seguenti limiti per $x\to+\infty$

$$\left[\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right]^{\sqrt{9x^2+3x+1}}, \quad 3x^4\left[\log(x^4+3)^{1/3}-\log x^{4/3}\right], \quad \frac{3x+1}{x^2+1}\log_3 e^{-x}, \quad \left(\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}\right)^{\frac{x^2+3}{x^5+2x}}.$$

6. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\right)^{\log_3 e^{-x}}, \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x, \quad \lim_{x\to\sqrt{2}^+}\log\left(x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-2}}\right),$$
$$\lim_{y\to 1}\frac{1}{1-y}-\frac{3}{1-y^3}, \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2+x-6}, \qquad \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{|x^2-4|},$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(2\sin^2 x)^{1/\cos(2x)}, \qquad \lim_{x\to 3}(x-3)^{-2}\log^2\frac{x}{3}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\tan(2x),$$
$$\lim_{-\infty}\frac{x^2}{|x|+1}+x \qquad \lim_{x\to 3}(x-3)^{-2}\log\frac{x}{3}, \qquad \lim_{x\to\frac{1}{e}\pm}\frac{\log^2 x+\log x-1}{\log^2 x-1}.$$

7. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - 2ax^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

8. Determinare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{(x-1)^2}; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{(x-1)^2}.$$

9. Studiare la continuità in $x = 0$ delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x - 1} & \text{se } x < 0 \\ \log(1+x), & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-\cos x)\cos\frac{2}{x}}{\log(1+x)} & \text{se } x > 0 \\ \sin x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\tan x)^3 \sin\frac{1}{x}}{1 - \cos x} & \text{se } x > 0 \\ \cos x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 4\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\log(1+x^2) + 3x^2} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{4} + \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x(e^x - 1)} & \text{se } x < 0 \\ \log(\sqrt{x} + 1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} (\cos\sqrt{|x|})^{1/x} & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

10. Studiare la continuità in $x = -1$ di

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{\sqrt{-1+x^2}}} & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ \dfrac{e^{\cos(x+1)-1} - e^{x+1}}{x+1} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$