Esercizi sull'integrazione

Ricordare le seguenti uguaglianze:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x},$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Ricordare inoltre che a volte può essere conveniente effettuare le seguenti sostituzioni:

$$\int R(e^x)\,dx \quad [e^x = t] \quad \Rightarrow \quad \int R(t)\frac{1}{t}\,dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \quad \left[\tan\frac{x}{2} = t\right] \quad \Rightarrow \quad \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx \quad [\tan x = t] \quad \Rightarrow \quad \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\int R(\Big(x, (a+bx)^{m/n}, (a+bx)^{p/q}\Big)\,dx \quad (m,n,p,q \in \mathbb{N}) \quad \Big[(a+bx)^{1/r} = t, \text{con } r := \text{mcm}\{n,q\}\Big] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int R\left(\frac{t^r - a}{b}, t^{rm/n}, t^{rp/q}\right)\frac{r}{b}t^{r-1}\,dt$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{a+bx}{cx+d}\right)^{m/n}\right)\,dx \quad (m,n \in \mathbb{N}) \quad \left[\frac{a+bx}{cx+d} = t^n \Leftrightarrow x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int R\left(\frac{dt^n - b}{a-ct^n}, t^m\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx \quad [x = \sinh t] \quad \Rightarrow \quad \int R\left(\sinh t, \cosh t\right)\cosh t\,dt$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx \quad [x = \cosh t] \quad \Rightarrow \quad \int R\left(\cosh t, |\sinh t|\right)\sinh t\,dt,$$

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx \quad [x = \sin t] \quad \Rightarrow \quad \int R(\sin t, |\cos t|)\cos t\,dx$$

$$\text{oppure} \quad [x = \cos t] \quad \Rightarrow \quad \int -R(\cos t, |\sin t|)\sin t\,dx$$

(1) Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{2t^3 - t^2 + 5t - 3}{t^2 + 3}\,dt \qquad \int \frac{t^3 - 2t + 1}{-2t^2 + t + 1}\,dt \qquad \int \frac{-t^2 + 2t}{-2t^2 - 2t - 1}\,dt \qquad \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1 + 2t + 2t^2}\,dt \qquad \int \frac{1}{2x^2 - 6x}\,dx \qquad \int \frac{2t - 5}{3t^2 - 4t + 3}\,dt \qquad \int x \log x\,dx$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \qquad \int \frac{e^x}{1 - 2e^x + e^{2x}}\,dx \qquad \int \frac{1}{\cos x}\,dx \qquad \int \frac{1}{\sin 2y}\,dy$$

$$\int \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx \qquad \int \frac{(-\cos^3 x + \cos x)\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx \qquad \int \cos z \log(\sin^2 z + 3)\,dz \qquad \int \frac{\log^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$$

$$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \qquad \int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3 - \cos^2 x}}\,dx \qquad \int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5}\,dx \qquad \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 5}\,dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 5}\,dx \qquad \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \qquad \int \frac{e^{2x}}{\sin e^{2x}}\,dx \qquad \int \frac{1}{x(1 + 4\log^2 x)}\,dx$$

$$\int \frac{\sin^2(\log x)}{x}\,dx \qquad \int \frac{e^{2x}}{\cos e^{2x}}\,dx \qquad \int \frac{\tan^3 x + 1}{\sin^2 x - 2}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt{x}}{1 + x}\,dx$$

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \int (x^2 + 5x + 6)\cos(2x)\,dx \qquad \int x^3 e^{-x/3}\,dx \qquad \int x \sin x \cos x\,dx$$

$$\int x \sin^2 x\,dx \qquad \int \arctan t\,dt \qquad \int \frac{1}{\sqrt{5x - 2}}\,dx \qquad \int \frac{1}{2 + \sin x}\,dx$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x - 6}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{e^{2x}}{4 + 4e^{2x} + e^{4x}}\,dx \qquad \int_1^{e^2} x \log x\,dx$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 - \cos x}{\sin x - \sin^2 x}\,dx \qquad \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\, \cos x\,dx \qquad \int_1^2 \frac{x}{x^4 + 1}\,dx \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{|\cos x| \cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

(2) Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx \quad [= \frac{1}{2}\arctan\sinh x + c]$$

$$\int \tan x\,dx \quad [= -\log|\cos x| + c]$$

$$\int \frac{x^6}{(x^7+1)^9}\,dx \quad [= -\frac{1}{56}(1+x^7)^{-8} + c]$$

$$\int \arctan x\,dx \quad [= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c]$$

$$\int \sin^3 x\,dx$$

$$\int x^4 \log x\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad [= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c]$$

$$\int e^x \cos x\,dx$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0) \quad [= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c]$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx \quad (a > 0) \quad [= \frac{a^2}{2}\mathrm{settsinh}\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + c]$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx \quad (a > 0) \quad [= \frac{a^2}{2}\mathrm{settcosh}\,\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + c]$$

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1}\,dx \quad [= \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c]$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx \quad [= \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c]$$

$$\int \frac{1}{\tanh x}\,dx \quad [= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x}{2} + c]$$

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx \quad [= \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c]$$

$$\int \frac{1+2\cos^2 x}{1+2\sin^2 x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx \quad [= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log|1 + \sqrt[6]{x}| + c]$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}\,dx \quad [= \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 3\mathrm{settcosh}\,(2x-3) + c]$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{2 - x - x^2}}\,dx \quad [= -3\sqrt{2 - x - x^2} - \arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c]$$

(3) Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos x}{(1-\cos x)^3}\,dx \qquad \int_{-2^{-1/2}}^{\sqrt{3/2}} |x|e^{-x^2}\,dx \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi} e^t \sin t\,dt \qquad \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{4-\sin x|\sin x|}\,dx \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}\,dx \quad \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,dx \quad \int_0^1 \frac{x}{1+2x^2}\,dx$$

$$\int_1^8 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

(4) Risolvere l'equazione

$$\int_0^x t\sqrt{1-2t^2}\,dt = \frac{1}{12}\,.$$

(5) Calcolare le primitive nulle in 0 di: $f_1(x) = e^x \cos x$ e $f_2(x) = \dfrac{x+4}{x^2-5x+6}$.

(6) Calcolare la primitiva F di $f(x) = \arctan\sqrt{x}$ tale che $F(0) = \pi$.

(7) Calcolare l'area
- (a) della regione del primo quadrante compresa tra la circonferenza di centro 0 e raggio 1 e la retta $y = -x+1$,
- (b) della regione compresa tra la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt{8}$ e la parabola $y^2 = 2x$,
- (c) della regione compresa tra l'asse delle ascisse, le rette $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$, e il grafico della funzione $\dfrac{-1}{\cos^2 x\sqrt{2+5\tan x}}$,
- (d) della regione compresa tra il grafico di $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$, l'asse delle ascisse e le rette $x = \frac{1}{2}$ e $x = 3$,
- (e) della regione compresa tra il grafico di $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2+5x-3}{x^2+3}$, il suo asintoto obliquo a $+\infty$ e le rette $x = 0$ e $x = 3$,
- (f) della regione compresa tra il grafico di $f(x) = e^x$, la retta tangente al grafico nel punto di ascissa 1 e la retta $x = 0$,
- (g) della regione compresa tra il grafico di $f(x) = x^2 - 2x$, la retta tangente al grafico nel punto di ascissa -1 e la retta $x = 1$.