Esercizi di Analisi I

Gli esercizi che avevo in mente di propinarvi erano senz'altro di più, tuttavia, aspettando il tempo e l'ispirazione per comporne di nuovi metto a disposizione questi che ho appena redatto. Spero che tornino, in qualche modo, dico così perché alcuni sono stati composti con un po' di fretta. Tra questi vi saranno esercizi *classici* ed esercizi *non-proprio-standard*, il che non significa più difficili, vuol dire solo che quesiti di tale fatta sono più difficilmente reperibili nei libri di testo (almeno in quelli in mio possesso). Non dovrebbero comportare sforzi eroici, creazione di nuove teorie matematiche che rivoluzionino lo scibile scientifico tutto, tutt'altro. Degli esercizi (giudicherete voi quanto bizzarri), sono sempre la applicazione più o meno pedissequa di quanto studiato a teoria e l'espressione delle abilità acquisite facendo altri esercizi (magari quelli sì, standard). Se ci dovesse essere qualche errore, al solito chiamatemi.

1. Sia a_n una successione. Provare che esistono due successioni b_n e c_n tali che:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_n = \prod_{k=0}^{n} c_n$$

Trovare dunque una definizione per b_n e c_n.

2. Usando il *Principio d'Induzione* mostrare che si ha:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{n+n^2} \leq \frac{n}{2}$$

3. Trovare sup ed inf ed eventuali max e min del seguente insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n} x^{2n+1} = 0 \right\}$$

4. Si definisce *Semifattoriale* di n e si indica con $n!!$ la successione così definita:

$$\begin{cases} 0!! = 1 \\ 1!! = 1 \\ n!! = n \cdot (n-2)!! \end{cases}$$

Trovare sup ed inf ed eventuali max e min del seguente insieme:

$$A = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{\alpha^n n!} < +\infty \right\}$$

5. Siano $b_n > 0$ ed a_n tale che:

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Provare che se si ha

$$\lim_{n\to\infty} {b_n}^{a_n} = L$$

allora risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt[\alpha]{L}$$

6. Provare che data una successione $a_n > 0$ tale che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = L$$

(N.B.: Non importa utilizzare il *Criterio della Radice*!)

7. Sulla base del punto precedente (e del punto 1), dimostrare come dal *Teorema della Media* discenda il *Criterio della Radice*.

8. Sia a_n una successione, mostrare che se si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = L$$

allora si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_n = L$$

Si supponga che entrambe i limiti esistano.

9. Sia $a_n > 0$ definita su $\mathbb{N}$ una successione tale che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n a_{n+1}}{a_n} - n = \alpha$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ mostrare che si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}} = e^{\alpha}$$

10. Calcolare, anche alla luce del punto precedente, il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n \ln n}$$

11. Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln^k x}}{x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\ln^k \operatorname{sen} x}}{x}$$

12. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

(a)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{nx}$$

(b)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{n}x)}{nx}$$

13. Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $m(\bar{x}) - n(\bar{x}) = 0$ essendo $m(x) - n(x)$ invertibile. Dimostrare che se si ha:

$$m\left(f\left(m(x)\right)\right) = n\left(f\left(n(x)\right)\right)$$

allora $\bar{x}$ è un punto fisso per f. Si supponga, ovviamente, che $\bar{x} \in \mathcal{D}\, f \cap \operatorname{Im} f$. Fornire invece un controesempio scartando l'ipotesi di invertibilità.

14. Sia f una funzione derivabile due volte in un intorno dell'origine tale che:

$$f(-x) = f^2(x) - x^3 f(x) + 2x^3$$

calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(f(x) - 1)(\ln \cos x)}{x^2(\operatorname{sen} x - \operatorname{senh} x)}$$

sapendo che tale limite esiste ed è finito.

15. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} x^n (x-1)\, dt\right)}{\ln n}$$

16. Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Discutere la stazionarietà del punto $x = 0$.