Primo Appello di A.M. 1
Prova scritta 20/12/2005 - C.d.L. in Fisica

ESERCIZIO 1.

Determinare le principali proprietà (senza lo studio della derivata seconda) della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log^2|x-1| - \log|x-1| - 2}$$

e disegnarne il grafico.

Soluzione:

Sia $g(x) := \sqrt{\log^2|x| - \log|x| - 2}$

Osservo che $f(x) = g(x-1)$, quindi, noto il grafico di g, si ottiene il grafico di f traslando verso destra di una unità il grafico di g.

Studiamo pertanto g.

g è una funzione pari, per cui il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Possiamo quindi limitarci al caso $x \geq 0$. Con tale restrizione si ha

$$g(x) = \sqrt{\log^2 x - \log x - 2} \qquad (x \geq 0).$$

Dominio di g:

Deve essere $x > 0$ (altrimenti $\log x$ non è definito)

e $\log^2 x - \log x - 2 \geq 0$.

Posto $\log x = t$ si ha

$$t^2 - t - 2 \geq 0.$$

$\Delta: 1 + 8 = 9 > 0$

$t_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$

Quindi $t^2 - t - 2 \geq 0 \iff t \leq -1$ opp. $t \geq 2$.

cioè $\log^2 x - \log x - 2 \geq 0 \iff \log x \leq -1$ opp. $\log x \geq 2$

vale a dire

$$x \leq e^{-1} \quad \text{opp.} \quad x \geq e^2.$$

In conclusione: $0 < x \leq \frac{1}{e}$ opp. $x \geq e^2$.

Asintoti:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\log^2 x - \log x - 2} = \lim_{x \to 0^+} |\log x| \sqrt{1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2}{\log^2 x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\log^2 x - \log x - 2} = \lim_{x \to +\infty} |\log x| \sqrt{1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2}{\log^2 x}} = +\infty$$

Quindi: $x = 0$ è un asintoto verticale.

Non c'è invece asintoto obliquo, infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\log^2 x - \log x - 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|\log x|}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2}{\log^2 x}} = +\infty$$

Notiamo infine che

$$g\left(\tfrac{1}{e}\right) = \sqrt{\log^2 \tfrac{1}{e} - \log \tfrac{1}{e} - 2} = 0$$

$$g(e^2) = \sqrt{\log^2(e^2) - \log(e^2) - 2} = 0$$

Segno di g: $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \cup [e^2, +\infty)$

[infatti $g(x)$ è una radice quadrata ...]

Intersezioni con gli assi:

con asse y non ce n'è.

con asse x: $g(x) = 0 \iff \log^2 x - \log x - 2 = 0 \underset{(x>0)}{\iff} x = \frac{1}{e}, x = $

Monotonia:

g è derivabile in $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e^2, +\infty)$ e

$$g'(x) = \frac{2\log x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{2\sqrt{\log^2 x - \log x - 2}} = \frac{2\log x - 1}{2x\sqrt{\log^2 x - \log x - 2}}$$

Poiché il denominatore è > 0 in $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e^2, +\infty)$ si avrà

$$g'(x) \geq 0 \iff 2\log x - 1 \geq 0 \iff \log x \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \sqrt{e}$$