Secondo Preliminare
di Analisi Matematica 1

1) Determinare le principali proprietà della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2|x|}{x^2-4}\right) - |x|$$

e disegnarne il grafico

Soluz.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Simmetrie: f è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Intersezione con asse y: $f(0) = 0$.

D'ora in poi $\underline{x \geq 0}$. Quindi $f(x) = \arctan \frac{2x}{x^2-4} - x$

ed f è continua in $[0,2) \cup (2,+\infty)$

Limiti:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 2$;

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\frac{\pi}{2} - 2$.

Asintoti:

Poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan \frac{2x}{x^2-4} = 0^+$

si ha che

$y = -x$ è l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
e che f sta sopra l'asintoto, definitivamente

Monotonia: f è derivabile in $(0,2) \cup (2,+\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)^2}\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)' - 1 =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-4)-(2x)^2}{(x^2-4)^2} - 1 = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2+4x^2} - 1$$

$$= -2\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2+4x^2} - 1$$

Poiché $\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2+4x^2} \geq 0$ allora

$$-2\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2+4x^2} - 1 < 0 \quad \forall x \in (0,2) \cup (2,+\infty).$$

Quindi f è decrescente in $(0,2)$ e in $(2,+\infty)$.

Notiamo che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{-8}{16} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 2^{\mp}} f'(x) = -2 \cdot \frac{8}{16} - 1 = -2$$

Convessità:

$$f''(x) = \left[-2\frac{x^2+4}{x^4-8x^2+16+4x^2} - 1\right]' =$$

$$= \left[-2\frac{x^2+4}{x^4-4x^2+16}\right]' = -2\frac{2x(x^4-4x^2+16)-(x^2+4)(4x^3-8x)}{(x^4-4x^2+16)^2} =$$

$$= -2 \cdot \frac{2x(x^4-4x^2+16) - 2x(x^2+4)(2x^2-4)}{(x^4-4x^2+16)^2} =$$

$$= -2 \cdot 2x \frac{x^4-4x^2+16-2x^4+4x^2-8x^2+16}{(x^4-4x^2+16)^2} =$$

$$= -4\frac{x}{(x^4-4x^2+16)^2} \cdot \left[-x^4-8x^2+32\right] = \frac{4x}{(x^4-4x^2+16)^2}\left[x^4+8x^2-3\right.$$

Poiché $\frac{4x}{(x^4-4x^2+16)^2} > 0 \quad \forall x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$

si ha che in $(0,2) \cup (2,+\infty)$

$$f''(x) > 0 \iff x^4 + 8x^2 - 32 > 0$$