20/12/2005

ESERCIZIO 2:

Calcolare, se esiste, il limite della successione (a_n), con

$$a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) / \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2n}\right)}$$

Soluzione:

Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^{∞}.

Ricordando che se $b_n \to 0$ $\left|\begin{array}{l} b_n \neq 0 \\ \text{allora} \end{array}\right.$

$$(1+b_n)^{1/b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e, \qquad \frac{\cos b_n - 1}{b_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}; \qquad \frac{\operatorname{sen} b_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

si ha:

$$a_n = \left\{\left(1 + \cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}}\right\}^{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)\cdot \frac{\frac{3}{2n}}{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2n}\right)}\cdot\left(\frac{2n}{3}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

La quantità dentro la parentesi graffa tende a "e" per $n \to +\infty$.

Studiamo l'esponente: moltiplicando e dividendo per n si ha:

$$\frac{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{3}{2n}}{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2n}\right)} \cdot \left(\frac{2n}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = e^{-1/3}.$$

Esercizio 3:

Si consideri il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt{2x} + \cosh\sqrt{2x} + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 6x - 2e^x + \alpha x^2}{\log(1 + \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x)}.$$

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ affinché il limite esista e sia finito, poi calcolarlo.

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt{2x} + \cosh\sqrt{2x} + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 6x - 2e^x + \alpha x^2}{\log(1 + \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{\log(1 + \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x)} \cdot \frac{\cos\sqrt{2x} + \cosh\sqrt{2x} + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 6x - 2e^x + \alpha x^2}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt{2x} + \cosh\sqrt{2x} + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 6x - 2e^x + \alpha x^2}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$$

Ora: $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$,

pertanto

$\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x = \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$.

Il numeratore andrà sviluppato almeno fino al terzo ordine.

Si ha:

$$\cos\sqrt{2x} = 1 - \frac{2x}{2} + \frac{4x^2}{24} - \frac{8x^3}{6!} + o(x^3)$$

$$\cosh\sqrt{2x} = 1 + \frac{2x}{2} + \frac{4x^2}{24} + \frac{8x^3}{6!} + o(x^3)$$