Esercizio 3: Secondo Prelim. 13/12/2005

Studiare la derivabilità della seguente funzione al variare di $\alpha \geq 1$

$$f(x) = \begin{cases} \arcsen(x^\alpha \log|x|) & \text{se } 0 < x < 1/e \\ \sqrt{x^4 \cos x} & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \end{cases}$$

Soluzione: Innanzi tutto $\log|x| = \log x \quad (x > 0)$

Osserviamo che la funzione è ben definita, Infatti ($\alpha \geq 1$)

$$\left|x^\alpha \log|x|\right| = \left|x^\alpha \log x\right| \leq x\left|\log x\right| = -x\log x \text{ se } x \in (0, \tfrac{1}{e})$$

Ora (sia $x \in (0,\frac{1}{e})$) $g(x) := -x\log x$, $g'(x) = -\log x - 1 > 0 \iff$

$\iff -1 > \log x \iff 0 < x < \frac{1}{e}$

Allora g è crescente in $(0, \frac{1}{e})$ e $g(\frac{1}{e}) = +\frac{1}{e} >$

e quindi $0 = \lim_{y \to 0^+} g(y) \leq g(x) \leq g(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} < 1$

per ogni $x \in (0, \frac{1}{e})$

Ora: f è sicuramente continua in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{e}) \setminus \{0\}$.

Inoltre f è continua anche in 0, in quanto

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arcsen(x^\alpha \log x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite notevole!}}}{=} \arcsen(0) = 0$$

$= \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0.$

Studiamo ora la derivabilità di f.

f è certamente derivabile in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{e}) \setminus \{0\}$.

(composizione di funzioni derivabili)

Studiamo la derivabilità di f in $x = 0$.

se $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\arcsen(x^\alpha \log x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2\alpha}\log^2 x}} \cdot (x^\alpha \log x)' =$$

$$= \frac{\alpha x^{\alpha-1}\log x + \frac{x^\alpha}{x}}{\sqrt{1 - x^{2\alpha}\log^2 x}} = \frac{x^{\alpha-1}\left[\alpha \log x + 1\right]}{\sqrt{1 - x^{2\alpha}\log^2 x}}$$

se $x < 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^4 \cos x}\right)' = \left(x^2\sqrt{\cos x}\right)' = 2x\sqrt{\cos x} + \frac{-x^2 \sen x}{2\sqrt{\cos x}}$$

~~Pertanto~~: $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(2x\sqrt{\cos x} - \frac{1}{2}x^2 \frac{\sen x}{\sqrt{\cos x}}\right) = 0$

Per quel che riguarda $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ si distinguono 2 casi:

caso $\alpha = 1$:

$$f'(x) = \frac{\log x + 1}{\sqrt{1 - x^2\log^2 x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$$

caso $\alpha > 1$

$$f'(x) = \frac{x^{\alpha-1}\left[\alpha \log x + 1\right]}{\sqrt{1 - x^{2\alpha}\log^2 x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

Infatti: $\sqrt{1 - x^{2\alpha}\log^2 x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (in quanto $x^{2\alpha}\log^2 x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$)

e $x^{\alpha-1}\left[\alpha \log x + 1\right] = \alpha \underbrace{x^{\alpha-1}\log x}_{\to 0} + \underbrace{x^{\alpha-1}}_{\to 0} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Pertanto: se $\alpha = 1$ f non è derivabile in 0 e 0 è un punto angoloso, se $\alpha > 1$ f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.