Primo preliminare di Analisi Matematica 1

C.d.L. in Fisica – Prof. G. Villari

A.A. 2005/2006 - 11 Novembre 2005

Esercizio 1. Dimostrare con il ragionamento induttivo la seguente disuguaglianza

$$\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Esercizio 2. Si consideri l'insieme

$$\left\{ \frac{x + |y|}{x - |y|} \, : \, x, y \in \mathbb{R}, 0 < |y| < x \right\}.$$

Determinarne, se esistono, l'estremo superiore e inferiore, il massimo e il minimo.

Esercizio 3. Usando la definizione di limite verificare **uno e uno solo** dei seguenti limiti

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 - 3n}{-n^2 + 2} + n = 0;$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Esercizio 4. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{e^{n!} + 5n^{2n}}{e^{n!} - 3n^{2n}} - e^{\frac{1}{n}} \right).$$

Esercizio 5. Determinare per quali valori di a e b in $\mathbb{R}$ si ha la continuità in 1 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - x}{\log x} & \text{se}\, 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se}\, x = 1 \\ \dfrac{\arcsin(x-1) - \sin(b(1-x))}{\sin|1-x|} & \text{se}\, 1 < x < 2. \end{cases}$$