Quindi

$$\cos\sqrt{2x} + \cosh\sqrt{2x} = 2 + \frac{x^2}{3} + o(x^3).$$

$$\operatorname{sen}(6x) = 6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^4) = 6x - 36x^3 + o(x^4), \text{ da cui}$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sen}(6x) = 2x - 12x^3 + o(x^4)$$

$$-2e^x = -2\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] = -2 - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Dunque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2} + \frac{x^2}{3} + \cancel{2x} - 12x^3 - \cancel{2} - \cancel{2x} - x^2 - \frac{x^3}{3} + \alpha x^2 + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^4)}$$

cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\alpha - \frac{2}{3}\right) - x^3\left(12 + \frac{1}{3}\right) + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^4)}$$

Affinché il limite sia finito deve essere $\alpha = \frac{2}{3}$.

In tal caso si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3\left\{-\frac{37}{3} + o(1)\right\}}{x^3\left(\frac{2}{3} + o(x)\right)} = -\frac{37}{2}.$$

20/12/2005

Esercizio 4:

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 - 1}}\,dx$$

Soluzione: Ricordiamo che $\cosh^2 x - 1 = \operatorname{senh}^2 x$.

Poniamo $x = \cosh t$, da cui $t = \operatorname{settcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Quindi: se $x = 1$ allora $t = 0$

se $x = 2$ allora $t = \operatorname{settcosh} 2 = \log(2 + \sqrt{3})$

Inoltre

$$dx = \operatorname{senh} t\, dt.$$

Pertanto

$$\int_1^2 \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 - 1}}\,dx = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{1}{1 + \sqrt{\cosh^2 t - 1}} \cdot \operatorname{senh} t\, dt.$$

Poiché $t \in (0, \log(2+\sqrt{3}))$ allora $\sqrt{\cosh^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{senh}^2 t} = \operatorname{senh} t$

da cui

$$\int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{1}{1 + \sqrt{\cosh^2 t - 1}} \cdot \operatorname{senh} t\, dt = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{\operatorname{senh} t}{1 + \operatorname{senh} t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{1 + \operatorname{senh} t - 1}{1 + \operatorname{senh} t}\,dt = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \left(1 - \frac{1}{1 + \operatorname{senh} t}\right) dt =$$

$$= \Big[t\Big]_0^{\log(2+\sqrt{3})} - \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{1}{1 + \operatorname{senh} t}\,dt = \log(2+\sqrt{3}) - \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{1}{1 + \frac{e^t - e^{-t}}{2}}\,dt$$

Poiché, nell'ultima uguaglianza, si è usato il fatto che

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$