Appunti di Analisi I

Poggi Matteo

1 Generalità su $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

1.1 Numeri Naturali

I Numeri Nautali ($\mathbb{N}$) sono definiti per via assiomatica attraverso gli *Assiomi di Peano*:

$$\exists\, \mathbb{N}, \exists\, \sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$$

$$\exists!\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\, \sigma(n) \neq n_0$$

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}\, \sigma(m) = \sigma(n) \Rightarrow m = n$$

$$\text{Sia } A \subseteq \mathbb{N} : n_0 \in A \text{ se } \forall\, n \in A,\ \sigma(n) \in A \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Dove $\sigma(n)$ rappresenta il successivo di n.
Si definiscono in $\mathbb{N}$ le seguenti leggi di composizione interna:

- La **Somma** $(+)$ $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, che ha le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a + \sigma(b) &= \sigma(a + b) \\ a + n_0 &= a \\ a + \sigma(n_0) &= \sigma(a) \end{aligned}$$

- Il **Prodotto** $(\times)$:

$$\forall\, a, b\, \exists\, a \cdot b \in \mathbb{N}$$

1.2 Numeri Interi

Adesso vogliamo costruire, a partire dai Numeri Naturali, un *ampliamento* di questi chiuso rispetto all'inverso della somma: definiamo dunque la relazione $\mathfrak{R} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, quindi per coppie (a, b) di Numeri Naturali come segue:

$$(a, b)\, \mathfrak{R}\, (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \quad \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{N}$$

Vediamo che $\mathfrak{R}$ è una relazione di *equivalenza* poichè è:

Riflessiva infatti $(a, b)\, \mathfrak{R}\, (a, b)$ perchè

$$a + b = b + a$$

Simmetrica infatti se $(a, b)\, \mathfrak{R}\, (c, d) \Rightarrow (c, d)\, \mathfrak{R}\, (a, b)$ perchè se

$$a + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a$$

Transitiva infatti se $(a,b)\,\mathfrak{R}\,(c,d)$ e $(c,d)\,\mathfrak{R}\,(e,f) \Rightarrow (a,b)\,\mathfrak{R}\,(e,f)$ perchè

$$\begin{aligned} a+d &= b+c && (1.1) \\ c+f &= d+e && (1.2) \end{aligned}$$

Sommando membro a la (1.1) e la (1.2) otteniamo

$$a+b+c+f = b+c+d+e \Rightarrow a+f = b+e$$

Adesso opereiamo l'insieme quoziente $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\mathfrak{R}$ abbiamo quindi una partizione, nel quale saranno presenti tre classi di elementi: $[a,0]$, $[0,a]$, $[a,a]$. Alla prima daremo la simbologia $+a$, alla seconda $-a$, alla terza 0. A questo punto possiamo definire una nuova operazione interna a $\mathbb{Z}$: la *Somma* $(\oplus)$[1] :

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

Si noti che abbiamo definito tali operazioni usufruendo solo di $a,b,c,d \in \mathbb{N}$.

1.3 Numeri Razionali

Daremo qui solo un'idea del procedimento con cui si ottiene l'insieme dei Numeri Razionali. Il procedimento presenta qualche analogia con quello usato precedentemente: partiamo da $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ e definiamo la $\mathfrak{S} : \mathbb{Z}^2 \Rightarrow \mathbb{Z}^2$:

$$(a,b)\,\mathfrak{S}\,(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Dunque effettuando come sopra una partizione avremo $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}^2/\mathfrak{S}$, che scriveremo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Notiamo adesso come nei Numeri Razionali viga una relazione di ordine stretto $(\leq)$, essendo questa:

Riflessiva $\forall\, a \in \mathbb{Q}, a \leq a$

Antisimmetrica $\forall\, a,b \in \mathbb{Q}$ se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$

Transitiva $\forall\, a,b,c \in \mathbb{Q}\, a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Dicotomica $\forall\, a,b \in \mathbb{Q}\, a \leq b \,\vee\, b \leq a$

Per introdurre il successivo insieme di numeri, proveremo questo

Teorema 1.1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Poniamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, allora

$$\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Potremo quindi ridurre la frazione $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$ in modo che a e b siano primi tra di loro. Dunque abbiamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

[1] analogamente potremo definire il *Prodotto* $(\otimes)$:

$$(a,b) \otimes (c,d) = (ac+bd, ad+bc)$$

dunque a^2 è pari, quindi a è pari. Possiamo dunque scrivere $a = 2c$ ma ciò equivale ad affermare $a^2 = 4c^2$, otterremo così:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= 4c^2 \\ b^2 &= 2c^2 \end{aligned}$$

dunque b è pari, come a; ma ciò è assurdo, poichè a e b erano primi fra loro. □

1.4 Sezioni

Definizione 1.1 (sezione)**.** *Dato un insieme A si definisce sezione di A la coppia di insiemi B e C tali che:*

$$B, C \subset A$$

$$B \cup C = A$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$\forall\, b \in B, \forall\, c \in C \quad b < c$$

Inoltre diciamo che una sezione è:

di prima specie *se l'elemento separatore delle due classi non appartiene nè a B nè a C;*

di seconda specie *se l'elemento separatore delle due classi appartiene ad uno dei due insiemi.*

Definizione 1.2 (max)**.** *Dato un insieme A ed un suo elemento a, di dice che a è massimo di A ($a = \max A$) se e solo se $\forall\, x \in A, x \leq a$*

Analogamente di definisce il minimo (min)
Premesso ciò costruiamo due insiemi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Q} : x < 0, x \geq 0 \wedge x^2 < 2\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 > 2\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

come si può verificare semplicemente A/B è una sezione, godendo delle proprietà sopra indicate. Vogliamo mostrare adesso che $\nexists \max A$

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che $\exists L \in A : \forall x \in A : L \geq x$, sia poi $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo arrivare a dire che

$$\left(L + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \tag{1.4}$$

che evidentemente è assurdo poichè L non sarebbe più max. Vediamo se è possibile trovare un valore di n che soddisfi la (1.4):

$$\left(L + \frac{1}{n}\right)^2 = L^2 + \frac{2L}{n} + \frac{1}{n^2} \tag{1.5}$$

Dato che $\forall\, n \in \mathbb{N}\, 1/n^2 \leq 1/n$ abbiamo, maggiorando la (1.5)

$$L^2 + \frac{1}{n} + \frac{2L}{N} = L^2 + \frac{2L+1}{n} < 2$$

che risolta dà

$$n > \frac{1 + 2L}{2 - L^2}$$

dunque, sotto queste condizioni si verifica l'assurdo (1.4) □

Analogamente si può dimostrare che l'insieme B non ha min. Da ciò acuiamo che $\sqrt{2}$ non è compreso in nessuno dei due sottoinsiemi di $A, B \subset \mathbb{R}$, si tratta dunque di una sezione di prima specie.

1.5 Numeri Reali

Definiremo adesso i Numeri Reali $\mathbb{R}$ per via assiomatica, senza citare il procedimento (ben diverso da quelli mostrati fin ora) con cui si può arrivare a tale insieme partendo da quelli già visti. I diversi modi con cui possiamo arrivare a tale definizione, sono equivalenti, vale a dire che uno non può essere preferibile rispetto all'altro. Enunciamo gli assiomi, sinteticamente espressi con $\mathbb{R}(\leq, +, \times, 0, 1,)$

- sono assiomi d'ordine totale:

  O_1 $\forall x, y \in \mathbb{R}\, x \leq y \vee y \leq x$

  O_2 $\forall x \in \mathbb{R}\, x \leq x$

  O_3 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

  O_4 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\, x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

- sono assiomi relativi alla operazione di composizione interna *Somma*:

  S_1 $\forall x, y \in \mathbb{R}\, x + y = y + x$

  S_2 $\forall x, y \in \mathbb{R}\, (x + y) + z = x + (y + z)$

  S_3 $\exists!\, 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x\, \forall x \in \mathbb{R}$

  S_4 $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists! - x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$

- sono assiomi relativi alla operazione di composizione interna *Prodotto*:

  P_1 $\forall x, y \in \mathbb{R}\, x \cdot y = y \cdot x$

  P_2 $\forall x, y \in \mathbb{R}\, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

  P_3 $\exists!\, 1 \neq 0 \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x\, \forall x \in \mathbb{R}$

  P_4 $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}\, \exists!\, x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot (x^{-1}) = 1$

- sono assiomi relativi al rapporto tra le precedenti strutture:

  OS $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ con $x \leq y$ si ha che $x + z \leq y + z$

  OP $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $0 \leq x$ e $0 \leq y$ si ha che $0 \leq x \cdot y$

  SP $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

- esiste infine un assioma che contraddistingue $\mathbb{R}$ dagli altri insiemi numerici (descritti dalle proprietà ora espresse):

  Assioma di Dedekind Sia A/B una sezione di $\mathbb{R}\, \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow \exists! L : a \leq L \leq b$

Si potrebbe dimostrare che qualsiasi altro $\widehat{\mathbb{R}}(\preccurlyeq, \oplus, \otimes, \widehat{0}, \widehat{1})$,insieme che goda quindi degli stessi assiomi è in relazione biunivoca con $\mathbb{R}$.
Occorre ricordare, a questo punto che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. È altresì interessante ricodare che tra i *Numeri Irrazionali* $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ si dividano in:

Algebrici se sono soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi;

Trascendenti se non sono tali. Esempi di numeri trascendenti sono π, e.

L'assioma di Dedekind, che a prima vista ci può sembrare banale, in realtà è fondamentale per tutta l'analisi. Esso ci assicura che l'elemento separatore L appartenga ad una delle due classi. Questo è un elemento caratterizzante dei numeri reali. Abbiamo sopra dimostrato che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, dunque il tale numero irrazionale non apparteneva a nessun insieme della sezione (1.3). Ciò non avviene per i numeri reali. Di seguito daremo delle importanti conseguenze di questo assioma.

1.6 Cenni di Norma, Metrica, Topologia

Definizione 1.3. *In* $\mathbb{R}$ *è possibile definire la funzione* Valore Assoluto*, nel seguente modo:*

$$|x| = \max\{-x, x\} \tag{1.6}$$

perfettamente equivalente a:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Una funzione siffatta, che rispetti le seguenti proprietà:

$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

si definisce *Norma*
vedremo come da ciò si ricavi l'importante *diseguaglianza triangolare*:

$$|x| \geq x$$
$$|x| \geq -x$$

$$a + b \leq a + |b| \leq |a| + |b|$$

allo stesso modo:

$$-a - b \leq -a + |x| \leq |a| + |b|$$

dunque ricordando la definizione (1.6) di valore assoluto si ha che:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.7}$$

detta appunto, *diseguaglianza triangolare*. Ponendo poi $a + b = -c$ si ha che $b = -c - a$, che sostituito nella (1.7) dà:

$$\begin{aligned} |-c| &\leq |a| + |c + a| \\ |a + c| &\leq |c| - |a| \\ |a + c| &\leq |a| - |c| \\ |a + c| &\leq ||a| - |c|| \end{aligned}$$

Tale norma indurrà una *Metrica* su $\mathbb{R}$. Tale metrica misurerà la distanza tra gli elementi dell'insieme dove è definita:

$$|(x - y)| = d(x, y)$$

Di conseguenza tale metrica avrà queste proprietà:

$$d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

Tale metrica indurrà a sua volta una *Topologia*, che ci permetterà di dare la seguente

Definizione 1.4 (intorno)**.** *Si dice intorno di* x_0 *di raggio* ϵ *li seguente insieme* $\{x \in \mathbb{R} : d(x - x_o) < \epsilon\}$

1.7 Teoremi fondamentali in $\mathbb{R}$

Definizione 1.5 (maggiorante)**.** *Dato un insieme A si definisce maggiorante di A un elemento $x : x \geq a, \forall\, a \in A$.*

Definizione 1.6 (sup)**.** *Si definisce estremo superiore di A ($\sup A$) il minore dei maggioranti di A.*

Ovviamente, le definizioni di *Minorante* e di *Estremo inferiore* sono perfettamente simmetriche a quelle date.

Teorema 1.2. *Ogni $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente ammette* sup.

Dimostrazione. Se A è limitato ammette un maggiorante, cioè $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \forall\, a \in A,\ a \leq \alpha$. Adesso costruiamo $M(A)$, l'insieme di tutti i maggioranti di A e $M'(A)$ come l'insieme dei non maggioranti di A. Si vede subito che valgono le proprietà

$$\begin{array}{l} M(A) \cup M'(A) = \mathbb{R} \\ M(A) \cap M'(A) = \emptyset \end{array} \tag{1.8}$$

inoltre sia $a \in M'(A)$, sappiamo che a non è un maggiorante quindi $\exists\, x \in A : a < x$, d'altro canto sappiamo che $\forall\, b \in M(A), \forall x \in A,\ x \leq b$ da ciò e dalle (1.8) segue che $a < b \forall\, a \in A, \forall\, b \in B$. Dunque $M(A)$ e $M'(A)$ sono una sezione di $\mathbb{R}$. Entra in gioco a questo punto l'assioma di Dedekind:

$$a \leq L \leq b \quad \forall\, a \in M'(A), \forall\, b \in M(A)$$

dunque L, separatore delle due classi, dovrà appartenere ad una delle due; quindi o sarà il minimo dei maggioranti (sup) oppure il massimo dei non maggioranti. Ragioniamo per assurdo, ponendo che sia proprio il massimo dei non maggioranti, avremo che $\exists\, \beta \in A :\ L < \beta$ da questa si ricava:

$$L < \frac{L+\beta}{2} < \beta$$

ciò implica che $\frac{L+\beta}{2}$ non sia un maggiorante, dunque sarà un non maggiorante, maggiore però di L, che avevamo supposto il massimo dei non maggioranti. Questo è palesemente assurdo. Dunque L è il minimo dei maggioranti di A, ovvero $L = \sup A$. □

Diamo adesso la definizione operativa di sup:

Definizione 1.7. *Si dice che $L = \sup A$ se e soltanto se*

$$\begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \leq L \\ \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{x} \in A : \bar{x} > L - \epsilon \end{cases}$$

Teorema 1.3 (principio di Archimede)**.** *$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $\exists\, N \in \mathbb{N} : Na > b$.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Ammettiamo che quanto detto non sia vero: ciò equivarrebbe ad affermare che $\exists\, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R} : n\bar{a} \leq \bar{b} \forall\, n \in \mathbb{N}$ costruiamo dunque il seguente insieme:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = n\bar{a}\}$$

L'insieme A avendo $\bar{b}$ come maggiorante, sarebbe limitato superiormente ed ammetterebbe $\sup A = L$. Dunque sarebbe anche vero che

$$(m+1)\bar{a} \leq L$$

poichè $m + 1 \in \mathbb{N}$, dunque

$$m\bar{a} \leq L - \bar{a} < L$$

ma ciò è evidentemente assurdo poichè abbiamo trovato un maggiorante $(L - \bar{a})$ minore di L. □

Teorema 1.4. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$, allora $\exists\, c \in \mathbb{Q} : a < c < b$.*

Dimostrazione. Sia $N \in \mathbb{N} : N > 1/(b-a)$ (tale N esiste per il principio di Archimede). Iniziamo adesso a scrivere la successione (ogni elemento della quale è razionale):

$$\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \ldots, \frac{k}{N}, \ldots \tag{1.9}$$

Distinguiamo adesso due casi:
Caso 1: $\frac{1}{N} > a$, dovremo far vedere è anche minore di b:

$$N > \frac{1}{b-a} \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{N} < b - a < b$$

poichè risulterà ovvio che $b - a < b$
Caso 2: della successione (1.9), supponiamo che $\frac{k}{N}$ sia l'ultimo elemento minore di a, dovremo dimostrare che $\frac{k+1}{N} < b$

$$\frac{k}{N} < a$$

e ricordando la (1.10)

$$\frac{k+1}{N} < a + \frac{1}{N} < a + (b-a) < b$$

□

Lemma 1.5. *Sia $p^n(x)$ un polinomio, se $p^n(x_0) > 0$ (< 0) allora esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ in cui $p^n(x) > 0$ (< 0).*

Enunciato questo lemma, di cui non daremo la dimostrazione, possiamo provare il seguente

Teorema 1.6 (degli zeri di un polinomio)**.** *Sia $p^n(x)$ un polinomio, sia $a < b$. Se $p^n(a) < 0$ e $p^n(b) > 0$ allora $\exists\, \xi : p^n(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Costruiamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b : p^n(x) < 0\}$, si tratterà di un insieme limitato superiormente (ad esempio da b) e quindi ammetterà $\sup A = L$. Ragioniamo adesso per assurdo. Ammettiamo che $p^n(L) > 0$ allora per il lemma (1.5) $\exists\, I(L, \delta)$ in cui $p^n(x) > 0$, se così fosse dunque L non sarebbe un maggiorante, poichè nel sudetto intorno si trovavano valori maggiori di L. Adesso ammettiamo, sempre per assurdo, che $p^n(L) < 0$, se così fosse per il solito lemma $\exists\, I(L, \delta)$ in cui $p^n(x) < 0$. Questo implica nel suddetto intorno si torvino dei minoranti di A, minori di L, anche questo è ovviamente assurdo. Non rimame che l'ipotesi che $p^n(L) = 0$. □

Teorema 1.7 (dell'esistenza delle radici n-esime)**.** *Sia $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, allora esiste un unico $y \in \mathbb{N} : y^n = a$.*

Dimostrazione. Consideriamo il polinomio $p^n(x) = x^n - a$. Vediamo che $p^n(0) = -a < 0$. Adesso se $a < 1$ si vede che $p^n(1) = 1 - a > 0$ e quindi per il teorema (1.6) $\exists\, y : p^n(y) = 0$. Se invece $a > 1$, $p^n(a) = a^n - a > 0$ e quindi sempre per il teorema (1.6) $\exists\, y : p^n(y) = 0$.
Per verificare l'unicità della radice, ragioniamo per assurdo e poniamo che $y_1^n = a = y_2^n$. D'altro canto risulta

$$(y_1^n - y_2^n) = (y_1 - y_2)(y_1^{n-1} y_2 + y_1^{n-2} y_2^2 + \cdots + y_1 y_2^{n-2} + y_2^{n-1})$$

Si noti che la quantità $(y_1^n - y_2^n) = 0$ per costruzione, il secondo fattore risulta sempre positivo (perchè somma di termini positivi), dunque non potrà che $(y_1 - y_2) = 0$, vale a dire $y_1 = y_2$. □

1.8 Topologia in $\mathbb{R}$

Definizione 1.8 (aperto). *$A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se e soltanto se $\forall \bar{x} \in A \,\exists\, I(\bar{x}, r) \subset A$. Il punto $\bar{x}$, di dice* interno *ad A.*

Da ciò si evince che un aperto contiene tutti i suoi punti interni. L'insieme dei punti interni ad A si dice *interno di A* e si indica con $\mathring{A}$. Da notare che se l'inseme A è aperto si avrà che $\mathring{A}$. Inoltre un vale il seguente:

Teorema 1.8. *Siano A, B due insiemi aperti, allora $A \cap B$ e $A \cup B$ sono entrambe aperti.*

Dimostrazione. Difatti se A e B sono aperti per ogni loro punto esisterà un intorno tutto contenuto sia in $A \cap B$ che in $A \cup B$, dunque anche questi ultimi risulteranno aperti. □

Osservazione 1.1: Si possono estendere queste prorpietà con un numero finito di insiemi aperti. Quando passiamo all'infinito, si vede che, detti A_i degli insiemi aperti $\bigcup_i A_i$ risulta essere aperto, ma $\bigcap_i A_i$ non risulta sempre aperto; facciamo un esempio. Prendiamo gli insiemi $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \, -3 - \frac{1}{n} < x < 3\right\}$. È facile verificare come tutti questi insiemi siano aperti, ma $\bigcup_n A_n$ non è aperto poichè l'elemento $\{-3\} \in A_n$.

Dimostrazione. Sia $\hat{x} \in \bigcap_n A_n$, se $d(\hat{x}, -3) = \delta \,\exists\, \bar{n} : \, \frac{1}{n} < \delta$ basta scegliere $\bar{n} > \frac{1}{\delta}$. Questo significa che ci possiamo avvicinare quanto vogliamo a -3, che però resterà sempre in tutti gli A_n.
Inoltre si considerano aperti $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ □

Diamo ora la definizione di

Definizione 1.9 (chiuso). *Un insieme A si dice chiuso se il suo complementare $\mathcal{C}A$ è aperto.*

Si può verificare subito che $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono anche chiusi, essendo aperti e reciprocamente comlementari. Analogamente al teorema (1.8) si capisce che mentre sia l'intersezione e l'unione di un numero finito di chiusi, e l'intersezione di infiniti chiusi è chiusa, l'unione di infiniti chiusi può essere aperta.
Diamo adesso un'importantissima

Definizione 1.10 (punto di accumulazione). *Si dice che x_0 è punto di accumulazione per A se e solo se $\forall \epsilon > 0 \,\exists\, I(x_0, \epsilon)$ che contenga almeno un $x \in A : \, \bar{x} \neq x_0$*

Osservazione 1.2: Si noti che un punto di accumulazione per A non necessariamente apparterrà a tale insieme[2]. Da ciò segue che in realtà tale intorno contiene infiniti punti dell'insieme A.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che, detto x_0 un punto di accumulazione per A, $I(x_0, \epsilon)$ contenga un numero finito di punti di A. Detti questi $x_1, x_2, \ldots x_n$, prendiamo quello con distanza minore d_{min} da x_0. Se prendiamo $\bar{d} = \frac{d_{min}}{2}$, ci accorgiamo che in tale intorno non esiste nessun punto di A. Questo contraddice il fatto che x_0 sia punto di accumulazione. □

Teorema 1.9. *L'insieme A è chiuso se e soltanto se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Poniamo per assurdo che un punto $\bar{x}$ di accumulazione per A cada in $\mathcal{C}A$, complementare, di A. Per definizione sappiamo che $\mathcal{C}A$ è aperto, ma allora $\forall \bar{x} \in \mathcal{C}A \,\exists\, I(\bar{x}, r) \subset A$. Questo contraddice l'ipotesi che $\bar{x}$ sia punto di accumulazione per A (non vi cade infatti alcun punto di A).
Viceversa, se $x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in \mathcal{C}A$, allora in un suo intorno, non cade nessun punto di A, quindi cadono tutti punti di $\mathcal{C}A$, dunque $\mathcal{C}A$ è aperto, dunque A è chiuso. □

Definizione 1.11 (derivato). *Sia A un insieme. L'insieme di tutti i suoi punti di accumulazione si chiama derivato di A e si indica con $\mathcal{D}A$.*

Dal teorema (1.9), si capisce che $A \cap \mathcal{D}A$ è chiuso, contenendo tutti i suoi punti di accumulazione.

Definizione 1.12 (chiusura). *Si definisce chiusura di A (e si indica $\bar{A}$), l'intersezione di tutti i chiusi che contengono A*

[2] Si pensi, per esempio all'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} \, n \in \mathbb{N}\right\}$, che ha $0 \notin A$ come punto di accumulazione.

Da questa definizione e dal teorema (1.9) si avrà che $\bar{A} = A$ se e soltanto se A è chiuso.

Definizione 1.13 (punto di frontiera)**.** *Si dice che x_0 è punto di frontiera per A se è punto di accumulazione per A e per $\mathcal{C}A$, cioè se in un suo intorno cade almeno un punto (quindi infiniti punti) di A ed almeno un punto (quindi infiniti punti) del suo complementare.*

Definizione 1.14 (Frontiera)**.** *L'insieme di tutti i punti di frontiera da A si dice frontiera di A e si indica con ∂A.*

Arriviamo ora ad un risultato importantissimo:

Teorema 1.10 (di Bolzano-Weierstrass)**.** *In $\mathbb{R}$, ogni insieme limitato e infinito ammette almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia C un insieme limitato ed infinito. Se è limitato esiste un intervallo $[a, b]$ che lo contiene. Dimezziamo via via questo intervallo e chiamiamo tali intervalli $[a_n, b_n]$, in modo che essi contengano sempre un numero infinito di elementi. Adesso, sappiamo che

$$(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$$

per costruzione. Creiamo dunque due insiemi: $A = \{a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n\}$ e $B = \{b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n\}$. Inoltre proviamo che $\forall\, h, k \in \mathbb{N}\, a_h < b_k$. Questo avviene poichè $a_h < a_{h+k} < b_{h+k} < b_k$. Allora b_k è un maggiorante per l'insieme A, dunque $\sup A \leq b_k$, ed ugualmente $\sup A$ è minorante per l'insieme B, dunque $\sup A \leq \inf B$. Da ciò ricaviamo che

$$0 \leq \inf A - \sup B \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Dunque scegliendo $\bar{n} : 2^{\bar{n}} > \frac{b-a}{\inf B - \sup A}$ capiamo che

$$\sup A = \inf B = \gamma$$

Adesso dimostriamo che γ è il nostro punto di accumulazione. Esso è contenuto in ogni intervallo $[a_n, b_n]$ vale a dire $a_n \leq \gamma \leq b_n$, ricordando che ogni intervallo suscritto conteneva infiniti punti e che $\forall\, I(\gamma, r)\, \exists [a_i, b_i] \subset I$, si ha che γ è punto di accumulazione per C. □

2 Successioni

Una successione è un'applicazione: $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Il termine generale di una successione viene indicato con a_n.

2.1 Limite di una successione

Definizione 2.1. *Una successione si dice* limitata *se*

$$\exists\, L : |a_n| \leq L\, \forall\, n$$

In particolare si dice limitata superiormente *se*

$$\exists\, L_1 : a_n \leq L_1\, \forall\, n$$

e limitata inferiormente *se*

$$\exists\, L_2 : a_n \geq L_2\, \forall\, n$$

Definizione 2.2. *Si dice che una successione è* definitivamente limitata *se e solo se*

$$\forall\, n > \nu\, \exists\, L : |a_n| \leq L$$

Lemma 2.1. *Se una successione è* definitivamente limitata *è anche* limitata.

Dimostrazione. Dalla precedente definizione sappiamo che a_n è limitata da L_1 per $n > \nu$. Adesso consideriamo i primi ν termini che saranno in numero finito. Ricordando che un insieme finito ha sempre un max, scegliamo $L_2 = \max(x_{n\leq\nu})$. Quindi $\forall\, n \leq \nu\ |a_n| \leq L_2$. Adesso scegliamo $L = \max(L_1, L_2)$. A questo punto avremo che $\forall\, n\ |a_n| \leq L$, che è la tesi. □

Definizione 2.3 (monotonia)**.** *Si dice che una successione è monotòna crescente se e solo se*

$$a_{n_1} \geq a_{n_2}\, \forall n_1 > n_2$$

monòtona decrescente *se e solo se*

$$a_{n_1} \geq a_{n_2}\, \forall n_1 < n_2$$

Definizione 2.4 (convergenza)**.** *Si dice che una successione converge ad a e si scrive* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *oppure $a_n \to a$ se e solo se*

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu(\epsilon) : \forall\, n > \nu\ |a - a_n| < \epsilon$$

Definizione 2.5 (divergenza)**.** *Si dice che una successione diverge a $+\infty$ e si scrive* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *oppure $a_n \to +\infty$ se e solo se*

$$\forall\, M > 0\, \exists\, \nu(\epsilon) : \forall\, n > \nu\, a_n > M$$

Teorema 2.2 (unicità del limite)**.** *Se $a_n \to a$ e $a_n \to b$, allora $a = b$.*

Dimostrazione. Scriviamo i due limiti servendoci delle due definizioni:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu_1(\epsilon) : \forall\, n > \nu_1\ |a - a_n| < \epsilon \tag{2.1}$$
$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu_2(\epsilon) : \forall\, n > \nu_2\ |b - a_n| < \epsilon \tag{2.2}$$

dunque se scelgo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ avrò dalle (2.1) e (2.2):

$$\forall\, n > \nu \begin{cases} |a_n - a| < \hat{\epsilon} \\ |a_n - b| < \hat{\epsilon} \end{cases}$$

si noti che ho specializzato ϵ poichè questo era arbitrario prendendo $\hat{\epsilon} = \frac{b-a}{3}$. In questo caso è facile vedere come i due introni $I_1(a, \hat{\epsilon})$ e $I_2(b, \hat{\epsilon})$ siano disgiunti. Dunque se $a \neq b$ cadremmo in assurdo poichè le soluzioni comuni alle due disequazioni non esisterebbero. □

Teorema 2.3. *Se una successione a_n è convergente, è limitata.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limite abbiamo:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu : \forall\, n > \nu\ |a_n - a| < \epsilon$$

dunque specializzando $\epsilon = 1$ avremo $|a_n| < |a| + 1 = L_1$, dunque è anche *definitivamente limitata*, cioè, limitata con $n > \nu$. Per il lemma (2.1), sarà anche limitata. □

Teorema 2.4 (della permanenza del segno)**.** *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ *allora* $\forall\, n > \bar{n}\ a_n > 0$.

Dimostrazione. Dalla definizione di limite si ha:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu : \forall\, n > \nu\ |a_n - a| < \epsilon$$

dunque specializzando $\epsilon = \frac{a}{2}$ si ha che $\forall\, n > \bar{n}(\epsilon)\, a_n \subset I\left(a, \frac{a}{2}\right)$, cioè $0 < \frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$. Si noti che tale intervallo è interamente positivo. □

Analogamente si dimostra per il caso $a < 0$
Passiamo adesso a fornire un teorema che ci permetterà si costruire un'algebra dei limiti.

Teorema 2.5. *Sia* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *e* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *allora valgono le seguenti proprietà:*

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Dimostrazione. Prima di scindere i vari casi è bene ricordarci che dalla definizione di limite abbiamo

$$\begin{array}{c} \forall\,\epsilon_1 > 0\,\exists\,\nu_1 : \forall\, n > \nu_1 \ |a_n - a| < \epsilon_1 \\ \forall\,\epsilon_2 > 0\,\exists\,\nu_2 : \forall\, n > \nu_2 \ |b_n - b| < \epsilon_2 \end{array} \tag{2.3}$$

in tutti i casi considereremo $n > \max(\nu_1, \nu_2)$, che renderà verificate entrambe le (2.3).

(i) Dobbiamo arrivare ad avere:

$$\forall\,\epsilon > 0 \ |a_n + b_n - (a+b)| < \epsilon$$

si noti che per la disuguaglianza triangolare avrò:

$$|a_n + b_n - (a+b)| < |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon$$

basta specializzare $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$ ed $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$.

(ii) Dobbiamo arrivare ad avere:

$$\forall\,\epsilon > 0 \ |a_n - b_n - (a-b)| < \epsilon$$

si noti che per la disuguaglianza triangolare avrò:

$$|a_n - b_n - (a-b)| = |a_n - a + (b - b_n)| < |a_n - a| + |b - b_n| = |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon$$

basta specializzare $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$ ed $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$.

(iii) Dobbiamo arrivare ad avere:

$$\forall\,\epsilon > 0 \ |a_n b_n - ab| < \epsilon$$

aggiungendo e sottraendo $a_n b$ alla quantità in valore assoluto ed applicando la disuguaglianza triangolare otteniamo:

$$|a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| = |b(a_n - a) + a_n(b_n - b)| < |b|\,|a_n - a| + |a_n|\,|b_n - b|$$

adesso sappiamo a_n converge e per il teorema (2.3) sappiamo che $a_n \leq M$. Dunque avremo:

$$|b|\,|a_n - a| + |a_n|\,|b_n - n| < |b|\,|a_n - a| + M\,|b_n - b| < \epsilon$$

basta specializzare $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2|b|}$ ed $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2M}$.

(iv) Dobbiamo arrivare ad avere:

$$\forall\,\epsilon > 0 \ \left|\frac{a_n}{a_b} - \frac{a}{b}\right| < \epsilon$$

sviluppando la frazione ed usando la diseguaglianza triangolare avrò:

$$\left|\frac{a_n b - a b_n}{b b_n}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b b_n}\right| < \frac{1}{|b_n|}\,|a_n - a| + \left|\frac{a}{b b_n}\right|\,|b_n - b|$$

adesso ricordando che $b \neq 0$ sappiamo che definitivamente $b_n > \frac{b}{2} > 0$ (se, ad esempio $b > 0$) e quindi $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} = N$ dunque si avrà:

$$\frac{1}{|b_n|}\,|a_n - a| + \left|\frac{a}{b b_n}\right|\,|b_n - b| = N\,|a_n - a| + N\left|\frac{a}{b}\right|\,|b_n - b| < \epsilon$$

basta specializzare $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2N}$ ed $\epsilon_2 = \frac{|b|\epsilon}{2|a|N}$.

□

Teorema 2.6 (di monotonia)**.** *Sia in $\mathbb{R}$, a_n una successione monotona crescente e limitata superiormente; allora a_n converge a* $\sup\{a_b\}$*.*

Dimostrazione. a_n è monotona crescente se e soltanto se $a_{n+1} \geq a_n$. Se è limitata superiormente, in $\mathbb{R}$, ammetterà $\sup\{a_b\} = a$. Dunque, avremo, per definizione:

$$a_n \leq a < a + \epsilon \,\forall\, \epsilon > 0 \tag{2.4}$$

d'altronde, sempre per definizione avremo che:

$$\exists \bar{n} : \, a - \epsilon < a_{\bar{n}} ; \forall\, \epsilon > 0 \tag{2.5}$$

ricordando l'ipotesi di crescenza, e confrontando la (2.4) e la (2.5) si ha:

$$\forall\, n > \bar{n} \, a - \epsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n < a + \epsilon$$

che è la definizione di limite. □

Corollario 2.7 (ampliamento del teorema di monotonia)**.** *Se una successione monotona crescente non è limitata, diverge a $+\infty$.*

Dimostrazione. Basterà cambiare l'intorno di a con l'intorno di $+\infty$ nella dimostrazione del teorema precedente. convergerà al suo inf. □

Possiamo quindi affermare che in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una successione monotona crescente converge sempre al suo sup. Ovviamente si avrà un discorso speculare per le successioni monotone decrescenti e limitate inferiormente. Si dirà pertanto che le successioni monotone sono *regolari*. Un altro importantissimo risultato è il seguente:

Teorema 2.8 (dei carabinieri)**.** *Sia $a_n \leq b_n \leq c_n$ per $n > \nu$. Allora se $a_n \to l$ e $b_n \to l$ si avrà anche $c_n \to l$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limiti si avrà:

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, \nu_1(\epsilon) : \,\forall\, n > \nu_1 \, l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, \nu_2(\epsilon) : \,\forall\, n > \nu_2 \, l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$$

dunque scegliendo $\bar{\nu} = \max\{\nu, \nu_1, \nu_2\}$ avremo che

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, \bar{\nu}(\epsilon) : \,\forall\, n > \bar{\nu} \, l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon$$

che è la definizione di limite: $b_n \to l$ □

Definizione 2.6 (sottosuccessione)**.** *Sia a_n una successione: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Scegliamo tra questi dei termini mantenendo un ordine crescente: $b_n = a_{k_n}$. Tale nuova successione estratta dalla precedente si dirà sottosuccessione di a_n. Ovviamente, dato l'ordine della scelta avremo $k_n > n$.*

Teorema 2.9. *Se $a_n \to a$ allora ogni sottosuccessione $a_{k_n} \to a$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limite si ha:

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists \nu(\epsilon) : \,\forall\, n > \nu(\epsilon) \,|a_n - a| < \epsilon$$

Sappiamo anche che $k_n > n > \nu(\epsilon)$ da cui si ha la tesi. □

Definizione 2.7 (successione per ricorrenza). *Sia a_n una successione così definita:*

$$a_n = \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

con $f(x)\, \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, si dice definita per ricorrenza. Si noti che per il principio di induzione risulterà ben definita.

Definizione 2.8 (successione di Cauchy). *Una successione si dice di Cauchy se e solo se $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu$: $\forall\, n, m > \nu\, |a_m - a_n| < \epsilon$.*

Teorema 2.10. *Se una successione converge, è di Cauchy.*

Dimostrazione. Difatti per la definizione precedente avremo:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu : \forall\, n, m > \nu\, |a_m + a - a - a_n| < \epsilon$$

si noti che abbiamo aggiunto e sottratto a all'argomento del valore assoluto. Usando la disuguaglianza triangolare avremo che:

$$|a_m - a - a_n + a| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \epsilon$$

Questo per definizione di limite di $a_{n,m}$. □

Lemma 2.11. *Una successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione. Dalla definizione di successione di Cauchy, fissiamo a_m e specializziamo $\epsilon = 1$, avremo:

$$|a_m - a_n| < 1$$

da cui

$$|a_n| \leq |a_m| + 1$$

che equivale a dire che la successione è difinitvamente limitata. Ricordando il Lemma (2.1) abbiamo la tesi. □

Lemma 2.12 (teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni). *Da una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Dal lemma (2.11) sappiamo che una successione di Cauchy è limitata; ciò equivale a dire che $a_n \subset [c, d]$, inoltre l'insieme $\{a_n\}$ è infinito[3]; dunque per il Teorema di Bolzano-Weiwestrass, esiste, al suo interno, almeno un punto di accumulazione a per $\{a_n\}$. Adesso costruiamo a_{k_n} nel seguente modo. Poichè a è punto di accumulazione per a_n, in un qualsiasi suo intorno $I(a, \epsilon) = I_n(a, \frac{1}{n})$ cadranno infiniti punti della successione a_n. Duque scegliamo a_{k_1} un punto contenuto in I_1, a_{k_2} un punto contenuto in I_2, ed in generale a_{k_n} un punto contenuto in I_n. Sappiamo adesso che $|a_{k_n} - a| < \frac{1}{n}$. Da cui segue la tesi. □

Teorema 2.13. *In $\mathbb{R}$ se una successione è di Cauchy, converge.*

Dimostrazione. Dovrò ottenere che $|a_n - a| < \epsilon$. Aggiungendo e sottraendo a_{k_n} all'argomento del valore assoluto avrò:

$$|a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - a| < |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \epsilon \tag{2.6}$$

Ciò è provato poichè sappiamo che: $|a_n - a_{k_n}| < \epsilon_1$, poichè a_n è di Cauchy ed a_{k_n} è una sua sottosuccessione; e che $|a_{k_n} - a| < \epsilon_2$, poichè per il Lemma (2.12), sappaimo che a_{k_n} converge ad a. Specializzando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$ si ottiene la (2.6). da cui la tesi. □

[3]In realtà si potrebbe presentare anche il caso in cui tale insieme non risulti infinito, ma ciò sotto le nostre ipotesi implicherebbe che una la successione sarebbe definitivamente costante, ciò banalizzerebbe il problema.

Osservazione 2.1: Di capitale importanza è specificare il campo su cui lavoriamo: $\mathbb{R}$ difatti le affermazioni precedenti sono false in $\mathbb{Q}$ per esempio. Se infatti prendiamo una successione $a_n \in \mathbb{R} : a_n \to \sqrt{2}$ essa, poiche converge è di Cauchy. Tuttavia, rimarrà di Cauchy anche in $\mathbb{Q}$ (pensato come restrizione di $\mathbb{R}$. Ma in questo campo è evidente che a_n non converge, dato che, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Uno spazio deve convergono le successioni di Cauchy si dice *completo* e *di Banach*.

Diamo ora dei criteri utili nelle applicazioni per stabilire se una successione converge o diverge ed eventualmente calcolarne il limite

Teorema 2.14 (criterio dell radice)**.** *Sia $a_n \neq 0$ una successione. Se esiste il limite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

allora si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |l|$$

Dimostrazione. Scriviamo la definizione di limite:

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \nu(\epsilon) :\; n > \nu \Rightarrow \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - |l| \right| < \epsilon$$

Sciogliendo il valore assoluto e moltiplicando tutto per $|a_n| > 0$ si ottiene:

$$(|l| - \epsilon)\,|a_n| < |a_{n+1}| < (|l| + \epsilon)\,|a_n|$$

tutto questo vale se $n > \nu$. D'altronde varrà anche:

$$|a_n| > (|l| - \epsilon)\,|a_{n-1}| > (|l| - \epsilon)^2\,|a_{n-2}|$$

Una formula speculare si avrà per minorare. Da ciò si intuisce che potremo scrivere una formula che permetta di confrontare $|a_\nu|$ con $|a_n|$:

$$(|l| - \epsilon)^{n-\nu}\,|a_\nu| < |a_n| < (|l| + \epsilon)^{n-\nu}\,|a_\nu| \tag{2.7}$$

estraiamo ora la radice n-esima da tutti i membri:

$$\sqrt[n]{|a_\nu|}(|l| - \epsilon)^{\frac{\nu}{n}}(|l| - \epsilon) < \sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{|a_\nu|}(|l| + \epsilon)^{\frac{\nu}{n}}(|l| + \epsilon)$$

Adesso ricordiamo che sia ϵ che $\nu = \nu(\epsilon)$ sono fissati quindi avremo che $\sqrt[n]{a_\nu} \to 1$ ed anche $(|l| \pm \epsilon)^{\frac{\nu}{n}} \to 1$. Quindi avremo che $\exists N; \forall\, n > N$ si abbia:

$$(|l| - \epsilon)(|l| - \epsilon)^{\frac{\nu}{n}}\, \sqrt[n]{a_\nu} > |l| - 2\epsilon$$

$$(|l| + \epsilon)(|l| + \epsilon)^{\frac{\nu}{n}}\, \sqrt[n]{a_\nu} > |l| + 2\epsilon$$

da cui si ottiene che $\forall\, n > \bar{\nu} = \max\{\nu, N\}$:

$$|l| - 2\epsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < |l| + 2\epsilon$$

che è la definizione del limite cercato. □

Teorema 2.15 (criterio del rapporto)**.** *Sia $a_n \neq 0$ una successione. Se esiste il limite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

allora:

(i) Se $|l| < 1$ allora $a_n \to 0$;

(ii) se $l > 1$ allora $a_n \to \pm\infty$;

(iii) se $l < -1$ allora a_n non ha limite.

Dimostrazione. Le ipotesi sono identiche a quelle del criterio della radice, dunque dalla (2.7), avremo quanto segue:

(i) Considerando il secondo ed il terzo membro avremo:

$$0 < |a_n| < (|l| + \epsilon)^n \frac{|a_\nu|}{|l| + \epsilon}$$

e scegliendo $\epsilon < 1 - |l|$ si avrà che $(|l| - \epsilon) \to 0$ e dunque, in questo caso, per confronto, abbiamo la tesi (poichè l'altra quantità che compare è limitata);

(ii) Considerando il primo ed il secondo membro, invece, avremo:

$$(|l| - \epsilon)^n \frac{|a_\nu|}{(|l| - \epsilon)^\nu} < a_n$$

e scegliendo $\epsilon < |l| - 1$ si avrà che la successione risulta sempre maggiore di un qualunque M. Dato che $l > 0$ i termini della successione avranno tutti lo stesso segno, quindi, abbiamo la tesi.

(iii) In questo caso, il ragionamento è come il precedente, solo che i termini della successione hanno segno alterno, per cui il limite non esisterà, e ci siamo.

□

Diamo infine uno dei teoremi di Cesàro:

Teorema 2.16 (della media aritmetica). *Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$ allora:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_n = l$$

Dimostrazione. Verifichiamo la definizione di limite che prova il teorema: $\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \nu :\; \forall\, n > \nu$:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - l \right| < \epsilon \tag{2.8}$$

Adesso, notando che $l = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} l$ si ha che la (2.8) diviene:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - l) \right| < \epsilon \tag{2.9}$$

D'altronde per ipotesi $a_n \to l$ dunque esiste $\bar{\nu} :\; \forall\, k > \bar{\nu} :\; |a_k - l| < \epsilon$. E dunque dalla (2.9) si ha:

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\bar{\nu}-1} (a_k - l) + \sum_{k=\bar{\nu}}^{n} (a_k - l) \right) \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\bar{\nu}-1} (a_k - l) + \epsilon(n - \bar{\nu} - 1) \right)$$

abbiamo dunque:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\bar{\nu}-1} a_k}{n} + \epsilon \left(1 + \frac{1 - \bar{\nu}}{n} \right) < \epsilon + \epsilon + 1 < 3\epsilon$$

questo perchè:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\bar{\nu}-1} (a_k - l)}{n} = 0 \Rightarrow \exists\, \nu_1 :\; \forall\, n > \nu_1 :\; \frac{\sum_{k=0}^{\bar{\nu}-1} (a_k - l)}{n} < \epsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \bar{\nu}}{n} = 0 \Rightarrow \exists\, \nu_2 :\; \forall\, n > \nu_2 :\; \frac{1 - \bar{\nu}}{n} < \epsilon$$

basterà quindi scegliere $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$. □

2.2 Massimo e minimo limite

Definizione 2.9 (maggiorante definitivo). *Si dice che M è maggiorante definitivo per a_n se e solo se*

$$\exists \nu : \forall n \geq \nu \, a_n \leq M$$

Si noti come essere maggiorante sia più restrittivo di essere maggiorante definitivo; basti pensare che ogni maggiorante è anche maggiorante definitivo, mentre è falso il viceversa. Specularmente, si definirà un *Minorante Definitivo.*

Definizione 2.10 (massimo limite). *Si definisce limite massimo e si scrive*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n$$

oppure

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

il minore dei maggioranti definitivi per a_n, cioè detto M l'insieme dei maggioranti definitivi per a_n avremo:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf M$$

È facile rendersi conto come da detta definizione segua la seguente

Definizione 2.11 (operativa di lim sup). *L è $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ se e soltanto se:*

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0 \, \exists \nu(\epsilon) : \forall n > \nu \, L + \epsilon > a_n \\ \forall \epsilon > 0 \, \forall N \, \exists n > N : \, a_n > L - \epsilon \end{cases}$$

La prima equazione di dice dunque che L è un maggiorante definitivo; la seconda che è il minimo dei maggioranti definitivi.

Osservazione 2.2: Ogni successione limitata ammette lim sup e lim inf. Difatti, ogni successione limitata ammette almeno un maggiorante ed almeno un minorante. Essi saranno anche maggioranti definitivi e minoranti deinitivi. Inoltre sia l'insieme dei maggioranti definitivi che quello dei minoranti definitivi risulteranno limitati, e dunque prendendo rispettivamente inf dell'uno e sup dell'altro abbiamo trovato $\overline{\lim}$ e $\underline{\lim}$. Per convenzione se una successione non è limitata superiormente si pone $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Specularmente se non è limitata inferiormente.

Teorema 2.17. *Sia a_n una successione:* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *se e soltanto se* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = l$

Dimostrazione. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, allora, in base alla definizione di limite si ha che $\forall n > \nu \; l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$; a maggior ragione varrà quindi scelto $n > N$ fissato a piacere.
Se invece sappiano che $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$, unendo le prime condizioni delle due definizioni abbiamo che $\forall n > \nu \; l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$, che è la definizione di limite. □

Lemma 2.18. *Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente al suo* lim sup.

Dimostrazione. Difatti se la successione è limitata ammetterà $L = \limsup$, cioè, scelto un ϵ a piacere si dovrà verificare

$$\begin{cases} \forall n > \nu \; a_n < L + \epsilon \\ \forall N \; \exists n > N \; a_n < L - \epsilon \end{cases}$$

se adesso specializziamo $\epsilon = \frac{1}{n}$ avremo per un generico indice k_n della sottosuccessione con $n > \nu(\epsilon)$:

$$L - \frac{1}{n} < a_{k_n} < L + \frac{1}{n}$$

Dunque per il teorema dei carabinieri la sottosuccessione convergerà ad L[4]. □

[4] Si noti come non si sarebbe potuto concludere che *ogni* sottosuccessione converge ad L perchè $a_n < L - \frac{1}{n}$, non avviene per tutti gli n, ma solo per una infinità di questi.

2.3 Successioni e Topologia

Teorema 2.19. *Un insieme A è chiuso se e soltanto se* $\forall\, x_n \in A :\ x_n \to x_0,\ x_0 \in A$

Dimostrazione. Sappiamo per il Teorema (1.9) che se A è chiuso contiene i suoi punti di accumulazione. Una qualunque successione di A che converga, quindi idientificherà un punto di accumulazione appartenente ad A.
Viceversa, se sappiamo che x_0 è punto di accumulazione possiamo costruire[5] una successione che converga ad x_0 che per ipotesi apparteneva ad A. Avvenendo questo per ogni successione, A conterrà tutti i suoi punti di accumulazione, risultando chiuso. □

Definizione 2.12 (sequenziale compattezza)**.** *Si dice che un insieme K è sequenzialmente compatto, o compatto per successioni se e soltanto se* $\forall\, x_n \in K\ \exists\, a_{k_n} :\ a_{k_n} \to x_0 \in K$

Teorema 2.20 (di Heine-Borel)**.** *In $\mathbb{R}$ ogni insieme chiuso e limitato è compatto.*

Dimostrazione. Diamo solo la dimostrazione che se un insieme è chiuso e limitato è compatto. Difatti se l'insieme K è chiuso e limitato sarà compreso in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Data quindi una qualunque successione $x_n \in K$ risulterà anch'essa limitata (da b, per esempio), e dunque da questa sarà possibile estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente ad un punto di accumulazione x_0, esistente per Bolzano-Weierstrass, (lemma (2.18), ad esempio). Essendo l'insieme K chiuso $x_0 \in K$, che è la tesi. □

3 Funzioni e Continuità

Una funzione è un'applcazione: $\mathbb{R} \supset A \mapsto \mathbb{R}$ e si indica con $f(x)$. L'insieme A in cui la funzione è definita si chiama *Dominio* e si indica con $\mathcal{D}\, f$, mentre l'insieme dei possibili valori che tale funzione può assumere è detto *Codominio* o *Insieme delle Immagini* e si indica con $\operatorname{Im} f$.

3.1 Alcune proprietà

Definizione 3.1 (iniettività)**.** *Una funzione si dice iniettiva se e soltanto se* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Definizione 3.2 (suriettività)**.** *Una funzione si dice suriettiva se e soltanto se* $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in \mathcal{D}\, f :\ f(x) = y$

Ogni funzione risulterà suriettiva dunque sulla sua immagine.

Definizione 3.3 (biiettività)**.** *Una funzione si dice biiettiva o biunivoca se e solo se è sia iniettiva che suriettiva. Cioè se vale:*

$$\forall\, y \in \operatorname{Im} f\ \exists!\, \bar{x} \in \mathcal{D}\, f :\ f(\bar{x}) = y$$

Definizione 3.4 (composizione)**.** *Siano:* $f : A \mapsto B,\ g : B \subset C \mapsto D$, *si definisce composizione delle funzioni f e g, $g(f(x))$ e si indica $g \circ f$.*

Definizione 3.5 (inversa)**.** *Si definisce inveresa, se esiste, quella funzione $f^{-1}(x)$ tale che $f^{-1} \circ f = I_x$ e $f \circ f^{-1} = I_y$, dove I_x ed I_y è rispettivamente l'identità su $\mathcal{D}\, f$ e su $\operatorname{Im} f$.*

Definizione 3.6 (punto di massimo)**.** *Si dice che x_0 è un punto di massimo relativo per f se $\exists\, I(x_0, \delta)$ tale che $\forall\, x \in I$ si abbia $f(x_0) \leq f(x)$. Si dice poi assoluto se $f(x_0) \geq f(x)\, \forall\, x \in \mathcal{D}\, f$.*

[5] cfr. la dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass.

3.2 Limiti di funzioni

Definizione 3.7. *Sia $f : A \mapsto B$, con x_0 punto di accumulazione di A. Allora definiamo:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se e soltanto se

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists \delta :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Diamo adesso l'importantissimo

Teorema 3.1 (di collegamento)**.** *Abbiamo* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, x_n \in A :\ x_n \to x_0$ *si ha* $\lim_{n \to x_0} f(x_n) = l$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e che la successione ammette come limite x_0 cioè $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \nu(\epsilon) :\ \forall\, n > \nu\ \ |x - x_0| < \epsilon$. D'altronde se specializziamo nella successione $\epsilon = \delta$, abbiamo che $\forall\, n > \nu\ |x_n - x_0| < \epsilon$. Siccome $x_n \in A$, abbiamo provato la tesi.
Viceversa, ragioniamo per assurdo. Se la tesi non fosse vera avremmo:

$$\exists\, \bar{\epsilon} :\ \forall \delta\, \exists \bar{x} :\ |\bar{x} - x_0| < \delta \text{ pur essendo } |f(x) - l| \geq \epsilon$$

Ma se specializziamo $\delta = \frac{1}{n}$ abbimo

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}; \text{pur essendo } |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

ma questo nega la nostra ipotesi. Il che è assurdo. □

Questo teorema è molto potente ed utilizzandolo potremo ricavare tutta l'algebra dei limiti per le funzioni partendo da quella delle successioni:

Teorema 3.2 (algebra dei limiti di funzioni)**.** *Siano* $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$*, allora si ha, ad esempio,* $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = a + b$

Dimostrazione. Dimostriamo solo il caso della somma. Gli alri si ottengono con lo stesso procedimento. Sia la successione $x_n \to x_0$. Per il teorema del collegamento sappiamo che: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$ e $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = b$, quindi per l'algebra dei limiti di successioni avremo che $\lim_{n \to \infty} f(x_n) + g(x_n) = a + b$ per ogni $x_n \to x_0$ quindi si ha la tesi. □

Dimostriamo di seguito tre teoremi indipendentemente dal teorema di collegamento (che rappresenta un'altra strada per la loro dimostrazione):

Teorema 3.3 (unicità del limite di funzioni)**.** *Se* $\lim_{n \to x_0} f(x) = a$ *e*$\lim_{n \to x_0} f(x) = b$*, allora* $a = b$

Dimostrazione. Scriviamo le definizioni di limite: $\forall\, \epsilon > 0$

$$\exists\, \delta_1\, 0 < |x - x_0| < \delta_1\ \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$$

$$\exists\, \delta_1\, 0 < |x - x_0| < \delta_2\ \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

specializziamo $\epsilon = \frac{b-a}{3}$ e scegliamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dunque avremo che valendo ambedue le definizioni e quindi i due introni $I_1(a, \epsilon)$ e $I_2(b, \epsilon)$ risulteranno disgiunti se $a \neq b$, quindi in tali condizioni cadiamo in assurdo, dovendo i valori di f cadere contemporaneamente in I_1 ed in I_2. □

Teorema 3.4 (della permanenza del segno di funzioni)**.** *Se risulta* $\lim_{n \to x_0} f(x) = a > 0$ *allora esiste* $I(x_0, \delta) :\ f(x) > 0\, \forall\, x \in I$

Dimostrazione. Se infatti dalla definizione di limite, specializziamo $\epsilon = \frac{a}{2}$, abbiamo che $0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ \frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}$. □

Teorema 3.5 (dei carabinieri per funzioni). *Siano $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, tre funzioni per cui valga, (eventualemente in un intorno $I(x_0, \delta)$ di x_0 punto di accumulazione) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$, allora si ha anche che $\lim_{n\to x_0} g(x) = l$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limite si ha $\forall\, \epsilon > 0$

$$\exists\, \delta_1\, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \;\Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

$$\exists\, \delta_1\, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \;\Rightarrow l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$$

dunque scegliendo $\bar{\delta} = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, si avrà:

$$0 < |x - x_0| < \bar{\delta} \;\Rightarrow l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon$$

che è la definizione di $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$. □

Adesso vedremo come si comportano i limiti di funzioni in presenza di *restrizioni*, delle conduzioni che limitano il dominio della funzione.

Definizione 3.8 (restrizione). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $B \subset A$. Indicheremo con $f_B(x)$ il valore che la funzione assume per $x \in B$.*

Definizione 3.9 (limite di funzione ristretta). *Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$ con $B \subset A$ e con x_0 punto di accumulazione per B. Allora diremo che $\lim_{x\to x_0} f_B(x) = l$ se e solo se:*

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta :\; 0 < |x - x_0| < \delta \,\wedge\, x \in B \;\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Teorema 3.6. *Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$ con $B \subset A$ e con x_0 punto di accumulazione per B. Sia inoltre $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora $\forall\, B \subset A$ su ha $\lim_{x\to x_0} f_B(x) = l$.*

Dimostrazione. Dal teorema di collegamento abbiamo che $\forall\, x_n \to x_0 \in A$ $\lim_{n\to x_0} f(x_n) = l$. Prendiamo una sottosuccessione $x_{k_n} \in B$. Sappiamo che essa converge pure ad x_0 dunque, sempre per il teorema di collegamento avremo $\lim_{x\to x_0} f_B(x) = l$. □

Teorema 3.7. *Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$ con $B \subset A$ e $C \subset A$ e $A = B \cup C$ con x_0 punto di accumulazione per A. Se $\lim_{x\to x_0} f_B(x) = l = \lim_{x\to x_0} f_C(x)$, allora anche $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limite ristretto a B si ha che x debba appartenere a B perchè si verifichi la condizione di limite. D'altronde accadrà lo stesso anche per C. Ma essendo $A = B \cup C$, allora comunque x apparterrà ad un intorno di x_0. Da ciò segue la definizione generale di limite. □

Definizione 3.10 (limite sinistro). *Si definisce $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ il limite $\lim_{x\to x_0} f_{x<x_0}(x) = l$.*

Specularmente si definisce il limite destro.

Teorema 3.8. *Sia $f : (a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una funzione* monotona crescente. *Sia x_0 un suo punto di accumulazione con $a < x_0 \leq b$. Avremo allora $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{a<x<x_0}(f(x))$.*

Dimostrazione. Sia $L = \sup_{a<x<x_0}(f(x))$. Poniamoci nel caso che $L < +\infty$. Allora per definizione di sup abbiamo: $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{x} :\; L - \epsilon < f(\bar{x}) < L + \epsilon$. Essendo f crescente avremo $\forall\, x : a < \bar{x} < x < x_0$ $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$, che, a ben guardare, è proprio la definizione di limite sinistro richiesta. □

3.3 Continuità

Una proprietà importantissima che caratterizza alcune funzioni è la continuità.

Definizione 3.11 (funzione continua)**.** *Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione per A. Diciamo che f è continua in x_0 se e soltanto se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

o equivalentemente

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta(\epsilon, x_0) : \; |x - x_0| < \delta \; \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|^{6}$$

Possiamo tuttavia estendere la definizione di continuità a punti isolati di una funzione. In questi la proprietà è banalmente verificata. Si noti, inoltre come questa definizione valga localmente. Diamo qui un'estenzione globale:

Definizione 3.12 (continuità globale)**.** *Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Si dice che f è continua nell'intervallo A se e solo se*

$$\forall \epsilon > 0 \, \forall \bar{x} \in A \, \exists \, \delta(\epsilon, \bar{x}) : \; |x - x_0| < \delta \; \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|$$

Osservazione 3.1: Per avere un esempio di funzione continua basta prendere $f(x) = x$: dalla definizione, infatti segue banalmente la sua continuità. Più in generale, sono continui i polinomi, le funzioni trigonometriche, l'esponenziale, il logaritmo. Non ci cureremo qui di dimostrare la loro continuità. Ci sembra utile, invece, introdurre delle funzioni che non godono di tale proprietà. Prendiamo in esame la funzione *parte intera*, $y = [x]$, verifichiamo facilmente che essa è discontinua sui numeri interi. Facciamo un esempio $[1] = 1$, ma $\lim_{x \to 1^-} [x] = 0$. Un'altra importante dunzione, discontinua è la *funzione indicatrice* $\chi_{[A]}(x)$. Essa vale 1 quando la variabile appartiene all'insieme A, e 0 nel caso contrario. Una importante applcazione di tale funzione è la cosidetta *funzione di Dirichlet*, ovvero la $\chi_{[\mathbb{Q}]}(x)$. Si esplicita nel seguente modo:

$$f(x) = \chi_{[\mathbb{Q}]}(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si noti che questa funzione, risulta discontinua in ogni punto: per vederlo scegliamo $x_0 \in \mathbb{Q}$, allora sappiamo che $\chi_{[\mathbb{Q}]}(x_0) = 1$; ma se a questo punto $\epsilon = \frac{1}{2}$, e prendo $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ vicino quanto voglio a x_0, ho subito l'assurdo; infatti $|0 - 1| < \frac{1}{2}$. Se si vuole, potremo estrarre due sottosuccessioni una $x_n \in \mathbb{Q}$, l'altra $y_n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, notiamo che $\chi_{[\mathbb{Q}]}(x_n) \equiv 1$ mentre $\chi_{[\mathbb{Q}]}(y_n) \equiv 0$. Ciò conferma quanto detto. Moltiplicando adesso la sudetta funzione per $x - x_0$, otteniamo $(x - x_0)\chi_{[\mathbb{Q}]}(x)$, che è continua solo in x_0.

Adesso viene spontaneo chiederci se esista un'algebra delle funzioni continue. La risposta è ovviamente affermativa. Dall'algebra dei limiti, facilmente ricaviamo che la combinazione lineare, il prodotto e la divisione di funzioni continue è continua. Di capitale importanza è il seguente:

Teorema 3.9. *Siano $f : A \mapsto B$ e $g : B \supseteq C \mapsto \mathbb{R}$. Se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$ allora $(f \circ g)(x)$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Ricordando la definizione di continuità per entrambe le funzioni avremo:

$$\forall \epsilon_1 > 0 \; \exists \delta_1 \; |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon_1$$

$$\forall \epsilon_2 > 0 \; \exists \delta_2 \; |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon_2$$

Se adesso scelgo $\epsilon_1 = \delta_2$ allora avrò che:

$$\forall \epsilon_2 > 0 \; \exists \delta_2 \; |f(x) - f(x_0)| < \delta_2 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon_2$$

da cui segue la continuità in x_0 di $(f \circ g)(x)$. □

Adesso osserviamo come a continuità possa interagire con la permanenza del segno:

[6] Si noti come potrebbe verificarsi $x = x_0$, cosa che non poteva accadere nella definizione del limite.

Teorema 3.10 (permanenza del segno delle funzioni continue). *Sia $f \in C^0[a,b]$, se per $x_0 \in [a,b]$ si ha $f(x_0) > 0$, allora $\forall\, \delta > 0\, \exists\, I(x_0, \delta)$ tale che $\forall\, x \in I\; f(x) > 0$*

Dimostrazione. Se la funzione risulta continua in $[a,b]$, sarà continua anche in $x_0 \in [a,b]$, dunque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$. Dal teorema di permanenza del segno per funzione si ha la tesi. □

Daremo qui delle importanti proprietà delle funzioni continue:

Teorema 3.11 (degli zeri di una funzione continua). *Sia $f \in C^0[a,b]$ e si abbia $f(a)f(b) < 0$, allora $\exists\, \xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo, senza perdere di generalità che $f(a) > 0$ ed $f(b) < 0$. Allora prendiamo in considerazione l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b : f(x) > 0\}$. Tale insieme, essendo limitato da b risulterà dotato di $\sup A = L$. Se, per assurdo, $f(L) > 0$ allora, per il teorema di permanenza del segno delle funzioni continue, ci sarebbe tutto un intorno in cui la funzione risulterebbe essere positiva: $I(L, \delta)$. Dunque L non sarebbe più $\sup A$ in quanto in I esistono valori maggiori di L appartenenti all'insieme. Analogamente, se $f(L) < 0$, sempre per il teorema di permanenza del segno delle funzioni continue avrei $I(x_0, \delta)$ in cui la funzione risulterebbe tutta negativa. Se questo accadesse, in tale intorno esisterebbero dei minoranti per l'insieme, ne consegue che L non sarebbe più il minimo dei maggioranti. Non rimane che $f(L) = 0$; da ciò possiamo porre $\xi = L$. □

Teorema 3.12 (dei valori intermedi). *Sia $f \in C^0[a,b]$ allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.*

Dimostrazione. Scegliamo un $y \in [f(a), f(b)]$ arbitrario e facciamo vedere che $\exists\, \bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) = y$. Prendiamo infatti la funzione $g(x) = f(x) - y$, essa è continua trattandosi di differenza di funzioni continue. Adesso notiamo che $g(a) = f(a) - y < 0$ e $g(b) = f(b) - y > 0$; dunque per il teorema degli zeri di una funzione continua avrò che $\exists\, \bar{x} \in [a,b] : g(\bar{(x)}) = f(\bar{(x)}) - y = 0$. □

Teorema 3.13 (dei punti fissi). *Sia $f \in C^0[a,b] : f[a,b] \mapsto [a,b]$ allora $\exists \xi$ tale che $f(\xi) = \xi$.*

Dimostrazione. Se si dovesse avere $f(a) = a$ o $f(b) = b$ allora il teorema sarebbe dimostrato. Se questo non accade avrò che $f(a) > a$ e che $f(b) < b$. Dunque difiniamo la funzione $g(x) = f(x) - x$. Per questa avrò $g(a) = f(a) - a > 0$ e $g(b) = f(b) - b < 0$. Dunque per il teorema degli zeri di una funzione continua avrò che $\exists\, \xi : g(\xi) = f(\xi) - \xi = 0$ □

Teorema 3.14 (di Weierstrass). *Sia $f \in C^0[a,b]$, allora f ammette in $\max f$ e $\min f$ in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Sia $A = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$. Sappiamo che esisteranno $\sup A = \alpha$ ed $\inf A = \beta$, (eventualmente $\pm\infty$). Vogliamo mostrare che $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) = \alpha$ ed $f(x_2) = \beta$, che saranno rispettivamente massimo e minimo. Dimostriamo, per esempio che l'esistenza di x_1 (quella di x_2, si fa in maniera del tutto speculare). Costruiamo una successione $y_n \to \alpha$. Distinguiamo adesso due casi:
Caso 1: α finito. Allora per definizione di sup avrò: $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \bar{y} \in A : \quad \alpha - \epsilon < \bar{y} < \alpha + \epsilon$ Dunque specializzando $\epsilon = \frac{1}{n}$ avrò:

$$\alpha - \frac{1}{n} < y_n < \alpha + \frac{1}{n}$$

Per il teorema dei carabineri, dunque ho trovato y_n che converge ad α.
Caso 2: α infinito. Allora $\forall\, n > 0\, \exists\, \bar{y} \in A : \bar{y} > n$ duneque $y_n \to +\infty = \alpha$. In ogni caso, adesso, in corrispondenza di $y_n \in A$ costruisco $x_n : f(x_n) = y_n$, dove ovviamente $x_n \in [a,b]$. Essendo $[a,b]$ chiuso e limitato posso estrarre da x_n una sottosuccessione $x_{k_n} \to x_1 \in A$ (che essendo chiuso contiene i suoi punti di accumulazione)[7]. Adesso per il teorema di collegamento avrò:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = \lim_{x \to x_1} f(x)$$

[7] lo stesso dicasi se l'insieme su cui la funzione risulta continua è compatto anzichè essere un intervallo.

Adoperando l'ipotesi di continuità avrò che

$$\alpha = \lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

Dunque abbiamo trovato un valore x_1 in cui la funzione assume minimo. A questo punto escludiamo il Caso 2, poichè in x_1 la funzione risulta definita e quindi non può assumere valore infinito. $\square$

Corollario 3.15 (di Weierstrass esteso)**.** *Sia $f \in C^0(a,b)$ con $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ e tale che $\lim_{x\to a^+} = l = \lim_{x \to b^-} f$ allora f ha $\max$ e/o $\min$ in (a,b).*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione nel caso $a = -\infty$, $b = +\infty$, $l \in \mathbb{R}$. Prendiamo in considerazione il caso non banale, ovvero quando f non risulta costante. In questo caso $\exists\, x_0 \in (a,b) : f(x_0) \neq l$. Supponiamo, senza perdere di generalità che $f(x_0) > l$. Servendosi della definizione di limite scriviamo:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists M_1 > 0 : \; x > M_1 \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists M_2 > 0 : \; x < -M_2 \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

Dunque se scelgo $M = \max\{M_1, M_2\}$ avrò che $\forall\, |x| > M \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$. Adesso scelgo $\epsilon \in \left(0, \frac{f(x_0)-l}{2}\right)$ ed avrò $f(x) < l + \frac{f(x_0)-l}{2} < f(x_0)$. Come abbiamo visto in corrispondenza di questo ϵ troverò un intervallo $[-M, M]$ in cui la funzione risulterà continua e minore di $f(x_0)$. Per il teorema di Weierstrass, questa funzione in questo intervallo chiuso ammetterà massimo e minimo. Questi però si potrebbero trovare entrambi agli estremi (dipendenti dalla scelta di ϵ). Dimostriamo adesso che non può accadere, nel nostro caso che il massimo si presenti in uno dei due estremi dell'intervallo preso in considerazione. Ciò è evidentemente impossibile, infatti avevamo supposto che $f(x_0) > l$. Per il teorema della permanenza del segno, d'altronde risulterà $f(\pm M) < f(x_0)$. Quindi in $\pm M$ f non potrà assumere massimo. $\square$

Teorema 3.16. *Sia $f \in C^0(I)$ con I un intervallo. Allora f è invertibile se e solo se è strettamente monotona.*

Dimostrazione. Una funzione è invertibile se e solo se è iniettiva. Se è strettamente monotona, l'ipotesi di continuità è superflua nel dimostrare l'iniettività. Difatti, supponiamo che f sia strettamente crescente. Questo significa $\forall\, x_1 < x_2\; f(x_1) < f(x_2)$ e dunque anche $\forall\, x_1 \neq x_2\; f(x_1) \neq f(x_2)$. Viceversa, invece, ragioniamo per assurdo: Sappiamo che la funzione è continua ed invertibile. Supponiamo non sia strettamente monotona. Allora, per esempio esisteranno $x_0 < y_0$ tali che $f(x_0) < f(y_0)$ ed anche $x_1 < y_1$ tali che $f(x_1) > f(y_1)$. Possiamo ora supporre, senza perdere di generalità $x_0 < x_1$ ed $y_0 < y_1$. Parametrizziamo gli intervalli $[x_0, x_1]$ ed $[y_0, y_1]$ come segue: $x(t) = tx_1 + (1-y)x_0$ e $y(t) = ty_1 + (1-y)y_0$ con $t \in [0,1]$. Notiamo che $x_0 < x(t) < x_1$ ed $y_0 < y(t) < y_1$ e poichè $x(t), y(t) \in C^0[0,1]$ ogni punto interno agli intervalli è mappato da un certo t per il teorema dei valori intermedi. Adesso definiamo $g(t) = f(x(t)) - f(y(t))$ anche questa funzione risulterà continua in $[0,1]$. Adesso vediamo che $g(0) = f(x(0)) - f(y(0)) = f(x_0) - f(y_0) < 0$ mentre $g(1) = f(x(1)) - f(y(1)) = f(x_1) - f(y_1) > 0$, quindi per il teorema degli zeri per funzioni continue $\exists\, \xi \in (0,1) : \; g(\xi) = f(x(\xi)) - f(y(\xi)) = 0$ dunque avrò che $f(x(\xi)) = f(y(\xi))$, ma essendo f invertibile, applico l'inversa ad entrambi i membri dunque avrò $x(\xi) = y(\xi)$. Ma questo è impossibile per come abbiamo costruito $x(t)$ ed $y(t)$; difatti dovrebbe essere $\xi x_1 + (1-\xi)x_0 = \xi y_1 + (1-\xi)y_0$ cioè $(1-\xi)(x_0 - y_0) = \xi(x_1 - y_1)$. Ciò è evidentemente assurdo poichè $(1-\xi)(x_0 - y_0) < 0$ e $\xi(x_1 - y_1) > 0$. $\square$

Lemma 3.17. *Sia $f \in C^0(I)$ con I un intervallo. Allora f assume tutti i valori tra $\sup f$ ed $\inf f$.*

Dimostrazione. Sia $A = \{y \in \mathbb{R} : \; y = f(x)\}$. Sia, ad esempio $\alpha = \sup A$. Dunque $\forall\, y \in A\, \exists\, \bar{y} : \; y < \bar{y} < \alpha$ perchè se così non fosse α non sarebbe più il sup. Questo discorso lo si può ripetere per l'inf. Detto ciò, scelto $y \in [\sup f, \inf f]$ esisteranno $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ col la proprietà $f(x_1) < y < f(x_2)$. Dunque per il teorema dei valori intermedi applicato nell'intervallo $[\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}]$ la funzione assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ e quindi anche y. $\square$

Teorema 3.18. *Sia I un intervallo e sia f monotona su I. Allora $f \in C^0(I)$ se e solo se $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Se la funzione risulta continua $f(I)$ risulterà un intervallo, perchè, per il lemma precedente, la funzione assumerà tutti i valori tra l'inf ed il sup. Viceversa, invece, ragioniamo per assurdo: se la funzione non fosse continua, si avrebbe, per un certo x_0 che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \lneq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, cioè in x_0 il limite destro e quello sinistro non coinciderebbero. Ora, essendo la funzione monotona (ad esempio crescente) ho che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{I \ni x < x_0} = a$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{I \ni x > x_0} = b$. Ora basterà prendere y con la proprietà $b < y < a$ ed osservare che $y \notin \operatorname{Im} f$. Difatti se $x < x_0$ allora $f(x) \leq a < y$ e se $x > x_0$ allora $f(x) \geq b > y$ □

Teorema 3.19. *Sia I un intervallo e sia $f \in C^0(I)$. Allora f è invertibile se e solo se è strettamente monotona. Inoltre se è invertibile, l'inversa f^{-1} è continua.*

Dimostrazione. Per il teorema (3.16) f è invertibile se e solo se è strettamente monotona. Per il teorema (3.18), $f(I)$ è un intervallo. La funzione inversa f^{-1} avrà la stessa monotonia di f sull'intervallo $f(I)$. D'altronde $f^{-1}(f(I)) = I$ e quindi, sempre per il teorema (3.16) pertanto sarà continua. □

3.4 Uniforme Continuità

Definizione 3.13 (uniforme continuità)**.** *Una funzione f è uniformemente continua se e solo se:*

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta(\epsilon) :\; \forall\, x_1, x_2 :\; |x_1 - x_2| < \epsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \delta$$

Di capitale importanza è cogliere la differenza tra continuità ed unfiforme continuità. Per farlo, basta confrontare sinotticamente le definizioni. Così facendo ci accorgiamo che la differenza consiste nel fatto che se una funzione è uniformemente continua il δ che riusciamo a trovare dipenderà solo da ϵ e non dai punti coinvolti, come accadeva per la continuità. Esamineremo, in seguito, meglio tale differenza (ed anche tale somiglianza). Un primo risultato è il seguente

Teorema 3.20. *Una funzione uniformemente continua è continua.*

Dimostrazione. Dalla definizione di uniforme continuità scegliamo x_1 come punto in cui vogliamo verificare la continuità e consideriamo $x_2 = x$ variabile; avremo:

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta(\epsilon) :\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \epsilon$$

che è la definizione di continuità. □

Arriviamo ora ad un risultato importantissimo:

Teorema 3.21 (di Cantor)**.** *Una funzione f continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ è ivi uniformemente continua.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo: supponiamo che tale funzione risulti continua ma non uniformemente continua; avremo:

$$\exists\, \bar{\epsilon} > 0 : \forall\, \delta\, \exists x, y :\; |x - y| < \epsilon \,\text{pur essendo}\; |f(x) - f(y)| \geq \delta$$

Intanto specializziamo $\delta = \frac{1}{n}$, dunque avremo: $\exists\, \bar{\epsilon} > 0 : \forall\, \delta\, \exists x_n, y_n :\; |x_n - y_n| < \epsilon$ pur essendo $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$; abbiamo quindi trovato due successioni x_n ed y_n appartenenti ad $[a, b]$. Possiamo quindi estrarre da loro due sottosuccessioni con lo stesso indice k, cioè x_{k_n} ed y_{k_n} convergenti rispettivamente ad x_0 ed y_0. Avrò dunque:

$$|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} < \frac{1}{n}$$

e quindi per il teorema dei carabinieri $x_0 = y_0$[8].
A questo punto notiamo che per il teorema di collegamento avrò:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} y_{k_n}$$

Poi, sfruttando l'ipotesi di continuità:

$$\lim_{n \to \infty} y_{k_n} = f(x_0)$$

Abbiamo, a questo punto trovato l'assurdo dato che $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \to 0$ mentre avevamo supposto $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. □

Adesso passiamo ad esaminare delle proprietà di unzioni uniformemente continue.

Teorema 3.22. *Una funzione uniformemente continua in un insieme A limitato è limitata.*

Dimostrazione. Per l'ipotesi di uniforme continuità, specializzando, per esempio, $\epsilon = 1$ ho:

$$\exists\, \delta :\ \forall\, x, y \in A :\ |x, y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$$

Dato che A è limitato posso coprirlo con un numero finito di intervalli I_i di raggio δ. Per ognuno di questi intervalli scelgo un punto. Ho quindi un numero finito di punti x_i ed un numero finito di valori $y_i = f(x_i)$. Sia $\bar{y} = \max |y_i|$.

$$\forall\, x \in I_1\ |f(x) - f(x_i)| < 1$$

Dunque sciogliendo il valore assoluto abbiamo che $|f(x)| < \bar{y} + 1$, che è la tesi. □

Teorema 3.23. *Sia f uniformemente continua sua A. Sia $x_n \in A$ una successione di Cauchy. Allora $f(x_n)$ è una successione di Cauchy*

Dimostrazione. Per definizione di successione di Cauchy abbiamo:

$$\forall\, \eta > 0\ \exists\, N :\ \forall\, n, m > N\ |x_n - x_m| < \eta$$

D'altronde se ho che f è uniformemente continua avrò che

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta(\epsilon) :\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Adesso basta prendere $\delta = \eta$ per avere:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$$

che è la definizione di successione di Cauchy per $f(x_n)$. □

Da ciò scaturisce il fatto che funzioni come $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ oppure $f(x) = x^2$ su tutto $\mathbb{R}$ non sono uniformemente continue. Esaminiamo questi esempi.
Per $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ basta predere come successioni di Cauchy $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ e $y_n = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$. Esse (che convergendo sono di Cauchy) non vengono trasformate affatto in successioni di Cauchy, infatti $\operatorname{sen} x_n \equiv 1$ e $\operatorname{sen} y_n \equiv -1$. Per $f(x) = x^2$ prendiamo invece $x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{n}$ e notiamo che accade come sopra.

Teorema 3.24. *Una funzione uniformemente continua su (a, b) può essere estesa con continuità sulla chiusura $[a, b]$.*

[8] Quensto non sarebbe accaduto se avessi scelto due indici diversi per le sottosuccessioni.

Dimostrazione. Per dimostrare ciò dobbiamo provare l'esistenza di $F(x)$ tale che $F(x) = f(x)$ per $a < x < b$, ed inoltre $F(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ e $F(b) = \lim_{x\to b^-} f(x)$. Dobbiamo, quindi assicurarci dell'esistenza dei due limiti. Prendiamo $x_n \to a$; tale successione, per il teorema (2.10) sarà di Cauchy, e poichè f è uniformemente continua $f(x_n)$ è una successione di Cauchy che per il teorema (2.13) convergerà ad l. Adesso prendiamo un'altra successione $y_n \to a$, si avrà sempre che $f(y_a) \to L$ che a priori non sappiamo essere uguale ad l. Ma essendo f uniformemente continua avrò che

$$|x_n - y_n| \to 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \to 0$$

e dunque $L = l$. Questo accadrà per ogni successione di (a, b) che converga ad a. Per il teorema di collegamente avrò quindi:

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = F(a)$$

Lo stesso ragionamento lo si può ripetere per b. □

4 Derivate

4.1 Definizione e prime proprietà

Affronteremo qui uno dei concetti più importanti dell'analisi matematica, la *derivata*. Essa può essere interpretata geometricamente come coefficiente angolare della retta tangente ad un grafico di funzione. Ne daremo ora una rigorosa.

Definizione 4.1 (derivata). *Sia $f \in [a, b]$ e sia $x_0 \in [a, b]$. Si dice che f è derivabile nel punto x_0 se esiste, finito, il limite:*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

In questo caso $f'(x_0)$ si dice derivata *di f nel punto x_0. La quantità nel limite prende il nome di* rapporto incrementale.

Naturalmente se la funzione risulta derivabile in tutto un intervallo ha senso parlare di funzione derivata che indicheremo $f'(x)$. Iniziamo qui una lunga sequela di teoremi legati a tale concetto.

Lemma 4.1. *Sia f una funzione derivabile in x_0. Allora tale funzione è ivi continua.*

Dimostrazione. Vogliamo arrivare a dimostrare che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \tag{4.1}$$

Moltiplicando e dividendo tale quantità per $(x - x_0)$ e poi passando al limite avrò:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} x - x_0 = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Da ciò segue la tesi la (4.1). □

Naturalmente non è vero il viceversa. Per avere un controesempio basta prendere la funzione $f(x) = |x|$. È bene osservare come l'esistenza della derivata implichi l'esistenza (e l'unicità) di un operatore lineare M tale che:

$$f(x) = f(x_0) + M(x - x_0) + R(x, x_0)$$

dove

$$\lim_{x\to x_0} R(x, x_0) = 0$$

Tale M risulta proprio essere $f'(x)$. Se esiste tale operatore lineare la funzione si dice *differenziabile*. Abbiamo qui verificato che la differenziabilità e la derivabilità coincidono in $\mathbb{R}$.

Lemma 4.2. *Se f è una funzione costante, la sua $f'(x) = 0$.*

Dimostrazione. Basta applicare la definizione di derivata e tenere conto che $f(x+h) - f(x) \equiv 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

□

Teorema 4.3 (algebra delle derivate)**.** *Siano f e g due funzioni derivabili in x_0, dette $f'(x_0)$ ed $g'(x_0)$ le loro derivate calcolate in x_0, valgono le seguenti proprietà:*

(i) $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 ed ivi la sua derivata vale $\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.

(ii) $f \cdot g$ è derovabile in x_0 ed ivi la sua derivata vale $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(iii) $\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0, sotto l'ipotesi che $f(x_0) \neq 0$, ed ivi la sua derivata vale $\frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Dimostrazione. (i) Tutto sta nel calcolare il seguente limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha f(x_0+h) + \beta g(x_0+h) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{h}$$

utilizzando le proprietà di linearità del limite avremo:

$$\alpha \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(_0)}{h} + \beta \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(ii) Adesso dobbiamo calcolare il limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

aggiungendo e sottraendo al numeratore $f(x+h)g(x)$ si avrà:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x+h_0) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

adesso sfruttando la continuità di f ho:

$$f(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ed abbiamo finito.

(iii) Dobbiamo calcolare il limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0}}{h}$$

operando sulla frazione abbiamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{hf(x_0+h)f(x_0)}$$

sfruttando la continuità di f otteniamo:

$$\frac{1}{f^2(x_0)} \lim_{h \to 0} -\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Naturalmente quando tutto questo ha senso, cioè quando $f(x_0) \neq 0$.

□

Osservazione 4.1: Combinando la (ii) e la (iii) è possibile trovare la derivata del quoziente di due funzioni:

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

Adesso analizziamo come si deriva una funzione composta, diamo il seguente

Teorema 4.4 (derivazione di una funzione composta)**.** *Siano g e f due funzioni derivabili rispettivamente in x_0 ed in $g(x_0)$ allora la derivata di $f \circ g$ in x_0 vale $g'(x_0)f'(g(x_0))$.*

Dimostrazione. Iniziamo col considerare il limite che dovremo calcolare:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$$

Moltiplichiamo e dividiamo tale limite per $g(x) - g(x_0)$ avremo allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

A questo punto dobbiamo ricorrere ad un piccolo artificio: difatti la quantità $g(x) - g(x_0)$ si potrebbe annullare anche quando $x \neq x_0$, rendendo così assurda tale scrittura. Definiamo quindi la funzione $h(y)$:

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & y \neq y_0 \\ f'(y_0) & y = y_0 \end{cases}$$

Questa funzione risulterà continua (per la definione di derivata) ne punto y_0. Dunque il nostro limite può essere riscitto come:

$$\lim_{x \to x_0} h(g(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x)$$

□

Infine vediamo come si comportano le derivate delle funzioni inverse:

Teorema 4.5 (derivazione delle funzione inversa)**.** *Sia f una funzione derivabile in x_0 con inversa g. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Dimostrazione. Detta $y = g(x)$, l'idea è quella di calcolare il limite:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

che si traduce, ricordando che g è l'inversa di f nel calcolo di:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Si noti che essendo invertibile f si avrà che: $\forall\, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq f(x_0)$. Non sappiamo però che $y \to y_0 \Rightarrow x \to x_0$[9]. Dunque definiamo la funzione $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} & x \neq x_0 \\ \frac{1}{f'(x)} & x = x_0 \end{cases}$$

La funzione h risulterà dunque continua in x_0 (l'abbiamo ivi ridefinita con il suo limite). Sappiamo inoltre che g è continua in $f(x_0)$; dunque il nostro limite è:

$$\lim_{y \to y_0} h(g(y)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

[9] In realtà questo deriva dalla continuità di g.

4.2 Funzioni derivabili su un intervallo

Passiamo adesso ad analizzare i rapporti tra derivata di una funzione e proprietà di crescenza, decrescenza, stazionarietà della stessa.

Teorema 4.6 (di Fermat)**.** *Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$, sia x_0 punto di massimo (minimo) relativo. Se f è derivabile in x_0 allora risulta $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Poniamo per esempio che x_0 sia punto di massimo relativo; allora risulterà $f(x) \leq f(x_0)$ per $x \in I(x_0, \delta)$. Quindi si avrà che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad x > x_0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad x < x_0$$

Passiamo ora al limite $x \to x_0$. Prima di tutto osserviamo che questo limite esiste, essendo la funzione derivabie per ipotesi in x_0. Per il teorema della permanenza del segno avremo:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \geq 0$$

Ricordando dunque che tale limite esiste non si potrà avere che $\alpha = \beta = 0$. □

Osservazione 4.2: Questo teorema ci sarà molto utile nello studio di una funzione, in quanto ci fa capire dove andare a cercare i massimi ed i minimi: nei punti dove la derivata prima si annulla, se la funzione è derivabile; quindi nei punti di non derivabilità e negli estremi del dominio.

Seguono adesso tre teoremi equivalenti: Rolle, Lagrange, Cauchy.

Teorema 4.7 (di Rolle)**.** *Sia $f \in C^0[a, b]$ e derivabile in (a, b). Sia inoltre $f(a) = f(b)$. Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Innanzi tutto per il teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo. A questo punto distinguiamo due casi.
<u>Caso 1</u>: Se $\max f = a = b = \min f$ allora la funzione è costante e quindi per il lemma (4.2), $f'(x) = 0\, \forall\, x \in (a, b)$.
<u>Caso 2</u>: Se almeno un tra massimo e minimo x_0 della funzione cadono all'interno dell'intervallo (a, b), per il teorema di Fermat si ha che $f'(x_0) = 0$ ed in questo caso $\xi = x_0$. □

Osservazione 4.3: È importante notare come tutte le ipotesi siano essenziali: è ovvio che la funzione debba essere derivabile; poi la funzione deve essere tale che $f(a) = f(b)$, altrimenti basterebbe prendere $f(x) = x$ in $[0, 1]$ per vedere come il teorema fallisca. Meno evidente è notare come sia importante la continuità sull'intervallo chiuso $[a, b]$: difatti se la funzione risultasse continua solo in (a, b) il teorema fallirebbe nuovamente. Prendiamo per esempio la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Questa funzione è continua e derivabile in (a, b), tale che $f(0) = f(1)$ ma il teorema non viene verificato. Vediamo adesso il modo corretto di estendere il teorema di Rolle:

Corollario 4.8 (teorema di Rolle esteso)**.** *Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ ed ivi deribabile. Siano $x_1, x_2 \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_2} f(x)$ allora esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Vediamo subito che se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, per la continuità di f, siamo nel caso della versione precedente del teorema. Altrimenti distinguiamo due casi.
Caso 1: $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 = \pm\infty$. Poniamo il caso (l'altro è speculare) che $x_2 = +\infty$. In questo caso chiamiamo $\alpha = \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(x_1)$. Posso scegliere $x_0 > x_1$; se, per l'appunto, $f(x_0) = f(x_1)$, applico il teorema di Rolle sull'intervallo $[x_0, x_1]$ ed ho finito. Altrimenti, senza perdere di generalità suppongo $f(x_0) > \alpha$. Dunque scriviamo la definizione di limite:

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, M(\epsilon) > 0 :\; \forall\, x > M \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$

Se specializziamo $\epsilon = \frac{f(x_0)-\alpha}{2} > 0$, abbiamo che per $x > M(\epsilon) \Rightarrow \alpha - \frac{f(x_0)-\alpha}{2} < f(x) < \alpha + \frac{f(x_0)-\alpha}{2}$. Applico adesso il teorema dei valori intermedi sugli intervalli $[x_1, x_0]ed[x_0, M]$. Poichè $\alpha + \frac{f(x_0)-\alpha}{2} \in [f(x_1), f(x_0)], [f(x_0), f(M)]$, esisteranno, $\xi_1 \in [x_1, x_0]$, $\xi_2 \in [x_0, M]$ tali che $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \alpha + \frac{f(x_0)-\alpha}{2}$. Dunque su questo intervallo possiamo applicare il classico teorema di Rolle.
Caso 2: $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$. In questo caso chiamiamo $\alpha = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. A questo punto scelgo x_0. Se $f(x_0) = \alpha$ ci siamo ricondotti al caso precedente. Se $f(x_0) \neq \alpha$ allora, scrivendo la definizione di limite avrò:

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, M(\epsilon) > 0 :\; \forall\; |x| > M \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$

Se specializziamo $\epsilon = \frac{f(x_0)-\alpha}{2} > 0$, abbiamo che per $|x| > M(\epsilon) \Rightarrow \alpha - \frac{f(x_0)-\alpha}{2} < f(x) < \alpha + \frac{f(x_0)-\alpha}{2}$. Applico adesso il teorema dei valori intermedi sugli intervalli $[-M, x_0]ed[x_0, M]$.Poichè $\alpha + \frac{f(x_0)-\alpha}{2} \in [f(-M), f(x_0)], [f(x_0), f(M)]$, esisteranno, $\xi_1 \in [-M, x_0]$, $\xi_2 \in [x_0, M]$ tali che $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \alpha + \frac{f(x_0)-\alpha}{2}$. Dunque su questo intervallo possiamo applicare il classico teorema di Rolle. □

Teorema 4.9 (di Lagrange)**.** *Sia $f \in C^0[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Dimostrazione. Si definisce la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle essendo, continua, deriabile e tale che $g(a) = f(a) = g(b)$;dunque $\exists\, \xi \in (a, b) :\; g'(\xi) = 0$; ma:

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corollario 4.10. *Sia $f \in C^0[a, b]$ derivabile in (a, b). Se risulta $f'(x) = 0\, \forall\, x \in (a, b)$ allora f è costante su (a, b). Se, invece si ha che $f'(x) > 0\, (< 0)\, \forall\, x \in (a, b)$ allora f è crescente (decrescente).*

Dimostrazione. Siano $x, y \in (a, b)$ allora applichiamo il teorema di Lagrange su questo intervallo:

$$\exists\, \xi \in (a, b) :\; \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi) = 0$$

Dunque, questo implica che $f(x) = f(y)\, \forall\, x, y \in (a, b)$, che è la tesi.
Se invece $f'(x) > 0\, \forall\, x \in (a, b)$, sempre applicando il teorema di Lagrange all'intervallo (x, y) si ottiene $f(x) < f(x)$ (essendo $x < y$) dunque f è crescente. □

Osservazione 4.4: Si noti che è essenziale, nel precedente teorema, valutare *su un intervallo* il segno di f'. Difatti, in generale, non è vero che se nei punti di derivabilità di una funzione, la derivata si annulla, la funzione è costante. Si pensi, ad esempio, alla funzione $f(x) = [x]$. Il viceversa non richiede la presenza di intervalli, sappiamo, difatti per il lemma (4.2), che se una funzione è costante, la sua derivata, dove esiste, è nulla. Se una funzione è invece crescente, dati due punti $x < y$ il suo rapporto incrementale è:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

e quindi, passando al limite ed applicando il teorema della permanenza del segno, $f'(x) > 0$, dovunque questa esista.

Corollario 4.11. *Sia $f \in C^0[a,b]$ e derivabile in $(a,b)\backslash\{x_0\}$ se esiste finito $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.*

Dimostrazione. Applichiamo il teorema di Lagrange sull'intervallo $[x_0, x_0 + h]$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi) \qquad x_0 < \xi < x_0 + h$$

passando al limite abbiamo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\xi)$$

ora ricordando la definizione di derivata, abbiamo che:

$$f'(x_0) = \lim_{\xi\to x_0} f'(\xi)$$

che è equivalente alla tesi, se notiamo che, per il teorema dei carabinieri $x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0$. □

Questo corollario rappresenta un vero e proprio *criterio di derivabilità* ed ha moltissime applicazioni. Ne enucleiamo alcune nella seguente

Osservazione 4.5: Innanzi tutto si noti che, alla fine della dimostrazione siamo arrivati a dire:

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

questo implica che dunque anche la derivata prima di f è continua. Scriveremo che $f \in C^1(a,b)$; non è cosa da poco. A questo punto è lecito chiedersi, dunque, se esitano funzioni derivabili, ma non aventi derivata prima continua, e che quindi non soddisfino tale criterio. Difatti nelle ipotesi leggiamo *se esiste finito il limite*; e se il limite non esistesse? Possiamo distinguere due casi, il primo è che il limite destro non coincida con quello sinistro: allora avremo un punto angoloso (di non derivabilità). Se invece non esistono nè il limite destro nè quello sinistro possiamo concludere che la derivata di f non è continua in quel punto, ma non che non esista. Come esempio prendiamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ci proponiamo di studiare la continuità di f, la derivabilità, la continuità delle derivate.
<u>Continuità</u>: Innanzi tutto, la continuità, poichè se una funzione non è continua in un punto non sarà neppure derivabile. Il punto in cui potrebbe verificarsi una discontinuità è $x_0 = 0$. Se calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \nexists & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

dunque la funzione è continua se $n > 0$.
<u>Derivabilità</u>: Andiamo a calcolare la derivabilità di f per mezzo della *definizione*, si tratterà di calcolare il limite del rapporto incrementale, cioè:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = \begin{cases} \nexists & n \leq 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

ne consegue che se $n > 1$ la funzione risulta derivabile e che $f'(0) = 0$.
Continuità della derivata: Guardiamo cosa accade per $n > 1$, cioè quando la derivata prima esiste, deriviamo la funzione:

$$f'(x) = nx^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

ed adesso calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \begin{cases} \nexists & n \leq 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$$

se ne deduce che f è derivabile con continuità solo se $n > 2$. E cosa accade se $n \in (1, 2]$? La risposta è semplice, la funzione è derivabile ma la sua derivata ha una discontinuità.

Teorema 4.12 (di Cauchy)**.** *Siano $f, g \in C^0[a, b]$ e derivabili in (a, b) con $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in [a, b]$, allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dimostrazione. Innanzi tutto notiamo che $g(b) \neq g(a)$ perchè altrimenti, per il teorema di Rolle applicato sull'intervallo $[a, b]$ esisterebbe $\bar{x} \in (a, b) : f'(\bar{x}) = 0$, e ciò contraddirrebbe le ipotesi.
Definiamo adesso la funzione h nel seguente modo:

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

vediamo che questa funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, in quanto continua, derivabile e tale che $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$, quindi:$\exists \, \xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0$; ma:

$$h'(\xi) = f'(\xi)[g(b) - g(a)] - g'(\xi)[f(b) - f(a)] = 0 \Leftrightarrow h'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

Diamo adesso, come conseguenza del teorema di Cauchy, il teorema di de l'Hopital. Ne daremo poi, senza dimostrazione anche un suo ampliamento.

Teorema 4.13 (di de l'Hôpital)**.** *Siano $f, g \in C^0[a, b]$ e derivabili in $(a, b) \backslash \{x_0\}$. Se $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$, e se esiste il limite:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

allora si ha:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dimostrazione. Notiamo innanzi tutto che $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$ poichè se fosse $g(x_1) = 0$, allora applicando il teorema di Rolle sull'intervallo $[x_0, x_1]$, esisterebbe $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f'(\bar{x}) = 0$ e ciò contraddirrebbe le ipotesi.
Sia adesso la successione $x_n \to x_0$, allora, tenendo conto che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, possiamo applicare il teorema di Cauchy:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

dove $\xi_n \in (x_0, x_n)$. Passando al limite, $x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0$ quindi avremo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = L$$

adesso per il teorema di collegamento, data l'arbitrarietà della succession x_n si ha la tesi. □

Teorema 4.14 (ampliamento del teorema di de l'Hôpital)**.** *Siano* $f, g \in C^0[a, b]$ *e derivabili in* $(a, b) \backslash \{x_0\}$ *con* $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ *tali che* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *con* $l, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$*. Se esiste*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

allora si ha:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dopo tutti questi teoremi sulle derivate, viene naturale chiedersi cosa accade se calcolo la derivata della derivata (naturalmente quando questo è possibile). La risposta è semplice, qualora esista la derivata della derivata, viene chiamata *derivata seconda* e si indica con $f''(x)$. Con un ragionamento analogo, si può arrivare a calcolare (quando tutto questo ha senso) la derivate n-esima, che si indicherà con $f^{(n)}(x)$. Tuttavia, prima di andare ad esplorare questo mondo affascinante conviene concentrarci su un altro argomento basilare della analisi: l'*integrale*.

5 Integrali

L'integrale è nato da un concetto molto pratico: la misura delle aree, in particolar modo aree sottese da cruve (area di un trapezoide). Un metodo, a cui poi l'integrale si rifà, è detto *metodo di esaustione* che consiste nell'approssimare l'area da misurare con la somma di tante aree che sappiamo misurare semplicemente (ad esempio rettangoli), e con un numero sufficientemente di queste piccole aree otterremo una buona approssimazione dell'area che volevamo misurare. L'integrale, si basa su questo concetto, o meglio sul passaggio al limite di questo concetto. Vediamo un po' di simbologia:

- Il simbolo
$$\int_a^b f(x)dx$$
è *un numero*, ovvero l'area del trapezoide sotteso da $f(x)$ tra a e b;
- Il simbolo
$$\int f(x)dx$$
è un *insieme di funzioni* che hanno come derivata $f(x)$;
- Il simbolo
$$\int_a^x f(t)dt$$
è una *funzione*, detta *funzione integrale*.

studiamo più in dettaglio questi concetti che non devono essere confusi.

5.1 Primitive

Definizione 5.1 (primitiva)**.** *$F(x)$ si dice primitiva di $f(x)$ se e solo se $F(x)$ è derivabile ed $F'(x) = f(x)$.*

Teorema 5.1. *Sia F primitiva di f, allora $\forall\, k \in \mathbb{R}: \; G(x) = F(x) + k$ è anch'essa primitiva di f.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata: basta derivare G ed otteniamo $G'(x) = f'(x)$. □

Vale anche un teorema inverso:

Teorema 5.2. *Siano F e G due primitive di f in un intervallo $[a, b]$ allora $\exists\, k \in \mathbb{R}: \; F(x) = G(x) + k$.*

Dimostrazione. Sia $H(x) = F(x) - G(x)$ allora derivando otteniamo: $H'(x) = f(x) - f(x) = 0 \,\forall\, x \in [a, b]$, dunque, se applichiamo il teorema di Lagrange sull'intervallo $[a, b]$ abbiamo:

$$\frac{H(b) - H(a)}{b - a} = 0$$

e dunque $H(x) = k$ ed abbiamo la tesi. □

Adesso possiamo dunque affermare che il simbolo:

$$\int f(x)dx$$

indica la totalità delle primitive di f.

5.2 L'integrale di Riemann

Iniziamo con una

Definizione 5.2 (partizione). *Una partizione P di $[a, b]$ un insieme ordinato di n punti tali che:*

$$a = x_1 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

La partizione P_1 si dice più fine *di P_2 se tutti i punti di P_1 stanno anche in P_2.*

Osservazione 5.1: In particolare è facile osservare come date due partizioni P_1 e P_2 sia possibile trovare una partizione P_3 più fine di entrambe: basterà considerare una partizione che contenga ed i punti di P_1 e quelli di P_2.

Adesso, con queste nozioni costruiremo l'integrale di Riemann:
Sia f limitata in $[a, b]$ e sia P una partizione di $[a, b]$. Per calcolare l'area richiesta adesso, come accennato, costruiremo dei rettangoli aventi come base la distanza tra i punti x_{k+1} e x_k della partizione, e come altezza prima l'inf e poi il sup che la funzione assume in questo intervallo. Avremo così due somme,una detta inferiore, l'altra superiore:

$$s_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \quad \text{con } m_k = \inf_{x_k<x<x_{k+1}} f(x)$$

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) \quad \text{con } M_k = \sup_{x_k<x<x_{k+1}} f(x)$$

chiaramente, risulterà subito che:

$$s_n(f) \leq S_n(f) \tag{5.1}$$

a questo punto dobbiamo introdurre il seguente

Lemma 5.3. *Siano P_1 e P_2 due partizioni dello stesso intervallo $[a, b]$, siano inoltre $s_{P_n}(f)$ ed $S_{P_n}(f)$ rispettivamente le somme inferiori e superiori, sulla partizione n; allora si ha comunque:*

$$s_{P_1}(f) \leq S_{P_2}(f)$$

In particolare, varrà che $s(f) = \sup_n s_{P_n}(f) \leq S(f) = \inf_n S_{P_n}(f)$.

Dimostrazione. Sia infatti P_3 una partizione più fine sia di P_1 che di P_2 (che è sempre possibile ottenere, per l'osservazione (5.1)). Allora avremo:

$$s_{P_1}(f) \leq s_{P_3}(f) \tag{5.2}$$

poichè aumentando il numero di punti la somma inferiore aumenterà, analogamente si avrà

$$S_{P_3}(f) \leq S_{P_2}(f) \tag{5.3}$$

e mettendo insieme (5.1),(5.2),(5.3), si ha:

$$s_{P_1}(f) \leq s_{P_3}(f) \leq S_{P_3}(f) \leq S_{P_2}(f)$$

Dunque, al variare di tutte le possibili partizioni s_{P_n} ed S_{P_n} risulteranno mutuamente limitati. Dunque esisteranno il sup e l'inf della tesi. □

Concludiamo quindi questa costruzione con la seguente

Definizione 5.3 (funzione integrabile)**.** *Una funzione si dice integrabile se e solo se:*

$$s(f) = S(f)$$

ed in tal caso il suo integrale definito tra a e b esisterà e sarà

$$\int_a^b f(x)dx$$

Prima di passare ad osservare criteri di integrabilità è proprietà di funzioni integrabili, vediamo subito una funzione che non risulta integrabile: la solita funzione di Dirichlet: $\chi_{[\mathbb{Q}]}(x)$. Difatti qualsiasi sia la partizione che facciamo, in ogni intervallo avremo sempre $m_k = 0$ d $M_k = 1$ per via della densità dei razionali sui reali. Dunque, continuando il procedimento avremo che $0 = s(f) \neq S(f) = 1$, e dunque la funzione non è integrabile secondo Riemann.

Lemma 5.4. *Una funzione f risulta integrabile su $[a, b]$ se e solo se:*

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, P(\epsilon) :\; S_{P(\epsilon)} - s_{P(\epsilon)} < \epsilon$$

Dimostrazione. Se per ipotesi f è integrabile, cioè ho che $s(f) = S(f)$, allora, per definizione stessa di queste due quantità ho che $\forall\, \epsilon \,\exists\, P_1, P_2$:

$$S_{P_1}(f) < S(f) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$s_{P_2}(f) > s(f) - \frac{\epsilon}{2}$$

prendendo quindi P_3 più fine di P_1 e di P_2 ho che:$\forall\, \epsilon \,\exists\, P_1, P_2$:

$$S_{P_3}(f) < S(f) + \frac{\epsilon}{2} \tag{5.4}$$

$$s_{P_3}(f) > s(f) + \frac{\epsilon}{2} \tag{5.5}$$

dunque sottraendo la (5.4) alla (5.5) avrò:

$$S_{P_3}(f) - s_{P_3}(f) < S(f) - s(f) + \epsilon = \epsilon$$

e dunque ho la tesi. Viceversa, invece è immadiato che

$$0 \leq S(f) - s(f) \leq S_P(f) - s_P(f) < \epsilon$$

e dunque per il teorema dei carabinieri si ha la tesi. □

Passiamo adesso a due teoremi che ci permetteranno di capire delle condizioni sufficienti affinchè una funzione sia integrabile:

Teorema 5.5. *Ogni funzione continua in $[a, b]$ è ivi integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Innanzi tutto iniziamo con l'osservare che nell'intervallo chiuso $[x_k, x_{k+1}]$ la funzione risulta continua, per il teorema di Weierstrass, dunque assumerà qui massimo e minimo. Dunque si ha che

$$m_k = \inf_{x_k<x<x_{k+1}} f(x) = \min_{x_k<x<x_{k+1}} f(x) = f(\xi_k)$$

ed analogamente

$$M_k = \sup_{x_k<x<x_{k+1}} f(x) = \max_{x_k<x<x_{k+1}} f(x) = f(\Xi_k)$$

dove $\Xi_k, \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Andiamo dunque a valutare $S_P(f) - s_P(f)$:

$$S_P(f) - s_P(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(\Xi_k) - f(\xi_k))(x_{k+1} - x_k) \tag{5.6}$$

Per dimostrare l'integrabilità della funzione, in base al lemma (5.4) basta dimostrare che: $\forall \epsilon\ \exists P :$ $S_P(f) - s_P(f) < \epsilon$ dunque, per la (5.6), provare che esiste una partizione adeguata che verifichi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f(\Xi_k) - f(\xi_k))(x_{k+1} - x_k) < \epsilon \tag{5.7}$$

Adesso, per il teorema di Cantor, se f è continua in $[a, b]$ sarà qui anche uniformemente continua, ciò significa che:

$$\forall\, \bar{\epsilon}\ \exists\, \bar{\delta} :\ \forall\, x, y \in [a, b] :\ |x - y| < \bar{\delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \bar{\epsilon}$$

dunque se $|x_{k+1} - x_k| < \bar{\delta}$ allora poichè $\Xi_k, \xi_k \in [x_{k+1}, x_k]$ a maggior ragione si avrà: $|\xi_k - \Xi_k| < \bar{\delta}$ che implicherà:

$$|f(\Xi_k) - f(\xi_k)| < \bar{\epsilon}$$

Dunque al posto della (5.7) possiamo scrivere:

$$S_P(f) - s_P(f) < \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\epsilon}(x_{k+1} - x_k) = \bar{\epsilon}(b - a)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo esplicitato la sommatoria.
A questo punto basterà scegliere $\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}}{b-a}$ per avere la tesi. □

Ci si potrebbe chiedere, nella dimostrazione precedente, in quanti intervalli (uguali) occorra suddividere il nostro intervallo $[a, b]$ di partenza per poter trovare una partizione appropriata. Considerato che $|x_{k+1} - x_k| < \bar{\delta}$ il numero minimo di intervalli sarà dato da:

$$\left[\frac{b-a}{\bar{\delta}}\right] + 1$$

Osservazione 5.2: Il precedente teorema rappresenta una condizione sufficiente, non una necessaria; difatti anche molte funzioni che presentano discontinuità risultano poi integrabili. Sia, ad esempio f una funzione continua in $[a, b] \ni c$ tale che $f(c) > \lim_{x \to c} f(x)$. Dimostriamo che questa funzione è integrabile; per farlo al solito useremo il lemma (5.4), cioè dobbiamo provare che $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, P :\ S_P(f) - s_P(f) < \epsilon$. Ma ciò risulta chiaramente possibile: consideriamo il rettangolo contenente il punto di discontinuità: avrà, altezza c e base $x_{k+1} - x_k$, dunque la sua area sarà: $c(x_{k+1} - x_k)$ e questa può essere resa a piccola a piacere con un'opportuna scelta di P. Questo risultato è estendibile a tutte le funzioni con un numero finito di punti di discontinuità, ed anche a quelle con un numero infinito di punti di discontinuità che, però, si accumulino verso un numero finito di punti; la ragione è semplice, per definizione di punto di accumulazione, in ogni suo intorno ci saranno infiniti punti (di discontinuità, in questo caso), e quindi possiamo ripetere il ragionamento precedente; inoltre ogni punto che si accumula verso detto punto risulterà o isolato, ed abbiamo finito, o di accumulazione per qualche altra successione. In ogni caso, poichè questi punti di accumulazione sono finiti, avremo la tesi.

Un'altra classe di funzioni integrabili è rappresentata dalle funzioni monotone.

Teorema 5.6. *Ogni funzione monotona in* $[a, b]$ *è ivi integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Come nel caso precedente, per il lemma (5.4) ci basterà trovare una partizione P opportuna, tale che $S_P(f) - s_P(f) < \epsilon$ arbitrario. A tale scopo esplicitiamo $S_P(f) - s_P(f)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Adesso, supponiamo che la funzione sia monotona crescente (ovviamente senza perdere di generalità) allora si avrà che:

$$m_k = \inf_{x_k < x < x_{k+1}} f(x) = f(x_k)$$

$$M_k = \sup_{x_k < x < x_{k+1}} f(x) = f(_{k+1})$$

Sia P una partizione tale che $|x_{k+1} - x_k| < \delta$, allora avremo che:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k)) < \delta \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))$$

adesso notiamo che la sommatoria suscritta è telescopica cioè i suoi termini, si annullano mutualmente, tranne il primo e l'ultimo:

$$\delta \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \delta(f(a) - f(x_2) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots + f(x_{b-1}) - f(x_b)) = \delta(f(b) - f(a))$$

A questo punto basterà scegliere $\epsilon = \frac{\delta}{f(b)-f(a)}$. □

Enunciamo, senza dimostrarle delle conseguenze della definizione di integrale di Riemann:

Teorema 5.7. *Siano* f *e* g *due funzioni integrabili sull'intervallo* $[a, b]$ *allora:*

(i) $\alpha f + \beta g$ *è integrabile;*

(ii) fg *è integrabile.*

Lemma 5.8 (monotonia integrale)**.** *Siano* f *e* g *due funzioni integrabili in* $[a, b]$ *con* $f > g$*; allora risulta che*

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$$

Dimostrazione. Se $f > g$ allora $f - g > 0$ dunque, per definizione di integrale:

$$\int_a^b (f - g)(x)dx > 0$$

da cui segue la tesi per linearità dell'integrale. □

Altre cosa da notare è la linearità dell'integrale:

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

ed inoltre le seguenti proprietà, dirette conseguenze dell'interpretazione geometrica:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
Una importante diseguaglianza è data da:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{5.8}$$

La dimostrazione di tale diseguaglianza è facile: $\int_a^b f(x)dx \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ per definizione di valore assoluto; poi $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\, dx\right|$ per la monotonia integrale; d'altronde $\left|\int_a^b |f(x)|\, dx\right| = \int_a^b |f(x)|\, dx$, (poichè $|f(x) > 0|$) da cui la tesi.
Passiamo adesso ad esaminare la *funzione intrgrale*:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

essa è una funzione di variabile x, definita con un integrale. Ovviamente la funzione integranda non reca variabile x ma t per evitare fraintendimenti. Essa rappresenta quindi l'area sottesa della funzione f tra il punto a fisso ed il punto x variabile.
È giunto ora il momento di capire la relazione fondamentale tra primitiva, introdotte nel precedente paragrafo, ed integrali: questo verrà esplicato attraverso i seguenti teoremi.

Teorema 5.9 (della media integrale)**.** *Sia $f \in C^0[a,b]$, allora $\exists\, \xi \in [a,b]$ tale che:*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

Dimostrazione. Innanzi tutto per il teorema di Weierstrass, la funzione è limitata. Sia $A = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ e $B = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ allora, ho che $B < f(x) < A$ e quindi, per la monotonia integrale:

$$\int_a^b Bdx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b Adx \tag{5.9}$$

Poichè l'integrale sull'intervallo $[a,b]$ di una costante rappresenta l'area del rettangolo cha ha per base $(b-a)$ e per altezza il valore della costante, allora la (5.9) equivale a:

$$(b-a)B < \int_a^b f(x)dx < (b-a)A \Rightarrow B < \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < A$$

Usiamo adesso l'ipotesi di continuità di f, allora, per il lemma (3.17) la funzione assumerà tutti i valori tra B ed A ed in particolare esisterà $\xi \in [a,b]$ con la proprietà:

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

da cui segue la tesi. □

Corollario 5.10 (teorema della media ponderata)**.** *Sia $f \in C^0[a,b]$ e g integrabile su $[a,b]$, con $g(x) \geq 0\, \forall\, x \in [a,b]$, allora si ha:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

con $\xi \in [a,b]$.

Dimostrazione. Innanzi tutto detti $B = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ ed $A = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, per la monotonia integrale avrò che:

$$B\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq A\int_a^b g(x)dx$$

e dunque:

$$B \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq A$$

Adesso, utilizzando l'ipotesi di continuità di g, per il lemma (3.17) la funzione f assumerà tutti i valori tra B ed A ed in particolare esisterà $\xi \in [a,b]$ con la proprietà:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)$$

□

Teorema 5.11 (fondamentale del calcolo integrale). *Sia $f \in C^0[a,b]$ allora*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Andiamo a calcolare $F'(x)$ con la definizione:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h\to h}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

a questo punto sfruttiamo l'ipotesi di continuità, per cui vale il teorema della media integrale e dunque:

$$\lim_{h\to h}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hf(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi)$$

d'altronde $\xi \in [x, x+h]$ per cui $h \to 0 \Rightarrow \xi \to x$, da cui abbiamo la tesi. □

Osservazione 5.3: Il teorema, ovviamente, vale solo se la funzione è continua. Se mancasse l'ipotesi di continuità difatti, tuttavia avrei:

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt = \int_y^x f(t)dt$$

usando la prima parte del teorema della media integrale (quella che non frutta la continuità) ho:

$$B(y-x) \leq \int_y^x f(t)dt \leq \int A(y-x) \tag{5.10}$$

dove $B = \inf_{[x,y]} f(t)$ ed $A = \sup_{[x,y]} f(t)dt$. Adesso scegliendo $L = \max\{|A|, |B|\}$ possiamo riscrivere la (5.10):

$$|F(x) - F(y)| \leq L(x-y)$$

Una funzione che gode di tale proprietà è lipschitziana. Si può banalmente verificare che è uniformemente continua, datochè $\delta = k\epsilon$

Adesso presentiamo un risultato importantissimo nel calcolo degli integrali:

Corollario 5.12 (formula di Newton-Liebnitz). *Sia $f \in C^0[a,b]$ e $F(x)$ una sua primitiva; si avrà:*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione integrale

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Essendo anche G una primitiva per il teorema fondamentale del calcolo integrale, per il teorema (5.2) si avrà: $G(x) = F(x) + k$. Adesso sappiamo che $G(a) = 0 = F(a) + k$ poniamo dunque $k = -F(a)$. Allora $\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - F(a)$, che è la tesi. □

5.3 Ricerca delle primitive

Come abbiamo visto il problema pratico del calcolo delle aree, con la formula di Newton-Liebnitz, si riduce alla ricerca di primitive delle funzioni. Alcune sono molto semplici da ricavare, e lo si può fare direttamente con la definizione, ad esempio la primitiva di $\text{sen}(x)$ è $-\cos(x)$, quella di $\frac{1}{x}$ e $\ln(x)$, quella di x^n è $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Tuttavia non è sempre così facile, data una funzione generica, che sappiamo essere integabile (magari perchè è continua o monotona), difficilmente sappiamo esprimere la sua primitiva in termini di funzioni elementari. Vedremo di seguito i due principali metodo di integrazione.

5.3.1 Integrazione per Sostituzione

Sia $f \in C^0[a, b]$ e $t \in C^1[\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$. Supponiamo di avere:

$$\int f(t(x))t'(x)dx$$

facendo allora la sostituzione $t = t(x)$ si il calcolo dell'integrale si ridurrà al calcolo di:

$$\int f(t)dt$$

Dimostrazione. Se F è una primitiva di f, derivando la funzione composta $F(t(x))$ otteniamo proprio $f(t(x))t'(x)$, dunque è lecito procedere come indicato sopra. □

Dovendo poi calcolare l'integrale definito:

$$\int_r^s f(t(x))t'(x)dt$$

ci dobbiamo ricordare di applicare la sostituzione anche agli estremi, avremo così:

$$\int_{t(r)}^{t(s)} f(t)dt$$

Inoltre se t è iniettiva, ammette un'inversa, dunque potremmo eseguire la sostituzione $x = x(t)$ e ragionare come sopra.

5.3.2 Integrazione per Parti

Nel caso precedente ci siamo rifatti alla formula di derivazione della funzione composta. Un altro metodo consiste nel ricavare un metodi di integrazione dalla formula di derivazione del prodotto di funzioni.
Sia $f \in C^0[a, b]$ e $g \in C^1[a, b]$, e sia F una primitiva di f, allora avremo:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

Dimostrazione. Dalla formula di derivazione del prodotto di funzioni abbiamo infatti:

$$(F(x)g(x))' = f(x)g(x) - F(x)g'(x)$$

da cui integrando ambo i membri otteniamo la formula di integrazione per parti. □

5.4 Integrale generalizzato

Due ipotesi cardinali affinchè una funzione sia integrabile su un intervallo sono la sua limitatezza e la limitatezza dell'intevallo di integrazione. Viene spontaneo, a questo punto domandarsi cosa succederebbe qualora una di queste due ipotesi (o magari entrambe) venga violata.

Definizione 5.4 (integrale improprio). *Sia f una funzione tale che $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ allora diremo che questa funzione è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(a, b]$ se esiste finito il limite:*

$$\lim_{\epsilon\to a^+} \int_\epsilon^b f(x)dx$$

Avremo una definizione simile anche qualora l'intervallo di integrazione non è limitato:

Definizione 5.5 (integrale generalizzato). *Sia f una funzione. Diremo che questa è integrabile nell'intervallo $[a, +\infty)$ qualora esista finito il limite:*

$$\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)dx$$

Se funzione f è tale che $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to b^-}$ allora diremo che è integrabile in (a, b) qualora esistano entrambe i limiti:

$$\lim_{\epsilon\to a^+} \int_\epsilon^{x_0} \qquad\qquad \lim_{\epsilon\to b^-} \int_{x_0}^{\epsilon}$$

dove $x_0 \in (a, b)$.
Adesso daremo dei teoremi utili per studiare la convergenza di integrali impropri:

Teorema 5.13 (del confronto). *Sia $f(x) \leq 0$ per $x > x_1$ e sia inoltre $f(x) \leq g(x)$ per $x < x_2$ allora se $\int_{x_2}^{+\infty} g(x)dx$ converge, allora converge anche $\int_{x_2}^{+\infty} f(x)dx$.*

Dimostrazione. Innanzi tutto notiamo che se $f(x) \leq 0$ per $x > x_1$ allora $\int_{x_2}^{M} f(x)dx$ è crescente su M (poichè l'area sottesa dalla curva nell'intervallo via via maggiore, aumenta). Questo ci assicura l'esistenza (finita od infinita) del limite $\lim_{M\to+\infty} \int_{x_2}^{M} f(x)dx$. Adesso per la monotonia integrale avrò $\forall\, M > x_0 = \max\{x_1, x_2\}$:

$$\int_{x_0}^{M} f(x)dx \leq \int_{x_0}^{M} g(x)dx < \int_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$$

poichè anche l'area sottesa da g crescerà. Dunque passando al limite avremo:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{x_0}^{M} f(x)dx = \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$$

Dunque la convergenza di $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$ implica la convergenza di $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$. D'altronde

$$\int_{x_2}^{+\infty} f(x)dx = \int_{x_2}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$$

e dunque, poichè il primo pezzo dell'integrale è integrabile secondo Riemann per ipotesi, abbiamo la tesi. □

Corollario 5.14. *Se esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ allora f è integrabile su $[a, +\infty]$ solamente se $l = 0$.*

Dimostrazione. Se $l \neq 0$ allora il si avrebbe definitivamente $f(x) > l$ e per il teorema precedente, dato che $\int_a^{+\infty} l dx$ diverge, divergerà anche $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. □

Osservazione 5.4: Di grande utilità è a questo punto costruire una classe di funzioni integrabili in senso improprio; studieremo la convergenza di:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Innanzi tutto notiamo che se $\alpha \leq 0$ la funzione, nell'intervallo proposto è integrabile secondo Riemann. Concentriamoci dunque sul caso $\alpha > 0$:

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = F(x) \begin{cases} \ln(x) & \alpha = 1 \\ \frac{1}{x^{\alpha-1}(1-\alpha)} & \alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

Andiamo ora a calcolare tale integrale indefinito:

$$F(1) - \lim_{\epsilon \to 0^+} F(\epsilon) = \begin{cases} +\infty & \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi tale funzione è integrabile (in senso imporprio) sull'intervallo $(0,1]$ per $0 < \alpha < 1$. Adesso vediamo cosa succede se cerchiamo di integrare tale funzione nell'intervallo $(0,+\infty)$: con la solita primitiva calcoliamo:

$$\lim_{M \to +\infty} F(M) - F(1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Dunque tale funzione è integrabile (in senso improprio) sull'intervallo $(1,+\infty)$ per $\alpha > 1$.

Corollario 5.15. *Sia $f(x) \geq 0$ per $x > x_0$. Se esiste $\alpha > 1$ tale che $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = l$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limite, scegliendo $\epsilon = 1$ otteniamo:

$$x > M \Rightarrow l - 1 < x^\alpha f(x) < l + 1$$

Andando ora a dividere per x^α otteniamo:

$$\frac{l-1}{x^\alpha} < f(x) < \frac{l+1}{x^\alpha}$$

guardiamo in particolare dal secondo e terzo membro di questa diseguaglianza: l'osservazione (5.4) ci dice che $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge solo se $\alpha > 1$, per il teorema del confronto, abbiamo dunque la tesi. □

Osservazione 5.5: Si noti che, nel caso precedente, se $\alpha = 1$ non possiamo concludere nulla: difatti, la funzione $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, avendo primitiva $F(x) = \ln \ln x$ non è integrabile, ad esempio in $x > 2$. Mentre $f(x) = \frac{1}{x^2}$ lo è.
Una variante di questo corollario utile nelle applicazioni è il seguente:

Corollario 5.16 (criterio del confronto asintotico)**.** *Sia $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ per $x > x_0$. Sia $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \bar{\mathbb{R}}^+)$, dove $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora:*

(i) Se $\lambda \in (0,+\infty) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ hanno lo stesso carattere;

(ii) Se $\lambda = 0, \int_a^b g(x)dx$ converge, allora $\int_a^b f(x)dx$converge;

(iii) Se $\lambda = +\infty, \int_a^b f(x)dx$ converge, allora $\int_a^b g(x)dx$ converge.

Dimostrazione. (i) Se $\lambda \in (a, +\infty)$, per la definizione di limite avremo, segliendo $\epsilon : \lambda - \epsilon > 0$:

$$x < b + \delta \Rightarrow \lambda - 1 < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + 1$$

andando quindi a moltiplicare per $g(x) > 0$ si avrà:

$$(\lambda - \epsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \epsilon)g(x)$$

integrando dunque tutti e tre i membri, per il teorema del confronto (nel caso $b = \infty$) oppure per la monotonia integrale avremo che $\inf_a^b f(x)dx$ converge se e solo se $\int_a^b g(x)dx$ converge.

(ii) Se $\lambda = 0$, per la definizione di limite avremo:

$$x < b + \delta \Rightarrow 0 < \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$$

moltiplichiamo ora tutto per $g(x) > 0$:

$$0 < f(x) < \epsilon g(x)$$

e per il teorema del confronto (nel caso $b = +\infty$), altrimenti per monotonia integrale, se converge $\int_a^b g(x)$ allora convergerà anche $\int_a^b f(x)dx$, ma non siamo capaci di concludere nulla circa il viceversa.

(iii) Se $\lambda = +\infty$ allora $\lim_{x \to b} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ e ci siamo ricondotti al caso precedente con $f(x)$ e $g(x)$scambiati. □

Per le funzioni che definitivamente non assumono un segno determinato è utile il

Corollario 5.17 (criterio di convergenza assoluta). *Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, allora converge anche $\int_a^b f(x)dx$.*

Dimostrazione. Dalla diseguaglianza (5.8) abbiamo che:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Adesso, passando al limite ed applicando il teorema del confronto avemo la tesi. □

6 Derivate successive

Come promesso, per concludere parleremo di derivate successive, cioè la derivata della derivata (derivata seconda), la derivata della derivata della derivata (derivata terza) e così via.

6.1 Formula di Taylor

Una delle applicazioni più affascinanti ed utili delle derivate n-esime, la la formula di Taylor, che permette di approssimare (certe) funzioni con dei polinomi, che, ad esempio, nel calcolo dei limiti sono più facili da trattare. Una prima idea la si può avere dal teorema di Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

con $\xi \in [x, x_0]$. In effetti verrebbe voglia di chiedersi cosa succederebbe se avessi una funzione di classe C^n. Potrei ricavarmi una formula simile? Procediamo per gradi:

Definizione 6.1 (o piccolo). *Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ diremo che $f(x) = o(g(x))$*

Osservazione 6.1: Naturalmente non dobbiamo trattare gli o piccoli come delle normali quantità algebriche; ad esempio $o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$, come si può facilmente verificare dalla definizione. Nonostante questa apparente stranezza, questo concetto sarà indispensabile per la prosecuzione del corso. In particolar modo ci servirà considerare gli o piccoli di potenze naturali di x.

Definizione 6.2 (polinomio di Taylor). *Sia f una funzione di classe C^n, allora definiamo $P_n(f, x_0)$ polinomio di Taylor di f centrato in x_0 il seguente:*

$$P_n(f, x_0) = f(x_0) + f'(f_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Teorema 6.1. *Sia f di classe C^n, allora $R_n(f, x_0) = P_n(f, x_0) - f(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$.*

Dimostrazione. Verifichiamo l'enunciato con la definizione di o piccolo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(f, x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^n}$$

ci accorgiamo subito che si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$ dunque, in conformità a le ipotesi, possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital; avremo[10]:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)} \frac{(x - x_0)^{k-1}}{(k-1)!}}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

applicando quindi il teorema suddetto per n volte, si giungerà al limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

□

Questo teorema ci permette una scrittura della formula di Taylor:

Definizione 6.3 (formula di Taylor col resto di Peano). *Sia f una funzione di classe C^n allora vale la seguente scrittura:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Questa scrittura sarà molto utile nel risolvere i limiti; un altro tipo di resto ci è assicurato dal seguente

Teorema 6.2. *Sia f una funzione di classe C^{n+1}, allora esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che:*

$$R_n(f, x_0) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare che:

$$R_n(f, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Ragioniamo per induzione, l'affermazione è vera per $n = 0$ poichè si ha:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t) dt = f(x) - f(x_0) = R_0(f, x_0)$$

[10]Ricordando che le derivate che compaiono nella formula altro non sono che costanti!

supponendo adesso che sia vera per $n-1$ proviamo che è vera per n, usando l'integrazione per parti:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \left[\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)\right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

adesso per ipotesi induttiva risulta:

$$R_{n-1}(f,x_0) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)dt = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

dunque avrò:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0) + f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0^k) = R_n(f,x_0)$$

Adesso ricordando il teorema della media integrale generalizzata, posto $g(t) = (x-t)^n$ ed $f(t) = f^{(n+1)(t)}$ si ha (con $\xi \in [x_0, x]$):

$$\begin{aligned} R_n(f,x_=) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt &= f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \\ &= f^{(n+1)}(\xi)\left[\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_0}^{x} = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

che, innegabilmente è la tesi. □

Anche questo teorema ci permette un'altra scrittura della formula di Taylor:

Definizione 6.4 (formula di Taylor col resto di Lagrange)**.** *Sia f una funzione di classe C^{n+1}, allora vale la seguente scrittura:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove $\xi \in [x_0, x]$.

Questo tipo di resto è molto comodo nel calcolo approssimato di valori di funzioni, integrali, etc.

6.2 Concavità e convessità

Un'altra proprietà delle derivate seconde è quella di esprimere la concavità/convessità delle funzioni.

Definizione 6.5. *Una funzione f si dice convessa in un intervallo I se, comunque prendiamo due punti x_1 ed x_2 in I il grafico della funzione sta sempre sotto la retta che unisce i due punti; ovvero se:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

avendo $x_1, x_2 \in I$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Una conseguenza di questa definizione è espressa dal seguente risultato che non dimostreremo:

Teorema 6.3. *Sia f una funzione derivabile, convessa in I allora risulterà:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Arriviamo adesso a questo importante risultato:

Teorema 6.4 (criterio di convessità)**.** *Sia f una funzione derivabile, allora f è convessa in I se e solo se $f'(x)$, con $x \in I$ è crescente.*

Dimostrazione. Partiamo dall'ipotesi che sia convessa, allora si avrà, per il teorema (6.3):

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{6.1}$$

per ogni $x_0, x_1 \in I$, d'altra parte scambiando i ruoli di x_0 ed x_1 si avrà:

$$f(x_0) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_0 - x_1) \tag{6.2}$$

Sommando membro a membro la (6.1) e la (6.2) si ottiene:

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) + f'(x_1)(x_0 - x_1) \leq 0$$

raccogliendo $(x_1 - x_0)$ si ha

$$(f(x_1) - f(x_0))(x_1 - x_0) \geq 0$$

che è equivalente alla crescenza di f'.
Viceversa supponiamo di avere per ipotesi la crescenza di f', allora per il teorema di Lagrange avrò:

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0) \tag{6.3}$$

ovviamente con $x_0 \leq \xi, \leq x_1$, d'altronde se f' è crescente avrò, ad esempio che $f'(\xi) \geq f'(x_0)$, e quindi la (6.3) diventerà:

$$f(x_1) - f(x_0) \leq f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

che è la tesi. □

Corollario 6.5. *Sia f una funzione derivabile due volte, allora f è convessa in I se e solo se $f''(x) >$, con $x \in I$.*

Dimostrazione. Per definizione $f''(x) = (f'(x))'$. Per il criterio di convessità f era convessa in I se e solo se f' era crescente. Questo è equivalente a dire che $f''(x) > 0$, per il corollario (4.10). □

A questo punto conviene dare una nuova

Definizione 6.6 (punto di flesso)**.** *Si chiamo punto di flesso il punto dove la funzione cambia concavità, cioè o da concava diviene convessa, o da convessa diviene concava.*

6.3 Massimi, Minimi, Flessi

Un'altra importante applicazione delle derivate successive, che coinvolge anche la formula di Taylor è legata allo studio di una funzione, dei suoi massimi, minimi, flessi.

Teorema 6.6. *Sia f una funzione derivabile due volte in x_0 se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo per f.*

Dimostrazione. Dalla definizione di derivata seconda abbiamo:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

allora per il teorema della permanenza del segno $\exists\, I(x_0, \delta)$ tale che $\forall\, x \in I$ si abbia:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

poichè $f'(x_0) = 0$ per ipotesi. Dunque $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$, ed abbiamo la tesi. □

Osservazione 6.2: Ovviamente avremo un caso speculare per un minimo assoluto. Verrebbe voglia di asserire l'inverso di questo teorema, cioè che se x_0 è un punto di massimo, allora si debba avere $f''(x) < 0$. Tuttavia ciò è falso. Come controesempio prendiamo $f(x) = -x^4$. Abbiamo $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ eppure $x = 0$ è punto di massimo. L'ipotesi giusta è dunque che $f''(x_0) \leq 0$. D'altronde ciò si poteva desumere dalla contronominale dello stesso teorema: è evidente che se $f''(x_0) > 0$, x_0 sia punto di minimo. Ma la negazione di $f''(x_0) > 0$ è proprio $f''(x_0) \leq 0$.

Viene adesso spontaneo chiedersi cosa accada alla funzione (derivabile quanto si voglia) se $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$; oppure se $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$. La risposta è nel seguente

Teorema 6.7. *Sia f una funzione derivabile n volte e si abbia $f^{(k)}(x_0) = 0 \;\forall\, k = 1 \dots n-1$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ allora se n è dispari x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale, se n è pari x_0 è punto di minimo/massimo a seconda che $f^{(n)}(x_0)$ sia positiva/negativa.*

Dimostrazione. Scriviamo la formula di Taylor con resto di Peano per f:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

ricordando, però che le prime $n - 1$ derivate sono tutte nulle si avrà:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n}\right]$$

Analizziamo dunque la quantità tra parentesi quadre. In un inotrno I di x_0, il segno di $\alpha = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}$ sarà uguale al segno di $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ poichè per definizione se $x \to x_0 \Rightarrow \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \to 0$. Dunque:

$$f(x) - f(x_0) = \alpha(x - x_0)^n$$

Se n è dispari: $f(x) - f(x_0)$ cambia segno in un intorno di x_0 e quindi x_0 è punto di flesso;
Se n è pari: $f(x) - f(x_0)$ avrà sempre il solito segno in tutto l'intorno di x_0. Se $\alpha > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ e quindi x_0 è punto di minimo, nel caso contrario è punto di massimo. $\square$